

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL



Серия «Математика»

2025. Т. 54. С. 3–17

Онлайн-доступ к журналу:

<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.97

MSC 34K20

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.3>

Метод декомпозиции при нахождении субоптимальных импульсных управлений электрических приводов манипуляционных роботов

Ю. Ф. Долгий^{1,2}, А. Н. Сесекин^{1,2✉}

¹ Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация

² Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Российская Федерация

✉ sesekin@list.ru

Аннотация: Моделирование движений манипуляционного робота с большим числом степеней свободы приводит к сложным нелинейным управляемым системам дифференциальных уравнений большой размерности. Методы декомпозиции позволяют разделить движения и перейти к управляемым системам малой размерности. Показывается, что при разделении обобщенных координат для манипуляционного робота с электромеханическими приводами используется процедура замораживания связей. Она позволяет исходную задачу управления движениями манипуляционного робота заменить последовательностью простых задач управления системами с одной степенью свободы. Решения этих задач ищутся в классе импульсных управлений. При их нахождении ищутся траектории прямых путей принципа наименьшего действия Гамильтона неуправляемой системы. Импульсное управление в начальный момент времени переводит движение на траекторию прямого пути, а в конечный момент гасит его скорость. Заданное ограничение на энергию импульсного управления позволяет найти субоптимальное по времени движения управление.

Ключевые слова: декомпозиция, импульсные управления, манипулятор, электро-механический привод

Ссылка для цитирования: Долгий Ю. Ф. Сесекин А. Н. Метод декомпозиции при нахождении субоптимальных импульсных управлений электрических приводов манипуляционных роботов // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 54. С. 3–17.
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.3>

Research article

Decomposition Method for Finding Suboptimal Impulse Controls of Electric Drives of Manipulation Robots

Yurii F. Dolgii^{1,2}, Alexander N. Seseikin^{1,2}✉

¹ Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

² Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation

✉ seseikin@list.ru

Abstract: Modeling the motion of a manipulation robot with a large number of degrees of freedom leads to complex nonlinear control systems of high-dimensional differential equations. Decomposition methods allow us to separate the motions and move on to low-dimensional control systems. In this paper, a constraint freezing procedure is used to separate generalized coordinates for a manipulation robot with electromechanical drives. This procedure allows us to replace the original problem of controlling the movements of a manipulation robot with a sequence of simple control problems for systems with a single degree of freedom. Solutions to these problems are sought in the class of impulse controls. Their determination involves searching for trajectories of straight paths according to Hamilton's principle of least action for an uncontrolled system. At the initial instant, impulse control transfers motion to a straight path trajectory and dampens its velocity at the final instant. A specified constraint on the energy of impulse control allows us to find a suboptimal control with respect to motion time.

Keywords: decomposition, impulse control, manipulator, electromechanical drive

For citation: Dolgii Yu. F., Seseikin A. N. Decomposition Method for Finding Suboptimal Impulse Controls of Electric Drives of Manipulation Robots. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 54, pp. 3–17. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.3>

1. Введение

Математические модели манипуляционных роботов с большим числом степеней свободы описываются сложными системами дифференциальных уравнений больших размерностей [1; 2]. Методы декомпозиции применяют при решении сложных задач управления для манипуляционных роботов, описываемых системами дифференциальных уравнений большой размерности. Е. С. Пятницкий предложил использовать спе-

циальные управления по принципу обратной связи, которые после переходных процессов приводят систему к простейшей форме стандартных одномерных линейных дифференциальных уравнений, для которых используются известные управления принципа максимума Понтрягина [3; 4]. При разделении движений в методе декомпозиции Ф. Л. Черноусько при нахождении субоптимальных управлений использует решение игровой задачи на быстродействие [5; 6]. Предложенный им метод получил развитие в работе С. А. Решмина [7]. В настоящей работе при разделении обобщенных координат для манипуляционного робота с электромеханическими приводами используется процедура замораживания связей. Для системы с одной степенью свободы решается вспомогательная задача нахождения программного управления, которое переводит систему из заданного начального положения равновесия в заданное конечное положение равновесия. При определении импульсного управления используются прямые пути неуправляемой системы. Предложена конструктивная процедура построения субоптимального по времени импульсного управления при заданном ограничении на его энергию.

2. Постановка задачи

Манипуляционный робот с n степенями свободы состоит из звеньев (абсолютно твердых тел), соединенных цилиндрическими шарнирами. В качестве обобщенных координат выбираются относительные углы поворотов звеньев $q_1, \dots, q_n$. Обобщенные силы состоят из управляющих моментов $M_1, \dots, M_n$ и слагаемых, включающих все остальные внешние и внутренние силы $Q_1, \dots, Q_n$, определяемые заданными непрерывными функциями $Q_i(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $i = \overline{1, n}$, времени t , обобщенных координат $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^\top$ и обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^\top$. Каждый управляющий момент создается отдельным электродвигателем постоянного тока. Управляющим воздействием является электрическое напряжение u_i , подаваемое на обмотку ротора i -го электродвигателя. Используя баланс напряжений в цепи ротора и момент, создаваемый электродвигателем, запишем уравнения

$$L_i \frac{dj_i}{dt} + R_i j_i + k_i^E n_i \dot{q}_i = u_i, \quad M_i = n_i (k_i^M j_i - n_i b_i \dot{q}_i).$$

Здесь j_i — сила тока в цепи ротора i -го электродвигателя, L_i — коэффициент индуктивности, R_i — электрическое сопротивление, n_i — передаточное число i -го редуктора, k_i^E , k_i^M , b_i — постоянные положительные коэффициенты, $i = \overline{1, n}$. Обычно индуктивность мала и можно явно найти силовые моменты, создаваемые электродвигателями:

$$M_i = \alpha_i u_i - \beta_i \dot{q}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

где $\alpha_i = n_i k_i^M R_i^{-1}$, $\beta_i = n_i^2(b_i + k_i^M k_i^E R_i^{-1})$.

При нахождении кинетических энергий двигателей учитываем только энергии их роторов. Тогда кинетическая энергия робота складывается из кинетической энергии движения системы звеньев $T^1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и кинетических энергий движений роторов электродвигателей $T_i^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $i = \overline{1, n}$ [8]. Кинетическую энергию движения системы звеньев определим формулой

$$T^1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^1(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где $a_{ij}^1(\mathbf{q})$, $i, j = \overline{1, n}$, — известные непрерывные функции и матрица $A^1(\mathbf{q}) = \left(a_{ij}^1(\mathbf{q}) \right)_{i,j=1}^n$ является положительно определенной. Роторы электродвигателей являются симметричными телами, оси симметрии которых совпадают с осями цилиндрических шарниров, а их центры масс — с центрами цилиндрических шарниров. Они вращаются вокруг своих осей симметрии с угловыми скоростями $n_i \dot{q}_i$, $i = \overline{1, n}$. Кинетические энергии роторов определяются формулами

$$T_i^1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left(m_i v_i^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + J_i (n_i \dot{q}_i + \omega_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))^2 + J'_i \omega_i'^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right),$$

где m_i — масса ротора, J_i — момент инерции ротора относительно его оси симметрии, J'_i — момент инерции ротора относительно оси перпендикулярной его оси симметрии, $\mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — линейная скорость центра масс ротора, $\omega_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — проекция угловой скорости статора на ось симметрии ротора, $\omega_i'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — проекция угловой скорости статора на ось перпендикулярную оси симметрии ротора, $\mathbf{v}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j$, $\omega_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j$, $\omega_i'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^n b'_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j$, $\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{q})$, $b_{ij}(\mathbf{q})$, $b'_{ij}(\mathbf{q})$, $j = \overline{1, n}$, — известные непрерывные функции, $i = \overline{1, n}$. Суммарная кинетическая энергия роторов определится формулой

$$T^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i=1}^n T_i^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

где $a_{ij}^2(\mathbf{q})$, $i, j = \overline{1, n}$, — известные непрерывные функции и матрица $A^2(\mathbf{q}) = \left(a_{ij}^2(\mathbf{q}) \right)_{i,j=1}^n$ является положительно определенной. В результате кинетическая энергия манипуляционного робота определяется формулой

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = T^1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T^2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

где $a_{ij}(\mathbf{q}) = a_{ij}^1(\mathbf{q}) + a_{ij}^2(\mathbf{q})$, $i, j = \overline{1, n}$, — известные непрерывные функции и матрица $A(\mathbf{q}) = \left(a_{ij}(\mathbf{q}) \right)_{i,j=1}^n$ является положительно определенной.

Для описания динамики движений электромеханической системы используем уравнения Лагранжа

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_j\dot{q}_k + \beta_i\dot{q}_i - Q_i(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \alpha_i u_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

где символы Кристоффеля определяются формулами

$$\Gamma_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right), \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Требуется найти программные управления $u_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $0 \leq t \leq \tau$ и движения манипуляционного робота $q_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $0 \leq t \leq \tau$, переводящие его из заданного начального положения равновесия $q_i(0) = q_i^0$, $i = \overline{1, n}$, в заданное конечное положение равновесия $q_i(\tau) = q_i^\tau$, $i = \overline{1, n}$, а также время такого перехода τ .

3. Метод декомпозиции

В настоящей работе в основе метода декомпозиции лежит процедура замораживания связей. Она позволяет в управляемой математической модели манипуляционного робота провести разделение обобщенных координат. При этом общая задача управления манипуляционным роботом заменяется серией простых задач управления для каждой отдельной обобщенной координаты. Каждой серии отвечает упорядоченный набор простых поворотов, т. е. упорядоченный набор обобщенных координат $q_{n_1}, \dots, q_{n_n}$. Число различных серий равняется $n!$. Выбранная серия распадается на n простых поворотов, в которых все координаты, кроме одной, не меняются во время движения. Следовательно, в процедуре реализации серии движений последовательно изменяется конфигурация манипуляционного робота. До начала движения положения звеньев определяются формулами $q_{n_k} = q_{n_k}^0$, $1 \leq k \leq n$, и замораживаются связи, т. е. повороты вокруг всех цилиндрических шарниров запрещаются. В начале первого интервала движения разрешается поворот только относительно цилиндрического шарнира, который отвечает за изменение обобщенной координаты q_{n_1} , а остальные связи остаются замороженными. В конце первого интервала запрещается поворот относительно этого шарнира. На следующих интервалах движения последовательно разрешаются повороты относительно других цилиндрических шарниров, а именно при изменении координаты q_{n_m} , $1 \leq m \leq n$, должны выполняться следующие условия: $q_{n_m}(t)$, $\tau_{n_{m-1}} \leq t \leq \tau_{n_m}$, — непрерывная функция на отрезке $[\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}]$ и дважды непрерывно дифференцируемая на интервале $(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m})$, $q_{n_m}(\tau_{n_{m-1}}) = q_{n_m}^0$, $q_{n_m}(\tau_{n_m}) = q_{n_m}^\tau$; $q_{n_k}(t) = q_{n_k}^\tau$, $\tau_{n_{m-1}} \leq t \leq \tau_{n_m}$, при $1 \leq k < m$, $m \geq 2$;

$q_{n_k}(t) = q_{n_k}^0$, $\tau_{n_{m-1}} \leq t \leq \tau_{n_m}$, при $n \geq k > m$, $m \leq n-1$; $\tau_{n_{k-1}} < \tau_{n_k}$, $1 \leq k \leq n$, $\tau_{n_0} = 0$, $\tau_{n_n} = \tau$. Предложенный метод декомпозиции позволяет манипуляционному роботу перейти из начального положения равновесия в конечное последовательно по отдельным обобщенным координатам. Он требует конструктивной реализации процедуры замораживания связей.

На интервалах $(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m})$, $1 \leq m \leq n$, введем вспомогательные векторные дважды непрерывно дифференцируемые функции $\mathbf{q}_{n_m}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^T$, где $q_i(t) = q_{n_m}(t)$ при $i = n_m$, $q_i(t) = q_{n_k}(\tau)$ при $i = n_k$, $1 \leq k < m$, $m \geq 2$, $q_i(t) = q_{n_k}(0)$ при $i = n_k$, $n \geq k > m$ и $m \leq n-1$. Для рассматриваемых движений простых поворотов на интервалах $(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m})$, $1 \leq m \leq n$, уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} a_{n_k n_m}(\mathbf{q}_{n_m}(t)) \ddot{q}_{n_m}(t) + \left(\frac{\partial a_{n_k n_m}(\mathbf{q})}{\partial q_{n_m}} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{n_m n_m}(\mathbf{q})}{\partial q_{n_k}} \right) |_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n_m}(t)} \dot{q}_{n_m}^2(t) \\ - Q_{n_k}(t, \mathbf{q}_{n_m}(t), \dot{\mathbf{q}}_{n_m}(t)) = \alpha_{n_k} \tilde{u}_{n_k}(t), \quad n_k \neq n_m, \\ a_{n_m n_m}(\mathbf{q}_{n_m}(t)) \ddot{q}_{n_m}(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{n_m n_m}(\mathbf{q})}{\partial q_{n_m}} |_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n_m}(t)} \dot{q}_{n_m}^2(t) + \beta_{n_m} \dot{q}_{n_m}(t) \\ - Q_{n_m}(t, \mathbf{q}_{n_m}(t), \dot{\mathbf{q}}_{n_m}(t)) = \alpha_{n_m} u_{n_m}(t). \end{aligned}$$

Основным является последнее уравнение из системы уравнений Лагранжа. Первые уравнения системы определяют реакции замороженных связей $\tilde{u}_{n_k}(t)$, $t \in (\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m})$, $n_k \neq n_m$ и непосредственно к задаче управления роботом отношения не имеют. Они могут быть использованы при оценке прочностных свойств конструкции робота. Задача управления в предлагаемом методе декомпозиции формулируется следующим образом. Для каждого управляемого дифференциального уравнения выбранной серии

$$\begin{aligned} a_{n_m n_m}(\mathbf{q}_{n_m}) \ddot{q}_{n_m} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{n_m n_m}(\mathbf{q})}{\partial q_{n_m}} |_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n_m}} \dot{q}_{n_m}^2 + \beta_{n_m} \dot{q}_{n_m} \\ - Q_{n_m}(t, \mathbf{q}_{n_m}, \dot{\mathbf{q}}_{n_m}) = \alpha_{n_m} u_{n_m} \end{aligned} \quad (3.1)$$

требуется найти программное управление $u_{n_m}(t)$, $\tau_{n_{m-1}} \leq t \leq \tau_{n_m}$, и решение дифференциального уравнения (3.1) $q_{n_m}(t)$, $\tau_{n_{m-1}} \leq t \leq \tau_{n_m}$, переводящее его из начального положения равновесия $q_{n_m}(\tau_{n_{m-1}}) = q_{n_m}^0$ в конечное положение равновесия $q_{n_m}(\tau_{n_m}) = q_{n_m}^\tau$, а также время такого перехода $\tau_{n_m} - \tau_{n_{m-1}}$, $1 \leq m \leq n$. Здесь используются следующие обозначения: $\mathbf{q}_{n_m} = (q_1, \dots, q_n)^T$, где $q_i = q_{n_m}$ при $i = n_m$, $q_i = q_{n_k}(\tau)$ при $i = n_k$, $1 \leq k < m$, $m \geq 2$, $q_i = q_{n_k}(0)$ при $i = n_k$, $n \geq k > m$, $m \leq n-1$; $\dot{\mathbf{q}}_{n_m} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^T$, где $\dot{q}_i = \dot{q}_{n_m}$ при $i = n_m$, $\dot{q}_i = 0$ при $i = n_k$, $1 \leq k < m$, $m \geq 2$, $\dot{q}_i = 0$ при $i = n_k$, $n \geq k > m$, $m \leq n-1$.

Для существования единственного решения поставленной задачи на управления требуется накладывать дополнительные ограничения. При этом полученное решение будет зависеть от выбора серии простых поворотов $q_{n_1}, \dots, q_{n_n}$.

4. Субоптимальные импульсные управления

В классической механике расширение пространства обобщенных координат, связанное с ведением дополнительной временной координаты, называется расширенным координатным пространством. В последнем пространстве движение механической системы изображается некоторой кривой. Фиксируем начальный $t = 0$ и конечный $t = \tau$ моменты времени, а также начальные $q_i(0) = q_i^0$, $i = \overline{1, n}$, и конечные $q_i(\tau) = q_i^\tau$, $i = \overline{1, n}$, положения механической системы. Возможные движения, переводящие систему из начального положения в конечное, определяют кривые в расширенном координатном пространстве или пути, соединяющие в этом пространстве начальную и конечную точки. Прямой путь определяется движением механической системы с выбранными силовыми воздействиями. Остальные пути называются окольными. Вариационный принцип Гамильтона позволяет в множестве окольных путей выбрать прямой путь. Для нахождения прямого пути можно также использовать решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений. В случае неуправляемого простого поворота манипуляционного робота траектория его перехода из начального положения в конечное положение определяется решением $\tilde{q}_{n_m}(t, \tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m})$, $t \in [\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}]$, двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения

$$a_{n_m n_m}(\mathbf{q}_{n_m}) \ddot{q}_{n_m} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{n_m n_m}(\mathbf{q})}{\partial q_{n_m}} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n_m}} \dot{q}_{n_m}^2 + \beta_{n_m} \dot{q}_{n_m} - Q_{n_m}(t, \mathbf{q}_{n_m}, \dot{\mathbf{q}}_{n_m}) = 0, \quad q_{n_m}(\tau_{n_{m-1}}) = q_{n_m}^0, \quad q_{n_m}(\tau_{n_m}) = q_{n_m}^\tau. \quad (4.1)$$

Воспользуемся этим решением при нахождении программного управления. Так как начальные и конечные положения являются положениями равновесия, то при использовании прямого пути необходимо в начальный момент разогнать манипулятор из положения равновесия и перейти на траекторию прямого пути, а в конечный момент его затормозить и прийти в положение равновесия с нулевой обобщенной скоростью. Для этой цели используем следующие программные импульсные управления:

$$u_{n_m}(t) = S_{n_m}^0 \delta(t - \tau_{n_{m-1}}) + S_{n_m}^\tau \delta(t - \tau_{n_m}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad m = \overline{1, n}, \quad (4.2)$$

где $\delta(\cdot)$ — функция Дирака. Используя дифференциальное уравнение (3.1), формулу (4.2), решение краевой задачи (4.1) и свойства функции Дирака, находим

$$S_{n_m}^0(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) = \frac{1}{2} a_{n_m n_m} (q_{n_m}^0) \dot{\tilde{q}}_{n_m}^2 (\tau_{n_{m-1}} + 0, \tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}), \quad (4.3)$$

$$S_{n_m}^\tau(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) = \frac{1}{2} a_{n_m n_m} (q_{n_m}^\tau) \dot{\tilde{q}}_{n_m}^2 (\tau_{n_m} - 0, \tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}), \quad m = \overline{1, n}.$$

Для определения положительных параметров τ_{n_m} , $m = \overline{1, n}$, необходимо наложить дополнительные ограничения на энергию импульсных управлений. Находим при простом повороте манипулятора работу импульсных сил при его переходе в начальный момент на траекторию прямого пути и работу импульсных сил при его торможении в конечном положении равновесия

$$A_{n_m}^0(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) = \frac{1}{2} S_{n_m}^0(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) \dot{\tilde{q}}_{n_m}(\tau_{n_{m-1}} + 0, \tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}),$$

$$A_{n_m}^\tau(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) = \frac{1}{2} S_{n_m}^\tau(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) \dot{\tilde{q}}_{n_m}(\tau_{n_m} - 0, \tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}), \quad m = \overline{1, n}.$$

Используя формулы (4.3), имеем

$$A_{n_m}^0(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) = \frac{1}{4} a_{n_m n_m} (q_{n_m}^0) \dot{\tilde{q}}_{n_m}^3 (\tau_{n_{m-1}} + 0, \tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}), \quad (4.4)$$

$$A_{n_m}^\tau(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) = \frac{1}{4} a_{n_m n_m} (q_{n_m}^\tau) \dot{\tilde{q}}_{n_m}^3 (\tau_{n_m} - 0, \tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}), \quad m = \overline{1, n}.$$

В результате работа импульсных сил при простом повороте манипулятора равняется $A_{n_m}(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) = A_{n_m}^0(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) + A_{n_m}^\tau(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m})$, $m = \overline{1, n}$.

Будем оптимизировать время простого поворота $\tau_{n_m} - \tau_{n_{m-1}}$ манипулятора при заданном ограничении на энергию импульсных сил $A_{n_m}(\tau_{n_{m-1}}, \tau_{n_m}) \leq \nu$, $m = \overline{1, n}$. Решения соответствующих задач условной оптимизации $\tau_{n_m}^0$, $m = \overline{1, n}$, определяют субоптимальные импульсные управления

$$u_{n_m}^0(t) = S_{n_m}^0(\tau_{n_{m-1}}^0, \tau_{n_m}^0) \delta(t - \tau_{n_{m-1}}^0) + S_{n_m}^\tau(\tau_{n_{m-1}}^0, \tau_{n_m}^0) \delta(t - \tau_{n_m}^0),$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad m = \overline{1, n}.$$

5. Электромеханический двухзвенный манипулятор

Рассмотрим электромеханический манипуляционный робот с двухзвенной рукой, совершающий плоскопараллельные движения в горизонтальной плоскости [10]. Манипулятор состоит из неподвижного основания, руки, имеющей два абсолютно твердых звена G_1 , G_2 , и двух

приводов D_1 , D_2 . Звено G_1 связано с основанием и звеном G_2 идеальными цилиндрическими шарнирами. Оси обоих шарниров направлены вертикально. Каждый из приводов состоит из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением и редуктора. Привод D_1 управляет поворотом руки относительно основания. Статор двигателя и корпус редуктора этого привода закреплены на неподвижном основании. Привод D_2 управляет поворотом звена G_2 относительно звена G_1 . Ось вращения ротора электродвигателя привода D_2 проходит через центр инерции ротора и совпадает с осью шарнира, соединяющего звенья руки манипулятора. Инерция подвижных частей редукторов не учитывается. Заметим, что задача импульсного оптимального управления без учета электромеханического привода также рассматривалась в [11].

В качестве обобщенных координат примем угол q_1 поворота звена G_1 относительно основания и угол q_2 поворота звена G_2 относительно звена G_1 .

Кинетическая энергия описанной электромеханической системы равна сумме кинетических энергий двух звеньев G_1 , G_2 и двух приводов D_1 , D_2 . Выражения для кинетических энергий T_1 , T_2 звеньев G_1 , G_2 имеют следующий вид:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (I_2 + \mu a^2 + 2\mu a L \cos(q_2)) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 + (I_2 + \mu a L \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Здесь a — расстояние между осями шарниров манипуляторов, L — расстояние от оси шарнира, соединяющего звенья, до центра масс звена G_2 , μ — масса звена G_2 руки, I_1 — момент инерции звена G_1 (вместе с неподвижными частями привода D_2) относительно оси шарнира, соединяющего звено G_1 с основанием, I_2 — момент инерции звена G_2 (вместе с неподвижными частями привода D_2) относительно оси шарнира, соединяющего звенья руки. Выражения для кинетических энергий T_3 , T_4 приводов D_1 , D_2 имеют следующий вид:

$$T_3 = \frac{1}{2} J_1 n_1^2 \dot{q}_1^2,$$

$$T_4 = \frac{1}{2} (J_2 + \mu_2 a^2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 n_2^2 \dot{q}_2^2 + J_2 n_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2.$$

Здесь μ_2 — масса ротора электродвигателя привода D_2 , J_1 , J_2 — моменты инерции роторов электродвигателей приводов D_1 , D_2 соответственно относительно осей их вращения, n_1 , n_2 — передаточные числа редукторов приводов D_1 , D_2 соответственно. Полная кинетическая энергия манипуляционного робота T равна

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} + 2\mu a L \cos(q_2)) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} A_{22} \dot{q}_2^2$$

$$+ (A_{12} + \mu a L \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

где $A_{11} = I_1 + I_2 + J_1 n_1^2 + J_2 + (\mu + \mu_2) a^2$, $A_{12} = I_2 + J_2 n_2$, $A_{22} = I_2 + J_2 n_2^2$.

Обобщенные силы в нашем случае состоят только из управляющих моментов M_1 , M_2 . Если пренебречь индуктивностью, то они будут определяться формулами (2.1). В результате уравнения Лагранжа примут вид

$$\begin{aligned} (A_{11} + 2\mu a L \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + (A_{12} + \mu a L \cos(q_2)) \ddot{q}_2 - 2\mu a L \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ - \mu a L \sin(q_2) \dot{q}_2^2 = \frac{n_1 k_1^M}{R_1} (u_1 - n_1 k_1^E \dot{q}_1), \\ (A_{12} + \mu a L \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + A_{22} \ddot{q}_2 + \mu a L \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ = \frac{n_2 k_2^M}{R_2} (u_2 - n_2 k_2^E \dot{q}_2). \end{aligned}$$

Общая задача управления манипуляционным роботом может быть заменена двумя сериями простых задач управления с упорядоченными наборами обобщенных координат q_1, q_2 или q_2, q_1 . Рассмотрим первую серию двух простых поворотов q_1, q_2 .

При первом повороте $q_2(t) = q_2^0$, $0 \leq t \leq \tau_1$, и уравнение (3.1) принимает вид

$$\ddot{q}_1 + \alpha_{11} \dot{q}_1 = \beta_{11} u_1, \quad (5.1)$$

где $\alpha_{11} = \frac{n_1^2 k_1^M k_1^E}{R_1 (A_{11} + 2\mu a L \cos(q_2^0))}$, $\beta_{11} = \frac{n_1 k_1^M}{R_1 (A_{11} + 2\mu a L \cos(q_2^0))}$. Требуется найти программное управление $u_1(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, и решение дифференциального уравнения (5.1) $q_1(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, переводящее манипулятор из начального положения равновесия $q_1(0) = q_1^0$ в конечное положение равновесия $q_1(\tau_1) = q_1^\tau$, а также время такого перехода τ_1 .

Краевая задача (4.1) имеет вид

$$\ddot{q}_1 + \alpha_{11} \dot{q}_1 = 0, \quad q_1(0) = q_1^0, \quad q_1(\tau_1) = q_1^\tau. \quad (5.2)$$

Ее решение определяется формулой

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(t, \tau_1) = \frac{1}{\exp(-\alpha_{11} \tau_1) - 1} \Big(\exp(-\alpha_{11} \tau_1) q_1^0 - q_1^\tau + \\ + (q_1^\tau - q_1^0) \exp(-\alpha_{11} t) \Big), \quad 0 \leq t \leq \tau_1. \end{aligned}$$

Импульсное программное управление определяется следующим образом:

$$u_1(t, \tau_1) = S_1^0(\tau_1) \delta(t) + S_1^\tau(\tau_1) \delta(t - \tau_1), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Используя формулы (4.3), находим

$$S_1^0(\tau_1) = -\frac{\alpha_{11} (q_1^\tau - q_1^0)}{\beta_{11} (\exp(-\alpha_{11} \tau_1) - 1)}, \quad S_1^\tau(\tau_1) = -S_1^0(\tau_1) \exp(-\alpha_{11} \tau_1). \quad (5.4)$$

Используя формулы (4.4) при первом простом повороте манипулятора, находим работу импульсных сил при его переходе в начальный момент на траекторию прямого пути и работу импульсных сил при его торможении в конечном положении равновесия

$$A_1^0(\tau_1) = \frac{\alpha_{11}^2 (q_1^\tau - q_1^0)^2}{2\beta_{11}(\exp(-\alpha_{11}\tau_1) - 1)^2},$$

$$A_1^\tau(\tau_1) = A_1^0(\tau_1)\exp(-2\alpha_{11}\tau_1),$$

находим также работу всех импульсных сил при первом простом повороте

$$A_1(\tau_1) = A_1^0(\tau_1) (1 + \exp(-2\alpha_{11}\tau_1)).$$

Будем оптимизировать время простого поворота манипулятора при заданном ограничении на энергию импульсных сил, т.е. находить $\min \tau_1$ при $A_1(\tau_1) \leq \nu$. Функция $A_1(\tau_1)$, $0 < \tau_1 < +\infty$, монотонно убывает и $A_1(+\infty) = \frac{\alpha_{11}^2 (q_1^\tau - q_1^0)^2}{2\beta_{11}} = \gamma_1$. Поэтому требуется выполнение условия

$$\frac{\alpha_{11}^2 (q_1^\tau - q_1^0)^2}{2\beta_{11}} < \nu.$$

При выполнении последнего условия находим оптимальное значение параметра

$$\tau_1^0 = -\frac{1}{\alpha_{11}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - \gamma_1/\nu)^2}}{1 - \gamma_1/\nu}.$$

Учитывая (5.3), получим следующую формулу для первого субоптимального управления

$$u_1^0(t) = S_1^0(\tau_1^0)\delta(t) + S_1^\tau(\tau_1^0)\delta(t - \tau_1^0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

При втором повороте $q_1(t) = q_1^\tau$, $\tau_1^0 \leq t \leq \tau$, и уравнение (3.1) принимает вид

$$\ddot{q}_2 + \alpha_{22}\dot{q}_2 = \beta_{22}u_2, \quad (5.5)$$

где $\alpha_{22} = \frac{n_2^2 k_2^M k_2^E}{R_2 A_{22}}$, $\beta_{22} = \frac{n_2 k_2^M}{R_2 A_{22}}$. Требуется найти программное управление $u_2(t)$, $\tau_1^0 \leq t \leq \tau$, решение дифференциального уравнения (5.5) и время перехода $\tau - \tau_1^0$ манипулятора из начального положения равновесия $q_2(\tau_2^0) = q_2^0$ в конечное положение равновесия $q_2(\tau) = q_2^\tau$.

Импульсное программное управление определяется формулой

$$u_2(t, \tau_1^0, \tau) = S_2^0(\tau_1^0, \tau)\delta(t - \tau_1^0) + S_2^\tau(\tau_1^0, \tau)\delta(t - \tau), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.6)$$

где

$$S_2^0(\tau_1^0, \tau) = -\frac{\alpha_{22} (q_2^\tau - q_2^0)}{\beta_{22}(\exp(-\alpha_{22}(\tau - \tau_1^0)) - 1)},$$

$$S_2^\tau(\tau_1^0, \tau) = -S_2^0(\tau_1^0, \tau) \exp(-\alpha_{22}(\tau - \tau_1^0)).$$

Находим работы импульсных сил при переходе манипулятора в начальный момент на траекторию прямого пути и работу импульсных сил при его торможении в конечном положении равновесия:

$$A_2^0(\tau_1^0, \tau) = \frac{\alpha_{22}^2 (q_2^\tau - q_2^0)^2}{2\beta_{22}(\exp(-\alpha_{22}(\tau - \tau_1^0)) - 1)^2},$$

$$A_2^\tau(\tau_1^0, \tau) = A_2^0(\tau_1^0, \tau) \exp(-2\alpha_{11}(\tau - \tau_1^0)),$$

а также находим работу всех импульсных сил при втором простом повороте манипулятора

$$A_2(\tau_1^0, \tau) = A_2^0(\tau_1^0, \tau) (1 + \exp(-2\alpha_{11}(\tau - \tau_1^0))).$$

Оптимизируя время второго простого поворота манипулятора при заданном ограничении на энергию импульсных сил, находим оптимальное значение параметра

$$\tau^0 = \tau_1^0 - \frac{1}{\alpha_{22}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - \gamma_2/\nu)^2}}{1 - \gamma_2/\nu}, \quad (5.7)$$

где $\gamma_2 = A_2(\tau_1, +\infty) = \frac{\alpha_{22}^2 (q_2^\tau - q_2^0)^2}{2\beta_{22}}$. Оптимальное значение этого параметра совпадает со временем движения манипулятора τ^0 из начального положения равновесия в конечное положение равновесия для первой серии простых поворотов рассматриваемого метода декомпозиции. Учитывая (5.6), получим следующую формулу для второго субоптимального управления

$$u_2^0(t) = S_2^0(\tau_1^0, \tau^0) \delta(t - \tau_1^0) + S_2^\tau(\tau_1^0, \tau^0) \delta(t - \tau^0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Аналогичные вычисления можно провести для второй серии простых поворотов q_2, q_1 . В результате определим время движения манипулятора $\tilde{\tau}^0$ из начального положения равновесия в конечное положение равновесия для второй серии простых поворотов рассматриваемого метода декомпозиции:

$$\tilde{\tau}^0 = \tau^0 - \tau_1^0 - \frac{1}{\tilde{\alpha}_{22}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - \tilde{\gamma}_2/\nu)^2}}{1 - \tilde{\gamma}_2/\nu}. \quad (5.9)$$

Здесь $\tilde{\alpha}_{22} = \frac{n_1^2 k_1^M k_1^E}{R_1(A_{11} + 2\mu a L \cos(q_2^\tau))}$, $\tilde{\beta}_{22} = \frac{n_1 k_1^M}{R_1(A_{11} + 2\mu a L \cos(q_2^\tau))}$, $\tilde{\gamma}_2 = \frac{\tilde{\alpha}_{22}^2 (q_1^\tau - q_1^0)^2}{2\tilde{\beta}_{22}}$.

Формулы (5.7) и (5.9) определяют зависимость времени движения манипулятора от выбора серии простых поворотов рассматриваемого метода декомпозиции.

6. Заключение

Субоптимальные управления являются приближениями оптимальных управлений сложных робототехнических систем [9]. Предложенный в работе метод декомпозиции позволяет определить конструктивную процедуру построения субоптимальных управлений для манипуляционных роботов с большим числом степеней свободы и нелинейной динамикой. Их применение связано с увеличением оптимального времени работы манипулятора. Его время работы зависит от выбора серии простых поворотов в предложенном методе декомпозиции. При переходе от обобщенных к реальным импульсным управлениям можно использовать известные аппроксимации функции Дирака. Параметры реальных импульсов должны обеспечить в начальный момент переход манипулятора из положения равновесия на траекторию прямого пути, а в конечный момент торможение манипулятора в конечном положении равновесия.

Список источников

1. Добрынина И. С., Карпов И. И., Черноусько Ф. Л. Компьютерное моделирование управления движением системы связанных твердых тел // Известия РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 1. С. 167–180.
2. Dolgii Yu. F., Sesekin A. N., Chupin I. A. Usings graphs in modeling the movements of a manipulation robot // Proceedings the X All Russian Conference "Actual problems of Applied Mathematic and Mechanics". 2020. Vol. 2312. Art. N 050005.
3. Пятницкий Е. С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады АН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 300–303.
4. Матюхин В. И., Пятницкий Е. С. Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 67–81.
<https://doi.org/10.1080/0144341890090108>
5. Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 6. С. 64–82.
6. Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 6. С. 883–893.
7. Решмин С. А. Метод декомпозиции в задаче управления Лагранжевой системой с дефицитом управляющих параметров // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 1. С. 151–169.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.03.011>
8. Чиликин М. Г., Клячев В. И., Сандлер А. С. Теория автоматизированного электропривода. М. : Энергия, 1979. 616 с.
9. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М. : Физматлит, 2006. 328 с.
10. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М. : Наука, 1989. 368 с.
11. Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М. : Физматлит, 2000. 256 с.

References

1. Dobrynina I.S., Karpov I.I., Chernous'ko F.L. Computer-simulated control of the motion of a system of connected solids. *Izv. AN SSSR. Teshnichesraia cibernetika*, 1994, no. 1, pp. 167–180. (in Russian)
2. Dolgii Yu.F., Seseikin A.N., Chupin I.A. Usings graphs in modeling the movements of a manipulation robot. *Proceedings the X All Russian Conference "Actual problems of Applied Mathematic and Mechanics 2020*, vol. 2312, art. no. 050005.
3. Pyatnitskii E.S. The decomposition principle in the control of mechanical systems. *Dokl. Math.*, 1988, vol. 300, no. pp. 300–303. (in Russian)
4. Matyukhin V.I., Pyatnitskii E.S. Controlling the motion of manipulation robots through decomposition with an allowance for the dynamics of actuators. *Autom. Remote Control*, 1989, no. 9, pp. 67–81. <https://doi.org/10.1080/0144341890090108> (in Russian)
5. Chernous'ko F.L. Decomposition and synthesis of control in dynamic systems. *Izv. AN SSSR. Technichesraia cibernetika*, 1990, no. 6. pp. 64–82. (in Russian)
6. Chernous'ko F.L. Decomposition and suboptimal control in dynamic systems. *Prikl. matem. i mehan.*, 1990, vol. 54, no. 6, pp. 883–893. (in Russian)
7. Reshmin S.A. Decomposition method in the problem of control of a Lagrangian system with a deficit of control parameters *Prikl. matem. i mehan.* 2010, vol. 74, no. 1, pp. 151–169. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.03.011> (in Russian)
8. Chilikin M.G., Klyachev V.I., Sandler A.S. *Theory of automated electric drive*. Moscow, Energy Publ., 1979, 616 p. (in Russian)
9. Chernousko F.L., Ananyevsky I.M., Reshmin S.A. *Methods of control of nonlinear mechanical systems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 328 p. (in Russian)
10. Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradetsky V.G. *Manipulation robots: dynamics, control, optimization*. Moscow, Nauka Publ., 1989, 368 p. (in Russian)
11. Dykhita V.A., Sumsonuk O.N. *Optimal Impulse Control with Applications*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 256 p. (in Russian)

Об авторах

Долгий Юрий Филиппович, д-р физ.-мат. наук, проф., Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620002, Российская Федерация; Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, 620108, Российская Федерация, yurii.dolgii47@mail.ru, <https://0000-0001-6725-8370>

About the authors

Yurii F. Dolgii, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002, Russian Federation; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, 620108, Russian Federation, yurii.dolgii47@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6725-8370>

Сесекин Александр

Николаевич, д-р физ.-мат. наук,
проф., Уральский федеральный
университет, Екатеринбург, 620002,
Российская Федерация; Институт
математики и механики им.
Н. Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, 620108, Российская
Федерация, sesekin@list.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-1339-9044>

Alexander N. Seseкин, Dr. Sci.
(Phys.–Math.), Prof., Ural Federal
University, Yekaterinburg, 620002,
Russian Federation; Krasovskii
Institute of Mathematics and
Mechanics UB RAS, Yekaterinburg,
620108, Russian Federation,
sesekin@list.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-1339-9044>

Поступила в редакцию / Received 18.09.2024

Поступила после рецензирования / Revised 30.10.2025

Принята к публикации / Accepted 31.10.2025