Серия «Математика»
2025. Т. 54. С. 33—47

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.977.5, 519.863
MSC 49M99, 91B55
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.33

Модель управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания с вакцинацией

И. В. Лутошкин[1], **М. С. Рыбина**[1✉]

[1] Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Российская Федерация
✉ lutoshkiniv@ulsu.ru

Аннотация: Предлагается математическая модель оптимального управления экономическим субъектом в условиях массового заболевания. Показывается, что она одновременно отражает биологические и социально-экономические факторы и является модификацией модели, предложенной авторами в предыдущих исследованиях, поскольку учитывает фактор вакцинации населения. Полученная модель сформулирована в терминах задачи оптимального управления с точечным запаздыванием по фазовым и управляющим переменным. Также в модели присутствуют промежуточные ограничения. Для анализа представленной модели применяется функция Понтрягина, позволяющая сделать выводы о структуре оптимального управления. Для решения полученной задачи оптимального управления предлагается применение метода параметризации. Приведены результаты вычислительных экспериментов с предлагаемой моделью для случая, когда параметры модели оценены на данных о COVID-19 за 2020 г. по Российской Федерации.

Ключевые слова: оптимальное управление, экономическая система, массовое заболевание, вакцинация

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-28-00542, https://rscf.ru/project/24-28-00542/

Ссылка для цитирования: Лутошкин И. В., Рыбина М. С. Модель управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания с вакцинацией // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 54. С. 33–47.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.33

Research article

Model of Control of the Economic System in Conditions of Mass Disease with Vaccination

Igor V. Lutoshkin[1], **Maria S. Rybina**[1]✉

[1] Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russian Federation

✉ lutoshkiniv@ulsu.ru

Abstract: The paper proposes a mathematical model for optimal control of an economic entity in the context of a widespread disease outbreak. This model simultaneously reflects biological and socio-economic factors and is a modification of the model previously proposed by the authors, as it considers the factor of population vaccination. The resulting model is formulated as an optimal control problem with a pointwise delay in both the state and control variables. The model also includes intermediate constraints. To analyze the presented model, the Pontryagin function is applied, which allows conclusions to be drawn about the structure of the optimal control. The parameterization method is proposed to solve the obtained optimal control problem. The results of computational experiments with the proposed model are presented for the case when the model parameters are estimated using data on COVID-19 for 2020 in the Russian Federation.

Keywords: optimal control, economic system, mass disease, vaccination

Acknowledgements: The research was financially supported by the Russian Science Foundation No. 24-28-00542, https://rscf.ru/en/project/24-28-00542/

For citation: Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Model of Control of the Economic System in Conditions of Mass Disease with Vaccination. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 54, pp. 33–47. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.33

1. Введение

Увеличение популяции населения и его мобильности в современном мире ведет к возрастанию рисков, связанных с возникновением массовых заболеваний. В случае вспышки массового заболевания руководству экономической системы — страны или региона — необходимо разработать стратегию управления в сложившихся условиях. Определить такую стратегию можно, в частности, с помощью соответствующей математической модели.

Большинство математических моделей массовых заболеваний отражают только биологические и популяционные факторы (модели SIR, SEIR, SVIR и т. д.) [7–12; 14]. Однако при принятии управленческого решения желательно учитывать и социально-экономический аспект [4; 9; 13].

В данной работе предлагается математическая модель оптимального управления экономическим субъектом в условиях массового заболевания, одновременно учитывающая биологические и социально-экономические факторы, в частности фактор вакцинации населения. Она является модификацией модели, предложенной авторами в предыдущих исследованиях [4;13], где вакцинация не принималась во внимание. Полученная модель сформулирована в терминах задачи оптимального управления с точечным запаздыванием как по фазовым переменным, так и по управляющим, присутствуют промежуточные ограничения. Для анализа представленной модели применяется функция Понтрягина, позволяющая сделать выводы о структуре оптимального управления. Последнее дает возможность выбрать подходящий класс управляющих функций для применения метода параметризации [3].

2. Формулировка модели

Рассмотрим математическую модель управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания для случая, когда разработаны профилактические вакцины, которые помогают замедлить распространение эпидемии.

Для описания биологического аспекта массового заболевания введём разбиение населения N страны или региона на замкнутые непересекающиеся подмножества (компартменты) и обозначим их количество: P — лица, не имеющие иммунитета к заболеванию, но соблюдающие ограничительные меры (например, режим самоизоляции) и тем самым снижающие для себя риск заражения; S — лица, не имеющие иммунитета к заболеванию и не соблюдающие ограничительные меры и, следовательно, потенциально подверженные заражению; E — лица, у которых заболевание находится в инкубационной стадии; I — заболевшие; Q — госпитализированные; R — выздоровевшие; V_i — лица, получившие искусственный иммунитет к заболеванию благодаря тому, что привились i-м видом вакцины, $1 \leqslant i \leqslant n$, n — количество видов вакцин против заболевания; D — умершие вследствие заболевания.

Социально-экономический аспект опишем следующими показателями: Y — валовый выпуск в денежном выражении; π – прибыль экономического субъекта; K – стоимость основных фондов; L – численность трудоспособного населения с точки зрения результативного труда; Z — количество койко-мест в учреждениях здравоохранения.

Управляющие воздействия органов власти выражаются выделением бюджета на меры в рамках периода планирования, а также определением стратегии расходования этого бюджета. Рассмотрим следующие управления: u_1 — затраты на переоборудование существующих койко-мест для размещения заболевших; u_2 — затраты на увеличение числа койко-мест за счёт строительства новых больниц; u_3 — затраты на информирование населения о заболевании, методах профилактики и борьбы с ним; u_{3+i} — затраты на кампанию по вакцинированию населения i-м видом вакцины, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Опишем динамику выделенных компартментов. В представленных ниже уравнениях коэффициенты k_{ij} $i, j \in \{S, P, E, I, Q, R, D, V_1, \ldots, V_n\}$ обозначают интенсивности перехода лиц из компартмента i в компартмент j.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = k_{PS}P(t) - \left(k_{SE}\left(\frac{I(t)}{N(t)}\right) + k_{SP}(u_3(t)) - \rho\right) S(t) \\ +k_{RS}R(t-\tau) + \sum_{i=1}^{n} V_i(t - \widetilde{\tau}_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{3+i}(t - \widehat{\tau}_i)}{c_i}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ρ — естественный прирост населения в долях от общей численности населения; τ — время, в течение которого сохраняется иммунитет у выздоровевших; $\widetilde{\tau}_i$ — время, в течение которого сохраняется искусственный иммунитет у вакцинированных i-м видом вакцины; $\widehat{\tau}_i$ — время, в течение которого вырабатывается иммунитет после вакцинации i-м видом вакцины. В случае использования многокомпонентных вакцин, которые вводятся в несколько этапов через определённые промежутки времени, иммунитет полностью формируется только после введения последнего компонента [6]. Это позволяет сделать упрощение и представить такие вакцины как однокомпонентные, считая фактом вакцинации введение последнего компонента вакцины:

$$\frac{dP}{dt} = k_{SP}(u_3(t))S(t) - k_{PS}P(t), \tag{2.2}$$

$$\frac{dE}{dt} = k_{SE}\left(\frac{I(t)}{N(t)}\right)\left(S(t) + \sum_{i=1}^{n}(1 - \widetilde{e}_i)\frac{u_{3+i}(t - \widehat{\tau}_i)}{c_i}\right) - k_{EI}E(t), \tag{2.3}$$

$$\frac{dI}{dt} = k_{EI}E(t) - (k_{IQ} + k_{IR} + k_{ID})I(t), \tag{2.4}$$

$$\frac{dQ}{dt} = k_{IQ}I(t) - (k_{QD} + k_{QR})Q(t), \tag{2.5}$$

$$\frac{dR}{dt} = k_{IR}I(t) + k_{QR}Q(t) - k_{RS}R(t), \tag{2.6}$$

$$\frac{dD}{dt} = k_{QD}Q(t) + k_{ID}I(t), \tag{2.7}$$

$$\frac{dZ}{dt} = g(u_2(t - \tilde{\tau})) - \mu Z(t) + ku_1(t), \tag{2.8}$$

где $g(u_2)$ — функция увеличения количества койко-мест за счёт вложений в строительство новых больниц, $\tilde{\tau}$ — время, за которое строится больница после выделения бюджета на её строительство, μ — коэффициент амортизации больничных фондов; k — соотношение количества койко-мест, переоборудованных для размещения заболевших, и вложений в их переоборудование.

Обозначим через $\widetilde{V}_i(t)$ количество вакцинированных, на которых возымела действие вакцина вида i в момент t:

$$\widetilde{V}_i(t) = \left(1 - (1 - \widetilde{e}_i)k_{SE}\left(\frac{I(t)}{N(t)}\right)\right)\frac{u_{3+i}(t - \widehat{\tau}_i)}{c_i},$$

где c_i — стоимость одной дозы i-го вида вакцины; $\widetilde{e}_i$ — эффективность вакцины i-го вида. Эффективность вакцины — доля уменьшения вероятности заболеть [6]. Например, эффективность вакцины, равная 80 %, означает, что риск заразиться у привитого человека становится меньше на 80 % относительно такого же риска для непривитого человека.

В этом случае динамика вакцинированных удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dV_i}{dt} = \widetilde{V}_i(t) - \widetilde{V}_i(t - \widetilde{\tau}_i), i = \overline{1, n}. \tag{2.9}$$

Введем алгебраические связи, характеризующие социально-экономические показатели модели при $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Так, обеспеченность госпитализированных койко-местами определяется условием

$$Q(t) \leqslant Z(t). \tag{2.10}$$

Численность населения экономической системы

$$N(t) = P(t) + S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i(t). \tag{2.11}$$

Общий объём результативного труда:

$$L(t) = m\left(e_P P(t) + e_S S(t) + e_E E(t) + e_R R(t) + \sum_{i=1}^{n} e_{V_i} V_i(t)\right), \tag{2.12}$$

где m – доля трудоспособного населения от общей численности населения; e_k – продуктивность труда человека из k-й группы ($k \in \{P, S, E, R, V_1, \ldots, V_n\}$), измеряющаяся в долях от продуктивности труда здорового человека.

Валовый выпуск Y описывается некоторой производственной функцией $Y(t) = F(K(t), L(t))$. Здесь $K(t)$ является детерминированной экзогенной функцией, описывающей динамику изменения основных фондов на периоде планирования. Бухгалтерскую прибыль π экономического субъекта можно представить в следующем виде:

$$\pi(t) = Y(t) - \sum_{i=1}^{n+3} u_i(t). \tag{2.13}$$

Отметим, что валовый выпуск $Y(t)$ зависит от биосоциального эффекта массового заболевания. Следовательно, величина прибыли также опосредованно учитывает данный эффект.

Целью вакцинации населения является достижение коллективного иммунитета. Считается, что коллективный иммунитет сформирован, когда определенная (достаточно значительная) доля населения имеет искусственный и/или естественный иммунитет к заболеванию [1]. В терминах модели будем считать, что коллективный иммунитет должен быть обязательно достигнут на момент окончания моделируемого периода. Таким образом, следует ввести терминальное ограничение:

$$\frac{R(T) + \sum_{i=1}^{n} V_i(T)}{N(T)} \geqslant \nu, \tag{2.14}$$

где $V_i(T)$ — количество людей, привитых i-м видом вакцины, на момент окончания моделируемого периода, $N(T)$ — численность населения (популяция) на момент окончания моделируемого периода, ν — доля имеющих иммунитет, необходимый для достижения коллективного иммунитета.

Относительно управления в модели делаются следующие предположения:

$$\begin{cases} u_i(t) \geqslant 0, & i = \overline{1, n+3}, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{T} u_i(t)dt \leq B_i, & i = \overline{1,3}, \qquad \displaystyle\int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} u_{3+i}(t)dt \leq B_4. \end{cases} \tag{2.15}$$

Здесь B_1 – объём бюджета на переоборудование существующих койкомест; B_2 – объём бюджета на строительство новых больниц; B_3 – объём бюджета на информационную кампанию по борьбе с массовым заболеванием; B_4 – общий бюджет на вакцинацию всеми видами вакцин. Так как возможности экономической системы ограничены, то существует константа C: $U_i \leqslant C$ для $\forall t \in [t_0; T]$, $i = \overline{1, n+3}$. Тогда можно предположить, что управления U_i $(i = \overline{1, n+3})$ принадлежат классу кусочно-непрерывных функций. На выбор целевого функционала влияет орган управления экономической системой. Наиболее логичны две цели: уменьшение количества заболевших, увеличение совокупной прибыли. Можно сформулировать функционал, содержащий свертку доли заболевших и доли относительной прибыли:

$$J_1(u_1, ..., u_{n+3}) = \int_{t_0}^{T} \left(\alpha_1 \frac{E(t)}{N(t_0)} - \alpha_2 \frac{\pi(t)}{Y(t_0)} \right) dt \to \min. \tag{2.16}$$

Здесь $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Зафиксируем начальные условия системы:

$$\begin{gathered}S(t_0) = S^0, P(t_0) = P^0, E(t_0) = E^0, I(t_0) = I^0,\\ Q(t_0) = Q^0, D(t_0) = D^0, Z(t_0) = Z^0,\\ R(t) = R^0(t), V_i(t) = V_i^0(t), i = 1, \ldots, n, \text{при } t \leqslant t_0,\end{gathered} \tag{2.17}$$

(функции $R^0(t)$, $V_i^0(t)$ известны на момент начала планирования), тогда задача (2.1)–(2.17) представляет собой задачу ОУ с точечным запаздыванием по фазовым траекториям, по управляющему воздействию, промежуточными фазовыми ограничениями, терминальными ограничениями.

Отметим, что в системе дифференциальных уравнений задачи (2.1)–(2.17) правая часть удовлетворяет условию сублинейного роста, множество значений управления выбирается из компакта. Таким образом, задача (2.1)–(2.17) имеет решение на допустимом множестве, а принцип максимума позволяет определить структуру оптимального управления.

3. Структура оптимального управления

Сведем исходную задачу ОУ (2.1)–(2.16) к задаче со свободным правым концом, терминальным функционалом и без промежуточных ограничений. Для этого введем переменные F_1, F_2:

$$\begin{aligned}\frac{dF_1}{dt} &= \alpha_1 \frac{E(t)}{N(0)} - \alpha_2 \frac{\pi(t)}{Y(0)}, \quad F_1(t_0) = 0;\\ \frac{dF_2}{dt} &= \left([Q(t) - Z(t)]^+\right)^2, \quad F_2(t_0) = 0.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь функция срезки $[\zeta]^+ = \zeta$, если $\zeta > 0$, $[\zeta]^+ = 0$, если $\zeta \leqslant 0$.

Пусть $x(t)$ — вектор-функция фазовых переменных, $u(t)$ — вектор управляющих функций, $p(t)$ — вектор-функция сопряженных переменных, $\gamma \in \Re^{n+1}$ — вектор лагов запаздывания в фазовых переменных, $\theta \in \Re^{n+1}$ — вектор лагов запаздывания в управлении:

$$\begin{aligned}x(t) = (&S(t), P(t), E(t), I(t), Q(t), R(t), D(t), Z(t), V_1(t), \ldots,\\ &V_n(t), F_1(t), F_2(t))\\ p(t) = (&p_S(t), p_P(t), p_E(t), p_I(t), p_Q(t), p_R(t), p_D(t), p_Z(t), p_{V_1}(t), \ldots,\\ &p_{V_n}(t), p_{F_1}(t), p_{F_2}(t));\\ u(t) = (&u_1(t), \ldots, u_{3+n}(t)), \quad \gamma = (\tau, \widetilde{\tau}_1, \ldots, \widetilde{\tau}_n), \quad \theta = (\tilde{\tau}, \hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_n).\end{aligned}$$

Также введем обозначения:
$x^\gamma(t) = (x(t-\gamma_1), x(t-\gamma_2), \ldots, x(t-\gamma_{n+1}))$,
$u^\theta(t) = (u(t-\theta_1), u(t-\theta_2), \ldots, u(t-\theta_{n+1}))$.

Модифицируем целевой функционал (2.16) к виду

$$J_2(x(T)) = F_1(T) + \beta_1 F_2(T) + \beta_2 \left(\left[\nu - \frac{R(T) + \sum_{i=1}^{n} V_i(T)}{N(T)} \right]^+ \right)^2 \to \min . \tag{3.2}$$

Здесь β_1, β_2 — штрафные коэффициенты.

Введем $H(t, p, x, x^\gamma(t), u, u^\theta(t)) = \left\langle p, f(t, x, x^\gamma(t), u, u^\theta(t)) \right\rangle$ (функцию Понтрягина). Здесь $f(t, x, x^\gamma(t), u, u^\theta(t))$ — вектор-функция, состоящая из правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1)–(2.9), (3.1); $\langle p, f \rangle$ — скалярное произведение p, f.

Непосредственно анализируя функцию $H(t, p, x, x^\gamma(t), u, u^\theta(t))$, можно выделить слагаемые, зависящие от $u_1, ..., u_{n+3}$:

$$h_1(u_1) = \left(p_Z \cdot k - \frac{\alpha_2}{Y(0)} \right) u_1; \quad h_2(u_2) = p_Z \cdot g(u_2(t - \tilde{\tau})) - \frac{\alpha_2}{Y(0)} u_2;$$

$$h_3(u_3) = (p_P - p_S) \cdot S \cdot k_{SP}(u_3) - \frac{\alpha_2}{Y(0)} u_3;$$

$$h_{3+i}(u_{3+i}) = \left(p_S + k_{SE} \left(\frac{I}{N} \right) (1 - \tilde{e}_i)(p_E - p_{V_i}) \right) \frac{u_{3+i}(t - \hat{\tau}_i)}{c_i} - \frac{\alpha_2}{Y(0)} u_{3+i}$$

$$- \left(1 - (1 - \widetilde{e}_i) k_{SE} \left(\frac{I(t - \widetilde{\tau}_i)}{N(t - \widetilde{\tau}_i)} \right) \right) \frac{u_{3+i}(t - \widehat{\tau}_i - \widetilde{\tau}_i)}{c_i} p_{V_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Из полученных выражений можно сделать следующие выводы:

1. Функция Понтрягина зависит от u_1 и u_2 линейно, при этом наложены ограничения $0 \leqslant u_i \leqslant C$, $\int_{t_0}^{T} u_i(t) dt \leqslant B_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, управления u_1 и u_2 могут быть представлены кусочно-постоянными функциями.
2. Выбор u_3 зависит от характера функции $k_{SP}(u_3)$. Если эта функция линейна, то характер управления u_3 аналогичен u_1 и u_2. В иной ситуации для определения структуры управлений требуется знание свойств функции $k_{SP}(u_3)$.
3. Функция Понтрягина имеет линейную зависимость от интенсивности вакцинаций $u_4, \ldots, u_{n+3}$, причём эти управления ограничены:

$$0 \leqslant u_i(t) \leqslant K, 4 \leqslant i \leqslant n + 3, \int_{t_0}^{T} \sum_{i=4}^{n+3} u_i(t) dt \leqslant B_4.$$

Таким образом, для определения интенсивности вакцинации в каждый момент времени требуется решение задачи линейного программирования. Если вакцина единственна или для каждого вида вакцины будет свой бюджет, то управления, связанные с вакцинацией, имеют кусочно-постоянный вид.

4. Вычислительный эксперимент

В работах [4; 5; 13] приведены результаты вычислительных экспериментов с моделью управления экономической системой без вакцинации. Параметры модели были оценены на основе статистических данных о COVID-19 за 2020 г. по Российской Федерации. Также в модели учитывается разрыв фазовых траекторий в случаях ввода и отмены ограничительных мер:

$$S(\tau_1+) = (1-a)S(\tau_1-), \quad P(\tau_1+) = P(\tau_1-) + aS(\tau_1-);$$
$$S(\tau_2+) = S(\tau_2-) + bP(\tau_2-), \quad P(\tau_2+) = (1-b)P(\tau_2-).$$

В данном исследовании для проведения вычислительного эксперимента часть оценок параметров, относящихся к социально-биологическим факторам, взята из работ [4; 5; 13]. Другая часть параметров была оценена на основе данных по Российской Федерации, относящихся к периоду с 5 декабря 2020 г., когда была начата массовая вакцинация против COVID-19 в России.

Так, основными применяемыми в это время в России были следующие вакцины: «Спутник V», «ЭпиВакКорона», «КовиВак», «Спутник Лайт». Таким образом, для вычислительного эксперимента было выбрано четыре вида вакцины. Параметры по данным видам вакцин были взяты из источников, находящихся в открытом доступе в интернете: interfax.ru, ria.ru, sputnikvaccine.com, pharmvestnik.ru, vector.nsc.ru, covivac.ru, id-clinic.ru, vedomosti.ru, rg.ru, medsi.ru. Для вакцины «Спутник V» стоимость одной дозы составила c_1 =1908,2 руб., время выработки иммунитета после вакцинации 21 день ($\widehat{\tau}_1 = 0,7$), время сохранения иммунитета у вакцинированных $\widetilde{\tau}_1$=24 мес., эффективность вакцины 91,6 Целевой показатель коллективного иммунитета для России был оценен как 60 %, т. е. $\nu = 0,6$.

Задача оптимального управления (2.1)–(2.15), (2.17), (3.2), (3.1) решалась при нескольких горизонтах планирования $T = 4, 6, 9$ и 12 мес. В функционале (3.2) параметры штрафа полагались: $\beta_1 = 1000$, $\beta_2 = 100$. Для каждого значения T функционал рассматривался при $\alpha_1 = 0,0$; $0,1$; $0,3$; $0,5$; $0,7$; $0,9$; $1,0$, соответственно, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Решение находилось методом параметризации [3] в классе кусочно-постоянных управлений $u_i(t)$ при $1 \leqslant i \leqslant 7$ и моментов τ_1, τ_2. Выбор такого класса управлений определяется значениями оцененных параметров модели ($k_{SP}(u_3)$ – линейная функция) выводами п. 3. На первом этапе задачи ОУ решались с одним моментом переключения в каждом управлении. На втором этапе при усложнении структуры управления до двух переключений улучшения решения не происходило. Нами проведен ряд экспериментов с различными начальными приближениями, наилучшие из них представлены в статье. При этом полученное приближение может отличаться от оптимального решения исходной задачи.

В отличие от модели без вакцинации [5; 13] в задаче (2.1)–(2.17) при всех рассматриваемых значениях T и весовых коэффициентах α_1, α_2 оптимальное управление u_2 нулевое, т. е. вложения в строительство больниц не требуется. Таким образом, процесс вакцинирования позволяет обойтись без капитальных вложений. Также при всех значениях весовых коэффициентов и горизонтах планирования начало ограничительных мер в оптимальном случае должно быть введено немедленно: $\tau_1 = 0$. Длительность ограничительных мер зависит от весовых коэффициентов функционала при краткосрочном планировании ($T = 4$, 6), при долгосрочном планировании ($T = 9$, 12) длительность практически постоянная.

В табл. 1 приведены значения параметров оптимального управления u_1, u_3, τ_2.

Таблица 1

Параметры оптимального управления для u_1, u_3, τ_2

Параметр		Вес экономического критерия α_1						
		1,0	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0,0
$T=4$	v_3	0	0	999	379	222	168	166
	t_3	0	0	$0,5$	$1,32$	$2,25$	$2,98$	$3,00$
	τ_2	$0,94$	$1,03$	$1,90$	$2,43$	$3,18$	$3,67$	$3,26$
$T=6$	v_3	0	0	211	181	181	181	181
	t_3	0	0	$2,37$	$2,76$	$2,75$	$2,76$	$2,76$
	τ_2	$3,0$	$3,0$	$3,74$	$4,5$	$5,1$	$5,57$	$6,0$
$T=9$	v_1	2634	2634	2634	2642	2659	2691	3452
	t_1	$1,13$	$1,13$	$1,13$	$1,13$	$1,13$	$1,13$	$0,96$
	v_3	105	105	105	103	101	96	60
	t_3	$1,65$	$1,65$	$1,65$	$1,63$	$1,59$	$1,52$	$0,91$
	τ_2	$2,87$	$2,87$	$2,87$	$2,87$	$2,87$	$2,87$	$2,87$
$T=12$	v_1	3268	3268	3282	3280	3307	3344	3797
	t_1	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$	$1,3$
	v_3	166	166	163	163	158	149	108
	t_3	$2,46$	$2,46$	$2,46$	$2,46$	$2,46$	$2,46$	$1,50$
	τ_2	$3,14$	$3,14$	$3,14$	$3,14$	$3,14$	$3,14$	$3,16$

Вложение в информационную кампанию u_3 и в переоборудование существующих койко-мест u_1 имеет вид ($i = 1,3$): $u_i(t) = v_i$, при $0 \leqslant t < t_i$; $u_i(t) = 0$, при $t_i \leqslant t \leqslant T$.

Если рассматривать переоборудование существующих койко-мест, то при коротком горизонте планирования ($T = 4; 6$) оптимальное управление u_1 нулевое при всех значениях α_1, за исключением $\alpha_1 = 0$. В последнем случае (полностью социальный критерий) проводится вложение в переоборудование на начальном коротком временном этапе, а затем вложение прекращается. Так, при $T = 4$: $u_1(t) = 2334$ млн руб. при $0 \leqslant t < 0,7$, $u_1(t) = 0$ при $0,7 \leqslant t \leqslant 4$. Аналогично при $T = 6$: $u_1(t) = 2853$ млн руб. при $0 \leqslant t < 0,7$, $u_1(t) = 0$ при $0,7 \leqslant t \leqslant 6$. При увеличении горизонта планирования вложение в переоборудование требуется при всех вариантах весовых коэффициентов.

Интенсивность вакцинирования i-й вакциной ($i = 1,2,3,4$) имеет следующую структуру управления:

$$u_{3+i}(t) = \begin{cases} v_{3+i,1}, & 0 \leqslant t < t_{3+i}; \\ v_{3+i,2}, & t_{3+i} \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

В табл. 2 и 3 приведены значения параметров оптимального управления вакцинации при $T = 4,6,9,12$.

Таблица 2

Параметры оптимального управления вакцинации при $T = 4; 6$

Параметр		Вес экономического критерия α_1						
		1,0	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0,0
$T = 4$	v_{41}	9053	9079	8897	9559	8480	8875	7296
	t_4	2,01	1,94	2,23	2,23	2,55	2,82	3,04
	v_{42}	0	0	0	0	0	0	0
	v_{51}	9795	10212	8343	7808	6590	6423	6054
	t_5	1,73	1,87	2,18	2,37	2,37	2,61	2,89
	v_{52}	0	0	0	0	0	0	0
	v_{61}	10624	9912	9813	10555	9568	9112	8630
	t_6	2,61	2,53	2,68	2,75	2,93	3,10	4,0
	v_{62}	0	0	0	0	0	0	0
	v_{71}	5754	5894	5541	5164	4915	4468	3856
	t_7	2,88	2,95	2,88	3,02	3,20	3,12	3,18
	v_{72}	0	0	0	0	0	0	0
$T = 6$	v_{41}	6148	6176	5607	5505	5513	5551	5498
	t_4	3,69	3,8	4,23	4,27	4,3	4,19	4,3
	v_{42}	0	0	0	0	0	449	1321
	v_{51}	5225	4881	4778	4561	4571	4572	4324
	t_5	2,94	2,62	2,94	2,94	3,08	2,89	2,71
	v_{52}	0	0	0	1844	1786	1869	1682
	v_{61}	7553	7711	7806	6898	6851	6847	6830
	t_6	4,25	4,36	4,36	4,44	4,43	4,33	4,43
	v_{62}	0	0	0	0	0	0	0
	v_{71}	3960	3783	3558	3096	3071	3170	3066
	t_7	2,77	2,99	2,77	2,79	2,75	2,86	2,8
	v_{72}	1657	1774	1506	1449	1447	1496	1396

Таблица 3

Параметры оптимального управления вакцинации при $T = 9; 12$.

Параметр		Вес экономического критерия α_1						
		1,0	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0,0
$T = 9$	v_{41}	5007	5007	5007	5007	5007	5007	4999
	t_4	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,48
	v_{42}	1351	1351	1351	1351	1351	1351	1352
	v_{51}	3885	3885	3885	3885	3885	3885	3886
	t_5	3,27	3,27	3,27	3,27	3,27	3,27	3,27
	v_{52}	1529	1529	1529	1529	1529	1529	1530
	v_{61}	6210	6210	6210	6210	6210	6210	6210
	t_6	4,03	4,03	4,03	4,03	4,03	4,03	4,03
	v_{62}	0	0	0	0	0	0	0
	v_{71}	2774	2774	2774	2774	2774	2774	2774
	t_7	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41
	v_{72}	1278	1278	1278	1278	1278	1278	1278
$T = 12$	v_{41}	5497	5497	5497	5497	5497	5497	5492
	t_4	3,74	3,74	3,74	3,74	3,74	3,74	3,74
	v_{42}	1158	1158	1158	1158	1158	1158	1155
	v_{51}	4075	4075	4075	4075	4075	4075	4074
	t_5	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99
	v_{52}	1388	1388	1388	1388	1388	1388	1388
	v_{61}	5423	5423	5423	5423	5423	5423	5408
	t_6	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,23
	v_{62}	0	0	0	0	0	0	0
	v_{71}	2908	2908	2908	2908	2908	2908	2891
	t_7	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,04	2,03
	v_{72}	1385	1385	1385	1385	1385	1385	1387

Исходя из результатов, представленных в табл. 2, 3, можно сделать ряд выводов.

При $T=4$ проводится вакцинирование всеми видами вакцин на начальном интервале планирования, к концу этого интервала суммарное количество вакцинированных и переболевших достигает показателя выше необходимого в 60%. В оставшееся время планирования вакцинирование не проводится. При $T=6; 9; 12$ выделяется два интервала: на начальном проводится вакцинирование всеми видами вакцин, на втором интервале для поддержки необходимой доли в 60 % происходит менее интенсивное вакцинирование некоторыми видами вакцин. При этом основная часть привитых приходится на вакцины «КовиВак», «Спутник Лайт». Стратегии вакцинирования при долгосрочном горизонте практически не зависят от весовых коэффициентов в функционале. В этом случае основная цель состоит в обеспечении условия (2.14).

5. Заключение

В работе предлагается модель управления экономической системой в условиях массового заболевания, включающая одновременно социально-биологические и экономические факторы, учитывающая фактор вакцинации. Полученная модель формулируется как задача оптимального управления с точечным запаздыванием в фазовых и управляющих переменных. Приведены результаты экспериментов со значениями параметров, оценных на основе данных, относящихся к периоду панедмии COVID-19 в России.

Список источников

1. Коллективный иммунитет, локдауны и COVID-19 // Всемирная организация здравоохранения. URL: https://www.who.int/ru/news-room/questions-and-answers/item/herd-immunity-lockdowns-and-covid-19 (дата обращения: 26.05.2024).
2. Горбунов В. К. Метод параметризации задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19, № 2. С. 292–303.
3. Лутошкин И. В. Динамические модели экономических систем и методы их анализа. Ульяновск : УлГУ, 2024. 188 с.
4. Лутошкин И. В., Рыбина М. С. Моделирование управления экономикой региона в условиях массовых заболеваний // Экономика региона. 2023. Т. 19, № 2. С. 299-313. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2023-2-1
5. Лутошкин И. В., Рыбина М. С. Оптимизация в модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 16–31. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.16
6. Эффективность вакцины в контролируемых и реальных условиях и уровень защиты // Всемирная организация здравоохранения. URL: https://www.who.int/ru/news-room/feature-stories/detail/vaccine-efficacy-effectiveness-and-protection (дата обращения: 01.03.2024)
7. Ali U., Bakshi A., Wani M. Dynamics of COVID-19: Modelling and Analysis // Journal of Infectious Diseases and Epidemiology. 2020. Vol. 6, Iss. 3. Art. 128. https://doi.org/10.23937/2474-3658/1510128
8. Simple models for containment of a pandemic / J. Arino, F. Brauer, P. van den Driessche, J. Watmough, J. Wu // J. R. Soc. Interface. 2006. Vol. 3 (8), P. 453–457. https://doi.org/10.1098/rsif.2006.0112
9. Atkeson A. What will be the economic impact of Covid-19 in the US? Rough estimates of disease scenarios // NBER Working Papers. 2020. URL: https://www.nber.org/system/files/working_papers/w26867/w26867.pdf (дата обращения: 29.05.2021).
10. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical models in population biology and epidemiology. Vol. 40. New York : Springer, 2012. 508 p.
11. Gomez M. C., Rubio F. A., Mondragon E. I. Qualitative analysis of generalized multistage epidemic model with immigration // Mathematical Biosciences and Engineering. 2023. Vol. 20, Iss. 9. pp. 15765-15780. https://doi.org/10.3934/mbe.2023702

12. Luebben G., Gonzalez-Parra G., Cervantes B. Study of optimal vaccination strategies for early COVID-19 pandemic using an age-structured mathematical model: A case study of the USA // Mathematical Biosciences and Engineering. 2023. Vol. 20, Iss. 6. P. 10828-10865. https://doi.org/10.3934/mbe.2023481
13. Lutoshkin I. V., Rybina M. S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease. Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023. Vol. 23, N 2. P. 264-273. EDN: BTQTSM https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273
14. Modeling epidemics: A primer and Numerus Model Builder implementation / W. M. Getz [et al.] // Epidemics. 2018. Vol. 25. P. 9–19. https://doi.org/10.1016/j.epidem.2018.06.001
15. Safety and efficacy of an rAd26 and rAd5 vector-based heterologous prime-boost COVID-19 vaccine: an interim analysis of a randomised controlled phase 3 trial in Russia / D. Y. Logunov [et al.] // The Lancet. 2021. Vol. 397, N 10275. P. 671–681. https://doi.org/10.1016/S0140-6736(21)00234-8

References

1. Kollektivnyj immunitet, lokdauny i COVID-19[Herd immunity, lockdowns and COVID-19.]. *World Health Organization*. Available at: https://www.who.int/ru/news-room/questions-and-answers/item/herd-immunity-lockdowns-and-covid-19 (accessed 26.05.2024). (in Russian)
2. Gorbunov V.K. Parameterization method for optimal control problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 2, pp. 292–303 (in Russian).
3. Lutoshkin I.V. *Dinamicheskie modeli jekonomicheskih sistem i metody ih analiza*[Dynamic models of economic systems and methods of their analysis]. Ulyanovsk, Ulyanovsk St. Univ. Publ., 2024, 188 p. (in Russian)
4. Lutoshkin I.V., Rybina M.S. Modelling of Regional Economic Management in Conditions of Mass Diseases.*Economy of regions*, 2023, vol. 19, no. 2, pp. 299–313. https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2023-2-1 (in Russian)
5. Lutoshkin I.V., Rybina M.S. Optimization in the Model of Control over a Socio-economic System in Conditions of a Mass Disease. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 16–31. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.16 (in Russian)
6. Jeffektivnost' vakciny v kontroliruemyh i realnyh uslovijah i uroven zashhity [Vaccine effectiveness in controlled and real-world conditions and level of protection]. *World Health Organization*. Available at: https://www.who.int/ru/news-room/feature-stories/detail/vaccine-efficacy-effectiveness-and-protection (accessed 1.03.2024). (in Russian)
7. Ali U., Bakshi A., Wani M. Dynamics of COVID-19: Modelling and Analysis. *Journal of Infectious Diseases and Epidemiology*, 2020, vol. 6, iss. 3, art. 128. https://doi.org/10.23937/2474-3658/1510128
8. Arino J., Brauer F., van den Driessche P., Watmough J., Wu J. Simple models for containment of a pandemic. *J. R. Soc. Interface*, 2006, vol. 3 (8), pp. 453–457. https://doi.org/10.1098/rsif.2006.0112
9. Atkeson A. What will be the economic impact of Covid-19 in the US? Rough estimates of disease scenarios. *NBER Working Papers*. 2020 Available at: https://www.nber.org/system/files/working_papers/w26867/w26867.pdf (date of access: 29.05.2021).
10. Brauer F., Castillo-Chavez C. *Mathematical models in population biology and epidemiology, vol. 40*. New York, Springer, 2012, 508 p.

11. Gomez M.C., Rubio F.A., Mondragon E.I. Qualitative analysis of generalized multistage epidemic model with immigration. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, vol. 20, iss. 9, pp. 15765–15780. https://doi.org/10.3934/mbe.2023702
12. Luebben G., Gonzalez-Parra G., Cervantes B. Study of optimal vaccination strategies for early COVID-19 pandemic using an age-structured mathematical model: A case study of the USA. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, vol. 20, iss. 6, pp. 10828–10865. https://doi.org/10.3934/mbe.2023481
13. Lutoshkin I.V., Rybina M.S. Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, no. 2, pp. 264–273. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273
14. Getz W.M., Salter R., Muellerklein O. et al. Modeling epidemics: A primer and Numerus Model Builder implementation. *Epidemics*, 2018, vol. 25, pp. 9–19. https://doi.org/10.1016/j.epidem.2018.06.001
15. Logunov D.Y. et al. Safety and efficacy of an rAd26 and rAd5 vector-based heterologous prime-boost COVID-19 vaccine: an interim analysis of a randomised controlled phase 3 trial in Russia. *The Lancet*, 2021, vol. 397, no. 10275, pp. 671–681. https://doi.org/10.1016/S0140-6736(21)00234-8

Об авторах

Лутошкин Игорь Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц., Ульяновский государственный университет, Ульяновск, 432017, Российская Федерация, lutoshkiniv@ulsu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4108-7646

Рыбина Мария Сергеевна, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, 432017, Российская Федерация, rybina_maria@icloud.com, https://orcid.org/0009-0002-4049-751X

About the authors

Igor V. Lutoshkin, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 43017, Russian Federation, lutoshkiniv@ulsu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4108-7646

Maria S. Rybina, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation, rybina_maria@icloud.com, https://orcid.org/0009-0002-4049-751X

Поступила в редакцию / Received 05.02.2025
Поступила после рецензирования / Revised 20.03.2025
Принята к публикации / Accepted 15.04.2025