

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS



Серия «Математика»
2025. Т. 52. С. 34–43

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.956: 532.5.032

MSC 31B20, 76D05

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.34>

Спектр краевой задачи двумерной тепловой конвекции

В. К. Андреев¹, Е. Н. Лемешкова^{1✉}

¹ Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Российская Федерация

✉ elena_cher@icm.krasn.ru

Аннотация. Исследуется задача о двумерном течении жидкости в слое с подогреваемым нижним дном. На верхней стенке для скорости задано условие просачивания. Поле скоростей линейно по продольной координате, а поля температур и давлений — квадратичные функции той же координаты. Анализ совместности уравнений Навье – Стокса и теплопроводности приводит к нелинейной задаче на собственные значения для нахождения поля течения в слое. Спектр этой задачи построен численно для любых скоростей проницаемости. Установлена неединственность решения, характерная для задач подобного рода. Проанализирована структура течения в слое в зависимости от значений числа Рейнольдса.

Ключевые слова: тепловая конвекция, уравнения вязкой теплопроводной жидкости, обратная задача, спектр краевой задачи

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2025-1606).

Ссылка для цитирования: Андреев В. К., Лемешкова Е. Н. Спектр краевой задачи двумерной тепловой конвекции // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 34–43.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.34>

Research article

The Spectrum of the Boundary Value Problem of Two-dimensional Thermal Convection

Viktor K. Andreev¹, Elena N. Lemeshkova¹✉

¹ Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation

✉ elena_cher@icm.krasn.ru

Abstract. The problem of two-dimensional fluid flow in a layer with a heated bottom is investigated. A seepage condition is set on the upper wall for the velocity. The velocity field is linear in the longitudinal coordinate, and the temperature and pressure fields are quadratic functions of the same coordinate. The analysis of the compatibility of the Navier-Stokes equations and thermal conductivity leads to a nonlinear eigenvalue problem for finding the flow field in the layer. The spectrum of this problem is constructed numerically for any permeability rates. The uniqueness of the solution, which is typical for problems of this kind, has been established. The structure of the flow in the layer is analyzed depending on the values of the Reynolds number.

Keywords: thermal convection, viscous heat-conducting liquid equations, inverse problem, spectrum of the boundary value problem

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2025-1606).

For citation: Andreev V. K., Lemeshkova E. N. The Spectrum of the Boundary Value Problem of Two-dimensional Thermal Convection. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 52, pp. 34–43. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.34>

Введение

К задачам, связанным с теорией управления пограничным слоем, проблемами теплопередачи, в частности испарительным охлаждением, относятся и задачи о течениях вблизи проницаемых поверхностей. Первой работой, в которой было изучено течение между параллельными проницаемыми стенками при малых числах Рейнольдса, является работа Бермана [5]. В этой работе рассматриваемая задача имеет автомодельное решение и сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, сходному с уравнением Фолкнера – Скэн в теории пограничного слоя. Обзор работ, посвященных течениям жидкостей с проницаемыми стенками в каналах с другой геометрией, можно найти в [4].

В химической промышленности движение жидкостей и газов в трубах и каналах с проницаемыми стенками происходит в аппаратах, предназначенных для проведения мембранных процессов разделения. Такие процессы характеризуются малыми значениями скорости жидкости на

стенке. В связи с этим на проницаемой стенке канала, как правило, выставляется условие прилипания жидкости. Однако существуют такие ситуации, когда условие прилипания может не выполняться [2; 3; 12]: течение разреженных газов в каналах малого размера, движение жидкости в трубке с пористыми стенками.

Одной из характерных особенностей нелинейной задачи, рассмотренной Берманом (и в настоящей работе), является неединственность решения. В работе [7] исследовалось движение вязкой жидкости в слое, заключенной между двумя параллельными плоскими поверхностями, испытывающими линейное растяжение с постоянной скоростью. Установлено [7], что фиксированному значению числа Рейнольдса может соответствовать от одного до трёх значений коэффициента давления, а в осесимметричном случае в некотором диапазоне чисел Рейнольдса решение вообще отсутствует.

Подобные задачи возникают в случае термокапиллярной конвекции. В работах [4–6] изучена задача о вызванном наличием градиента температуры термокапиллярном течении невесомой жидкости с параболической зависимостью поверхностного натяжения от температуры, допускающая автомодельные (в обобщённом смысле) решения в рамках уравнений Навье – Стокса. Установлено, что в зависимости от значений определяющих параметров задача может иметь от одного до трёх решений. В работах [1; 11] рассмотрена задача о двумерном стационарном движении жидкости в плоском канале со свободной границей, вдоль которой поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Применение к ней тау-метода показало, что она имеет три различных решения, а в случае теплоизолированной свободной границы — одно. Для каждого из решений построены характерные структуры течения.

В настоящей работе рассматривается задача о двумерном течении жидкости в канале с верхней проницаемой стенкой. На дне канала поддерживается заданное распределение температуры. Эволюция этой системы описывается уравнениями Навье – Стокса и теплопроводности. Решение указанной задачи ищется в классе полей скоростей, линейных по продольной координате [10], а поля температур и давлений — квадратичные функции той же координаты. Анализ системы на совместность приводит к нелинейной задаче на собственные значения для нахождения полей течения в канале. Численно построен спектр этой задачи для любых скоростей проницаемости. Установлена неединственность решения, характерная для задач подобного рода [6; 7].

1. Постановка задачи

Предположим, что вязкая несжимаемая жидкость образует горизонтальный слой толщины l , ограниченный твёрдыми неравномерно на-

гретыми стенками. Температура в жидкости распределена по закону $\theta(x, y) = a(y)x^2 + b(y)$, $|x| < \infty, 0 \leq y \leq l$. Такое распределение температуры означает, что в начале декартовой системы координат температура имеет максимум при $a(0) < 0$ и минимум при $a(0) > 0$. Пусть $u_1(x, y) = w(y)x$, $u_2(x, y) = v(y)$ — компоненты вектора скорости и $p(x, y)$ — давление, тогда стационарное течение в слое описывается системой уравнений и граничных условий

$$vw_y + w^2 = f + \nu w_{yy}, \quad w + v_y = 0, \quad (1.1)$$

$$2wa + va_y = \chi a_{yy}, \quad vb_y = \chi b_{yy} + 2\chi a, \quad |x| < \infty, \quad 0 < y < l,$$

$$y = 0: \quad w = v = 0, \quad a = a_0, \quad b = b_0, \quad (1.2)$$

$$y = l: \quad w = 0, \quad v = v_0, \quad a = a_1, \quad b = b_1 \quad (a_y = q, \quad b_y = q_0). \quad (1.3)$$

В уравнениях (1.1) $\nu > 0$, $\chi > 0$ — постоянные кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости соответственно. Давление представимо в виде

$$\frac{1}{\rho}p = d - \frac{f}{2}x^2, \quad d = \nu v_y - \frac{1}{2}v^2 + d_0, \quad d_0 = \text{const}, \quad (1.4)$$

где $\rho > 0$ — плотность жидкости, а f — произвольная константа. В условиях (1.2), (1.3) a_0, a_1, b_0, b_1 — известные постоянные. Первые два условия в (1.2) есть следствия условия прилипания на нижней твердой стенке $y = 0$. На верхней твёрдой стенке $y = l$ для скорости задано условие просачивания (см. первые два условия (1.3)), а для температуры можно задать условие Дирихле (поддерживается заданное распределение температуры) или Неймана (задан поток тепла).

Замечание 1. Поставленная задача является нелинейной и обратной, так как постоянная f является искомой. Действительно, если из уравнения сохранения массы (второе уравнение (1.1)) исключить $v(y)$, то получается задача для функции $w(y)$. Задачи для функций $a(y)$, $b(y)$ при известной $v(y)$ отделяются и далее здесь не рассматриваются.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\xi = \frac{y}{l}, \quad V = \frac{l}{\nu}v, \quad F = \frac{l^4}{\nu^2}f.$$

Для определения новых неизвестной функции $V(\xi)$ и постоянной F , которая является собственным значением задачи, получаем из (1.1)–(1.3) следующую двухточечную краевую задачу для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения:

$$V''' + V'^2 - VV'' - F = 0, \quad (1.5)$$

$$\xi = 0 : \quad V = 0, \quad V' = 0, \quad (1.6)$$

$$\xi = 1 : \quad V = R, \quad V' = 0, \quad (1.7)$$

где $R = l\nu^{-1}v_0$ — число Рейнольдса.

Замечание 2. Пусть число Рейнольдса мало, тогда разложения функции V и собственного числа F в ряды по параметру R с точностью до членов $O(R^2)$ имеют вид

$$V = RV^{(1)}, \quad F = RF^{(1)}, \quad (1.8)$$

где порядок величин $V^{(1)}$ и $F^{(1)}$ равен единице. После подстановки (1.8) в систему (1.5)–(1.7), и пренебрегая квадратичными по R членами, получим линейную задачу для $V^{(1)}, F^{(1)}$. После решения полученной задачи с точностью до $O(R^2)$ для функции V и постоянной F найдём представления

$$V = R(3\xi^2 - 2\xi^3), \quad F = -12R. \quad (1.9)$$

2. Численное интегрирование

Ниже предложен алгоритм численного анализа системы (1.5)–(1.7) при любых значениях числа V_0 . Основным приемом исследования является сведение краевой задачи (1.5)–(1.7) к задаче Коши.

Подвергнем дифференциальное уравнение (1.5) действию линейной группы преобразований [13]

$$\xi = D_1\bar{\xi}, \quad V = D_2\bar{V}, \quad (2.1)$$

где $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ — параметры, подлежащие определению. Преобразованное уравнение имеет вид

$$\bar{V}''' + D_1D_2\bar{V}'^2 - D_1D_2\bar{V}\bar{V}'' - D_1^3D_2^{-1}F = 0. \quad (2.2)$$

Видно, что полученное уравнение будет инвариантно относительно параметров преобразования, если

$$D_1D_2 = 1. \quad (2.3)$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\bar{V}''' + \bar{V}'^2 - \bar{V}\bar{V}'' - \bar{F} = 0, \quad (2.4)$$

где (с учётом (2.3))

$$\bar{F} = D_1^4F. \quad (2.5)$$

Граничные условия в первой точке $\xi = 0$ в результате преобразования (2.1) не меняются:

$$\bar{\xi} = 0: \quad \bar{V} = 0, \quad \bar{V}' = 0. \quad (2.6)$$

Недостающими условиями при $\bar{\xi} = 0$, очевидно, являются условия на вторую производную \bar{V}'' . Для получения этого условия потребуем, чтобы после преобразования оно не зависело от D_1 . Это возможно добиться, если взять его в виде

$$V''(0) = D_1^{-3}, \quad (2.7)$$

тогда

$$\bar{V}''(0) = 1. \quad (2.8)$$

Это равенство вместе с условиями (2.6) позволяет решить уравнение (2.4) как задачу Коши.

Второе условие (1.7) в точке $\xi = 1$ после преобразования (2.1) примет вид

$$\bar{V}'(D_1^{-1}) = 0, \quad (2.9)$$

что определяет параметр преобразования D_1 , а значит и D_2 из (2.3).

Описанные действия приводят к следующей схеме построения спектра $F = F(R)$ краевой задачи (1.5)–(1.7). Задается значение $\bar{F} \in (-\infty, \infty)$ модифицированного градиента давления, и задача Коши (2.4), (2.6), (2.8) интегрируется до тех пор, пока не будет выполнено условие $\bar{V}' = 0$. Пусть это происходит при некотором значении $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0$. В соответствии с условиями (2.3), (2.9) получаем значения параметров преобразования: $D_2 = D_1^{-1} = \bar{\xi}_0$. Значения R находим, используя первое условие (1.7), а именно с учетом (2.1), $R = \bar{\xi}_0 \bar{V}(\bar{\xi}_0)$. И наконец, определяем собственное значение исходной задачи (1.5)–(1.7) в виде $F = D_1^{-4} \bar{F} = \bar{\xi}_0^4 \bar{F}$.

Отметим, что в процессе реализации описанного алгоритма учитывалась возможность неединственности корня $\bar{\xi}_0$ уравнения $\bar{V}'(\bar{\xi}) = 0$. Кроме того, поскольку знак параметров D_1, D_2 преобразования (2.1) может быть любым, интегрирование задачи (2.4), (2.6), (2.8) должно быть отдельно выполнено в областях $\bar{\xi} \in (-\infty, 0]$ и $\bar{\xi} \in [0, +\infty)$. Так, при $\bar{\xi} \in (-\infty, 0]$ и $\bar{F} \in [\bar{F}_*, +\infty)$ ($\bar{F}_* \approx 0,756$) имеем два отличных от нуля корня $\bar{\xi}_{01}$ и $\bar{\xi}_{02}$ ($|\bar{\xi}_{01}| < |\bar{\xi}_{02}|$) уравнения $\bar{V}'(\bar{\xi}) = 0$. В промежутке $\bar{F} \in (-\infty, \bar{F}_*)$ функция $\bar{V}'(\bar{\xi})$ не имеет нулей при $\bar{\xi} \in (-\infty, 0]$. В случае $\bar{\xi} \in [0, +\infty)$ уравнение $\bar{V}'(\bar{\xi}) = 0$ имеет единственный корень $\bar{\xi}_0$ при любом значении модифицированного градиента давления $\bar{F} \in (-\infty, +\infty)$.

На рис. 1 численно построен спектр $F = F(R)$ в логарифмической системе координат. Корень $\bar{\xi}_{01}$ порождает ветвь спектра для отрицательных значений параметра R (ветвь 1). Корень $\bar{\xi}_0$ при $\bar{F} > 0$ вместе с корнем $\bar{\xi}_{02}$ дают ветвь 2, соответствующую положительным значениям

R . При $\bar{F} < 0$ значения корня $\bar{\xi}_0$ порождают ветвь 3 спектра ($R > 0$), один из концов которой соответствует асимптотике (1.9), а другой при $F \rightarrow 0 - 0$ стремится к общей с ветвью 2 вертикальной асимптотике при $\lg |R| \approx 0,799$. Отрицательным значениям F соответствует только ветвь 3.

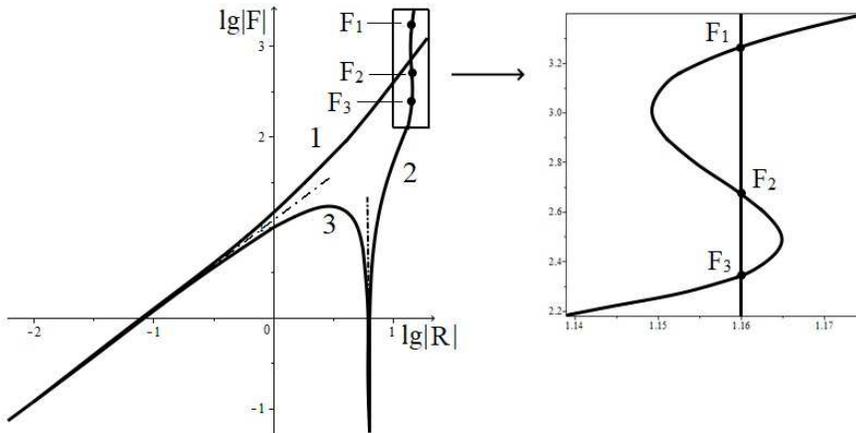


Рис. 1. Спектр $F = F(V_0)$ задачи (1.5)–(1.7)

Установлено, что спектр $F = F(R)$ обладает неединственностью решения. В частности, на ветви 3 ($R > 0$) имеется от одного до трёх значений собственного числа F , отвечающих фиксированному значению параметра R . Участок ветви 2 с неединственным решением представлен в увеличенном масштабе на рис. 1. Отметим также, что имеется не менее двух решений с нулевым собственным значением: одно соответствует асимптотике (1.9), а второе — значению параметра $R = 6,303$ (общая вертикальная асимптота ветвей 2 и 3).

3. Структура течения

Данные о характере течения жидкости, возникающего в слое в результате нагрева нижней твёрдой стенки, представлены на рис. 2. Профили горизонтальной компоненты скорости в области $x > 0$ изображены для ряда точек спектра $F = F(R)$ (по оси абсцисс отложены значения функции $W(\xi) = l^2\nu^{-1}w$, $W = -V_\xi$). Кривые 1–3 соответствуют значениям F_1, F_2 и F_3 соответственно (см. рис. 1, ветвь 2). При значении безразмерного градиента давления $F = F_1$ противоток в слое возникает примерно в середине его глубины, причём максимумы скорости в противоположных направлениях отличаются почти в два раза. Кривая 4 соответствует решению для нулевого собственного числа: $F = 0$, $R = 6,303$. В этом случае течение полностью возвратное. Всем точкам

спектра, образующим ветви 1, 3, соответствует течение типа Пуазейля (параболический профиль горизонтальной скорости). Причём для всех точек ветви 3 ($F < 0$, $R > 0$) течение всегда полностью возвратное.

В заключение отметим важность предложенного метода: в большинстве задач тепловой конвекции, содержащих параметры, представляет интерес именно совокупность решений для всего диапазона значений параметров, а не отдельное решение для конкретного набора значений параметров. Также рассмотренная задача может быть использована в качестве тестовой при численных расчётах, а также при моделировании реальных ситуаций, встречающихся в приложениях.

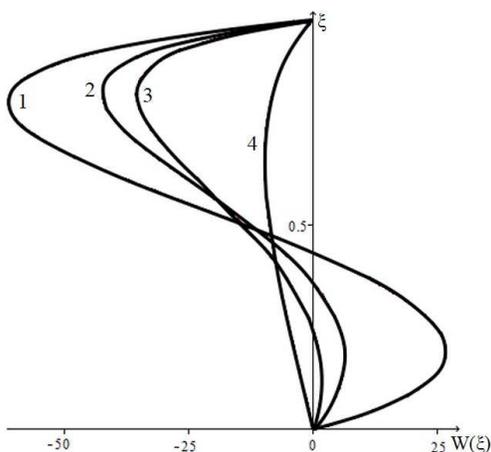


Рис. 2. Профиль горизонтальной составляющей скорости при $x > 0$

Заключение

Предложен численный алгоритм построения спектра краевой задачи, моделирующей тепловую конвекцию в канале с нижней подогреваемой твёрдой стенкой. На верхней стенке задано условие просачивания. Основным приёмом является сведение указанной задачи к задаче Коши. Спектр этой задачи исследовался также аналитически при малых числах Рейнольдса. Установлена неединственность решения: фиксированному значению числа Рейнольдса соответствует от одного до трёх значений безразмерного градиента давления. Проанализирована структура возникающего течения в зависимости от значений параметров.

Список источников

1. Лемешкова Е. Н. Двумерное термокапиллярное движение жидкости в открытом канале // Известия Иркутского государственного университета.

- Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 121–130. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.121>
2. Чесноков Ю. Г. Течение жидкостей по трубкам с проницаемыми стенками при наличии проскальзывания на стенке // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). 2018. № 47. С. 102–107.
 3. Чесноков Ю. Г. Теплообмен в трубках и каналах на установившемся участке при наличии проскальзывания на стенках // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). 2019. № 49. С. 108–111.
 4. Чесноков Ю. Г., Маркулович Н. А. Ламинарное движение жидкостей в мембранных волокнах // Журнал прикладной химии. 1989. Т. 62, № 9. С. 1954–1961.
 5. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953. Vol. 24, N 9. P. 1232-1235.
 6. Bobkov N. N., Gupalo Yu. P. The flow pattern in a liquid layer and the spectrum of the boundary-value problem when the surface tension depends non-linearly on the temperature // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1996. Vol. 60, N 6. P. 999–1005. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00122-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00122-0)
 7. Brady J. F., Acrivos A. Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier – Stokes equations with reverse flow // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 112. P. 127–150. <https://doi.org/10.1017/S0022112081000323>
 8. Gupalo Y. P., Ryazantsev Y. S. Thermocapillary motion of a liquid with a free surface with nonlinear dependence of the surface tension on the temperature // Fluid Dynamics. 1988. Vol. 23. P. 752–757. <https://doi.org/10.1007/BF02614155>
 9. Gupalo Y. P., Ryazantsev Y. S., Skvortsova A. V. Effect of thermocapillary forces on free-surface fluid motion // Fluid Dynamics. 1989. Vol. 24. P. 657–661. <https://doi.org/10.1007/BF01051714>
 10. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // Dingers Polytech J. 1911. Vol. 326. P. 321–440.
 11. Lemeshkova E. N. Two-Dimensional Plane Steady-State Thermocapillary Flow // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54. P. 33–41. <https://doi.org/10.1134/S0015462819010087>
 12. Liang Y. Y. Comparison of oscillating flow and slip velocity mass transfer enhancement in spacer-filled membrane channels: CFD analysis and validation // J. Membr. Sci. 2020. Vol. 593. 117433.
 13. Na T. Y. Computational methods in engineering boundary value problems. New York : Academic Press, 1979. 294 p.

References

1. Lemeshkova E.N. Two-dimensional Thermocapillary Fluid Motion in an Open Channel. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 121–130. (in Russian) <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.121>
2. Chesnokov Yu.G. Flow of fluids through tubes with permeable walls in the presence of slippage on wall. *Bulletin of St PbSIT (TU)*, 2018, no. 47, pp. 102–107.
3. Chesnokov Yu.G. Heat transfer in tubes and channels in an established area in the presence of slippage on the walls. *Bulletin of St PbSIT (TU)*, 2019, no. 49, pp. 108–111.

4. Chesnokov Yu.G., Markulevich N.A. Laminar motion of liquids in membrane fibers. *Journal of Applied Chemistry*, 1989, vol. 62, no. 9, pp. 1954–1961.
5. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys*, 1953, vol. 24, no. 9, pp. 1232–1235.
6. Bobkov N.N., Gupalo Yu.P. The flow pattern in a liquid layer and the spectrum of the boundary-value problem when the surface tension depends non-linearly on the temperature. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, no. 6, pp. 999–1005. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00122-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00122-0)
7. Brady J.F., Acrivos A. Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier – Stokes equations with reverse flow. *J. Fluid Mech*, 1981, vol. 112, pp. 127–150. <https://doi.org/10.1017/S0022112081000323>
8. Gupalo Y.P., Ryazantsev Y.S. Thermocapillary motion of a liquid with a free surface with nonlinear dependence of the surface tension on the temperature. *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, pp. 752–757. <https://doi.org/10.1007/BF02614155>
9. Gupalo Y.P., Ryazantsev Y.S., Skvortsova A.V. Effect of thermocapillary forces on free-surface fluid motion. *Fluid Dynamics*, 1989, vol. 24, pp. 657–661. <https://doi.org/10.1007/BF01051714>
10. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. *Dinglers Polytech J*, 1911, vol. 326, pp. 321–440.
11. Lemeshkova E.N. Two-Dimensional Plane Steady-State Thermocapillary Flow. *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, pp. 33–41. <https://doi.org/10.1134/S0015462819010087>
12. Liang Y.Y. Comparison of oscillating flow and slip velocity mass transfer enhancement in spacer-filled membrane channels: CFD analysis and validation. *J. Membr. Sci.*, 2020, vol. 593, 117433.
13. Na T.Y. *Computational methods in engineering boundary value problems*. New York, Academic Press, 1979, 294 p.

Об авторах

Андреев Виктор

Константинович, д-р физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр.,
Институт вычислительной математики СО РАН, Красноярск, 660036, Российская Федерация,
andr@icm.krasn.ru

Лемешкова Елена Николаевна,

канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.,
Институт вычислительной математики СО РАН, Красноярск, 660036, Российская Федерация,
email: elena_cher@icm.krasn.ru

About the authors

Victor K. Andreev, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Chief Research Scientist, Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation,
andr@icm.krasn.ru

Elena N. Lemeshkova, Cand. Sci.

(Phys.Math.), Research Scientist, Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation,
elena_cher@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию / Received 16.07.2024

Поступила после рецензирования / Revised 28.08.24

Принята к публикации / Accepted 04.09.2024