Серия «Математика»
2025. Т. 51. С. 151—166

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 004.827
MSC 68T27, 68T30
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.151

Классы нечетких моделей

Г. Э. Яхъяева[1]✉

[1] Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация
✉ gul_nara@mail.ru

Аннотация. Исследуется область теории нечетких моделей. Вводится понятие согласованного означивания предложений данной сигнатуры, которое можно рассматривать как обобщение на нечеткий случай понятия совместного множества предложений. По аналогии с классическим случаем рассматриваются классы нечетких моделей, порожденных согласованными означиваниями, вводится понятие аксиоматизированного класса нечетких моделей. Нечеткие значения истинности различных предложений можно рассматривать как формализацию субъективных оценочных знаний экспертов о предметной области. Для формализации таких знаний рассматриваются интервальные и точечные означивания, описываются теоретико-модельные свойства классов нечетких моделей, порожденных такими означиваниями. Зачастую при формализации некоторой системы необходимо также учитывать и среду, в которой находится данная система, и с которой она неизбежно взаимодействует (например, при реализации квантовых вычислений). В этом случае в нечеткую модель необходимо включать формализацию знаний не только о самой системе, но и о среде, в которой она обитает. Саму же систему можно рассматривать как подмодель полной модели. Вводится понятие подмодели нечеткой модели и факторизации класса нечетких моделей по фиксированным подмоделям. Доказывается, что классы эквивалентности такой факторизации являются аксиоматизированными классами нечетких моделей.

Ключевые слова: нечеткая модель, теория нечетких моделей, согласованное означивание, интервальное означивание, аксиоматизированный класс нечетких моделей

Ссылка для цитирования: Яхъяева Г. Э. Классы нечетких моделей // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 151–166.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.151

Research article

Classes of Fuzzy Models

Gulnara E. Yakhyaeva[1]✉

[1] Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation
✉ gul_nara@mail.ru

Abstract. The paper is devoted to research in the field of fuzzy model theory. The paper introduces the notion of a coordinated valuation of sentences of a given signature, which can be considered as a generalisation of the notion of a realizable set of sentences to the fuzzy case. By analogy with the classical case, classes of fuzzy models generated by coordinated valuations are considered, and the notion of axiomatised class of fuzzy models is introduced.
Fuzzy truth values of different sentences can be considered as a formalisation of subjective evaluative knowledge of experts about object domain. To formalise such knowledge, interval and point valuations are considered in this paper, and model-theoretic properties of classes of fuzzy models generated by such valuations are described.
Often, at formalisation of some system it is necessary to take into account also the environment in which this system is located and with which it inevitably interacts. In this case it is necessary to include in the fuzzy model the formalisation of knowledge not only about the system itself, but also about the environment in which it lives. The system itself can be considered as a submodel of the full model. The paper introduces the concept of submodel of a fuzzy model and also the concept of factorisation of a class of fuzzy models by fixed submodels. It is proved that equivalence classes of such factorisation are axiomatised classes of fuzzy models.

Keywords: fuzzy model, fuzzy model theory, coordinated valuation, interval valuation, axiomatised class of fuzzy models

For citation: Yakhyaeva G. E. Classes of Fuzzy Models. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 151–166. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.151

1. Введение

Представление и обработка неполных и неопределенных знаний — важнейшая задача при разработке интеллектуальных систем. В настоящее время такие системы должны эффективно управлять большими объемами информации разного рода, часто представленной в различных форматах и поступающей из разных источников, таких как базы данных, базы знаний, сенсорные сети, а также различные приложения, управляемые данными [3]. В настоящее время данные часто собираются из ненадежных источников или сам процесс сбора и обработки данных вносит неопределенность. Методы количественной оценки степени неопределенности зачастую основаны на вероятностных структурах [6].

Вероятностные базы знаний являются ярким примером, где вероятности присваиваются фактам данных и/или дополнительным знаниям (например, онтологии, определенной поверх исходных данных), чтобы выразить уверенность, которую мы имеем в различных частях знаний [2; 9; 14].

Неоднозначность и неполнота знаний в различных предметных областях привели к разработке нечеткой логики [1], которая, в свою очередь, столкнулась с проблемой «логических парадоксов» при применении в конкретных приложениях [10; 11]. Для решения этой проблемы была предложена теория нечетких моделей [8], которая является альтернативным подходом к формализации неточности и/или неполноты знаний по отношению к формализации с помощью нечетких множеств, предложенных Лотфи Заде [12]. В отличие от функциональных нечетких логик, в которых не выполняются те или иные базовые логические тождества (такие как закон невозможности противоречия, закон исключенного третьего и др.), в теории нечетких моделей сохраняются все теоретико-модельные тождества, т. е. она является консервативным расширением классической теории моделей. Это, с одной стороны, решает проблему логических противоречий нечетких логик (в стиле Л. Заде), а с другой стороны, дает возможность одновременной работы как с классическими, так и с нечеткими моделями.

Настоящие исследования продолжают работы, начатые в [15; 17]. Данная статья посвящена исследованию различных классов нечетких моделей и их свойств.

Во втором параграфе вводится понятие согласованного означивания предложений данной сигнатуры, которое можно рассматривать как обобщение на нечеткий случай понятия совместного множества предложений. По аналогии с классическим случаем рассматриваются классы нечетких моделей, порожденных согласованными означиваниями, вводится понятие аксиоматизированного класса нечетких моделей.

Нечеткие значения истинности различных предложений можно рассматривать как формализацию субъективных оценочных знаний экспертов о предметной области. В отличие от объективной субъективную вероятность можно интерпретировать как предсказание наступления в будущем некоторого события, для которого либо мы не обладаем статистическими данными, либо по тем или иным причинам данное событие невозможно повторить [16; 18]. Для формализации таких знаний можно использовать интервальные означивания. Изучению интервальных означиваний, а также классов нечетких моделей, порожденных интервальными означиваниями, посвящен третий параграф данной статьи.

Зачастую при формализации некоторой системы необходимо учитывать и среду, в которой находится данная система, и с которой она неизбежно взаимодействует. Так, например, квантовые системы являются очень неустойчивыми и подвержены процессам декогеренции [7].

В этом случае в нечеткую модель необходимо включать формализацию знаний не только о самой системе, но и о среде, в которой она обитает. Саму же систему будем рассматривать как подмодель этой модели. Изучению классов нечетких моделей, порожденных подмоделями, посвящен четвертый параграф данной статьи.

Введем основные обозначения, а также приведем определение нечеткой модели.

В данной работе мы рассматриваем сигнатуры, не содержащие функциональных символов. Через $S(\sigma)$ будем обозначать множество предложений сигнатуры σ, через $S_a(\sigma)$ — множество атомарных предложений сигнатуры σ, через $S_{qf}(\sigma)$ — множество бескванторных предложений сигнатуры σ.

Мы будем говорить об истинности формул на нечеткой модели $\mathfrak{A}_\mu$. Для удобства, для того чтобы говорить не об истинности произвольных формул, а только об истинности предложений, будем обогащать сигнатуру σ новыми константами. Будем использовать сигнатуру $\sigma_A \rightleftharpoons \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$, где $\{c_a \mid a \in A\} \cap \sigma = \emptyset$. При этом на $\mathfrak{A}_\mu$ будет выполняться $c_a^{\mathfrak{A}_\mu} = a$.

Определение 1. *Тройка $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu \rangle$ называется* ***нечеткой моделью****, если истинностная функция $\mu: S(\sigma_A) \to [0,1]$ является нечеткой мерой, определенной на алгебре Линденбаума – Тарского $S(\sigma_A)_{/\sim}$.*

Нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu$ будем называть ***тривиальной***, если ее истинностная функция μ принимает только значения 0 или 1, т. е. $\mu : S(\sigma_A) \to \{0; 1\}$.

Обозначим через $\mathbb{K}(A, \sigma)$ класс всех нечетких моделей сигнатуры σ, определенных на множестве A, и через $\mathbb{K}_{tr}(A, \sigma)$ – класс всех тривиальных моделей сигнатуры σ, определенных на множестве A. Очевидно, что $\mathbb{K}_{tr}(A, \sigma) \subset \mathbb{K}(A, \sigma)$.

2. Аксиоматизированные классы нечетких моделей

Рассмотрим непустое множество A и сигнатуру σ (не содержащую функциональных символов). Через $\wp([0; 1])$ обозначим множество всех подмножеств интервала $[0; 1]$.

Определение 2. *Отображение $\eta : S(\sigma_A) \to \wp([0; 1])$ назовем* ***означиванием*** *множества предложений сигнатуры σ_A.*

Означивание η назовем ***полным****, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\eta(\varphi) \neq \emptyset$. В противном случае означивание η будем называть* ***частичным****.*

Означивание η назовем ***тривиальным****, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\eta(\varphi) \in \{\{0\}; \{1\}; \emptyset\}$.*

Заметим, что истинностная функция μ любой нечеткой модели $\mathfrak{A}_\mu$ является частным случаем полного означивания, а истинностная функция тривиальной модели является тривиальным означиванием.

Определение 3. *Означивание η* ***согласуется с нечеткой моделью*** *$\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu\rangle$, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\eta(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow \mu(\varphi) \in \eta(\varphi)$.*

Означивание η назовем ***согласованным****, если найдется хотя бы одна нечеткая модель, с которой оно согласуется.*

Рассмотрим тривиальное означивание $\eta : S(\sigma_A) \to \{\{0\}; \{1\}; \emptyset\}$. Очевидно, что означивание η согласовано тогда и только тогда, когда множество предложений $\Gamma = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \eta(\varphi) = \{1\}\}$ является совместным. Более того, если тривиальное согласованное означивание η является полным, то множество предложений Γ является полной непротиворечивой теорией.

Таким образом, мы можем рассматривать понятие согласованного означивания как обобщение на нечеткий случай понятия совместного множества предложений.

Определение 4. *Рассмотрим означивание $\eta : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$. Будем говорить, что класс нечетких моделей $\mathbb{K}_\eta \subseteq \mathbb{K}(A, \sigma)$* ***порожден*** *означиванием η, если*

$$\mathbb{K}_\eta = \{\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu\rangle \mid \text{ модель } \mathfrak{A}_\mu \text{ согласованна с означиванием } \eta\}.$$

Определение 5. *Рассмотрим класс моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(A, \sigma)$. Будем говорить, что означивание $\eta_\mathbb{K} : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$* ***порождено*** *классом $\mathbb{K}$, если для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\eta_\mathbb{K}(\varphi) = \{\mu(\varphi) | \mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}\}$.*

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(A, \sigma)$ и $\mathbb{K} \neq \emptyset$. Тогда, очевидно, означивание $\eta_\mathbb{K}$ является полным. Более того, предложение $\varphi \in S(\sigma_A)$ является тождественно истинным (тождественно ложным) тогда и только тогда, когда для любого класса нечетких моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(A, \sigma)$ выполняется равенство $\eta_\mathbb{K}(\varphi) = \{1\}$ ($\eta_\mathbb{K}(\varphi) = \{0\}$).

Определение 6. *Класс нечетких моделей $\mathbb{K}$ назовем* ***аксиоматизированным****, если он порожден некоторым означиванием.*

Теорема 1. *Класс моделей $\mathbb{K}$ является аксиоматизированным тогда и только тогда, когда $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\eta_\mathbb{K}}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}$. Тогда для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\mu(\varphi) \in \eta_\mathbb{K}(\varphi)$. Следовательно, модель $\mathfrak{A}_\mu$ согласуется с означиванием $\eta_\mathbb{K}$. А значит $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}_{\eta_\mathbb{K}}$.

Таким образом, мы показали, что для любого класса $\mathbb{K}$ (даже не аксиоматизированного) выполняется условие $K \subseteq \mathbb{K}_{\eta_\mathbb{K}}$.

Покажем теперь, что если класс $\mathbb{K}$ аксиоматизирован, то также выполняется включение $\mathbb{K}_{\eta_{\mathbb{K}}} \subseteq \mathbb{K}$.

Пусть класс $\mathbb{K}$ аксиоматизирован и $\mathbb{K} \neq \emptyset$. Тогда найдется такое означивание η, что $\mathbb{K} = \mathbb{K}_\eta$.

Пусть $\eta_{\mathbb{K}}$ — означивание, порожденное классом $\mathbb{K}$. Рассмотрим предложение $\varphi \in S(\sigma_A)$ и число $\alpha \in \eta_{\mathbb{K}}(\varphi)$. Тогда найдется такая модель $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}$, что $\mu(\varphi) = \alpha$.

С другой стороны, так как $\mathbb{K} = \mathbb{K}_\eta$ и $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}$, то $\mu(\varphi) \in \eta(\varphi)$. Следовательно, $\alpha \in \eta(\varphi)$.

Таким образом, мы показали, что для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполняется включение

$$\eta_{\mathbb{K}}(\varphi) \subseteq \eta(\varphi). \tag{2.1}$$

Рассмотрим теперь модель $\mathfrak{A}_{\mu'} \in \mathbb{K}_{\eta_{\mathbb{K}}}$. По Определению 4, модель $\mathfrak{A}_{\mu'}$ согласуется с означиванием $\eta_{\mathbb{K}}$. Следовательно, для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\mu'(\varphi) \in \eta_{\mathbb{K}}(\varphi)$. Тогда, согласно (2.1), получим $\mu'(\varphi) \in \eta(\varphi)$.

Таким образом, мы получили, что $\mathfrak{A}_{\mu'} \in \mathbb{K}$, а значит, и доказали включение $\mathbb{K}_{\eta_{\mathbb{K}}} \subseteq \mathbb{K}$.

$\Leftarrow$) Доказательство очевидно, так как если $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\eta_{\mathbb{K}}}$, то класс $\mathbb{K}$ аксиоматизируется означиванием $\eta_{\mathbb{K}}$.

$\square$

Предложение 1. *Пусть $\{\mathbb{K}_i\}_{i\in I}$ — последовательность аксиоматизированных классов. Тогда классы $\bigcap_{i\in I}\mathbb{K}_i$ и $\bigcup_{i\in I}\mathbb{K}_i$ также являются аксиоматизируемыми.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbb{K}_i\}_{i\in I}$ — последовательность аксиоматизированных классов. Тогда для каждого класса $\mathbb{K}_i$ найдется такое означивание η_i, что $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{\eta_i}$.

Определим означивание $\eta' : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$ следующим образом: для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем

$$\eta'(\varphi) = \bigcap_{i\in I} \eta_i(\varphi).$$

Покажем, что $\bigcap_{i\in I}\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{\eta'}$.

$\mathfrak{A}_\mu \in \bigcap_{i\in I}\mathbb{K}_i \;\Leftrightarrow\;$ для любого $i \in I$ имеем $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}_i \;\Leftrightarrow\;$ для любого $i \in I$ и для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\mu(\varphi) \in \eta_i(\varphi) \;\Leftrightarrow\;$ для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\mu(\varphi) \in \bigcap_{i\in I}\eta_i(\varphi) = \eta'(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}_{\eta'}$.

Аналогично определим означивание $\eta'' : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$ следующим образом: для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем

$$\eta''(\varphi) = \bigcup_{i\in I} \eta_i(\varphi).$$

Покажем, что $\bigcup_{i\in I} \mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{\eta''}$.

$\mathfrak{A}_\mu \in \bigcup_{i\in I} \mathbb{K}_i \;\Leftrightarrow\;$ найдется такой индекс $i \in I$, что $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}_i \;\Leftrightarrow$ найдется такой индекс $i \in I$, что для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\mu(\varphi) \in \eta_i(\varphi) \;\Leftrightarrow\;$ для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\mu(\varphi) \in \bigcup_{i\in I} \eta_i(\varphi) = \eta''(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}_{\eta''}$. □

3. Интервальные означивания

Обозначим через I множество всех замкнутых подинтервалов интервала $[0;1]$, т. е. $I = \{[a;b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$.

Также будем считать, что $\emptyset \in I$. Это нам позволит формализовывать частичные (неполные) знания о предметной области.

Определение 7. *Отображение $ev : S(\sigma_A) \to I$ назовем* ***интервальным означиванием*** *множества предложений сигнатуры σ_A.*

Интервальное означивание ev назовем ***точечным****, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем либо $\eta(\varphi) = \emptyset$, либо $\eta(\varphi)$ является одноэлементным множеством, т. е. числом из интервала* $[0;1]$.

Класс моделей $\mathbb{K}_{ev}$, порожденный интервальным означиванием, будем также называть **интервальным**. Очевидно, что каждый интервальный класс нечетких моделей является аксиоматизированным.

Предложение 2. *Пусть $\{\mathbb{K}_i\}_{i\in I}$ — последовательность интервальных классов. Тогда класс $\bigcap_{i\in I} \mathbb{K}_i$ также является интервальным.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbb{K}_i\}_{i\in I}$ — последовательность интервальных классов. Тогда для каждого класса $\mathbb{K}_i$ найдется такое интервальное означивание ev_i, что $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{ev_i}$.

Определим означивание $ev' : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$ следующим образом: для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем

$$ev'(\varphi) = \bigcap_{i\in I} ev_i(\varphi).$$

Очевидно, что отображение ev' является интервальным и, по Предложению 1, аксиоматизирует класс $\bigcap_{i\in I} \mathbb{K}_i$. □

Определение 8. *Рассмотрим означивание $\eta : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$. Означивание $\eta_{\mathbb{K}_\eta}$ будем называть* ***замыканием*** *означивания η (и обозначать $\overline{\eta}$).*

Заметим, что если означивание $\eta : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$ несогласованно, то его замыкание $\overline{\eta}$ является вырожденным означиванием, т. е. для любого $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\overline{\eta}(\varphi) = \emptyset$.

Предложение 3. *Рассмотрим согласованное означивание*

$$\eta : S(\sigma_A) \to \wp([0;1]).$$

Тогда для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем

$$\eta(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow \overline{\eta}(\varphi) \subseteq \eta(\varphi).$$

Доказательство. Пусть $\overline{\eta}(\varphi) = \Lambda$ (где $\Lambda \subseteq [0;1]$). Так как $\overline{\eta} = \eta_{\mathbb{K}_\eta}$, то для любого $\alpha \in \Lambda$ найдется такая модель $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}_\eta$, что $\mu(\varphi) = \alpha$. А из того, что $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}_\eta$, следует, что $\alpha \in \eta(\varphi)$. □

Теорема 2. *Замыкание любого точечного означивания является интервальным означиванием.*

Доказательство теоремы можно найти в работе [17].

Теорема 3. *Замыкание любого интервального означивания является интервальным означиванием.*

Доказательство. Рассмотрим означивание $ev : S(\sigma_A) \to I$ и его замыкание $\overline{ev}$. Если означивание ev несогласованно, то его замыкание вырождено, а значит, может рассматриваться как частный случай интервального означивания.

Поэтому будем рассматривать согласованное интервальное означивание ev. Пусть нечеткие модели $\mathfrak{A}_{\mu_1}$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2}$ согласуются с означиванием ev. Тогда для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $\mu_1(\varphi), \mu_2(\varphi) \in \overline{ev}$.

Допустим, что $\mu_1(\varphi) < \mu_2(\varphi)$. Нам необходимо показать, что для любого числа α такого, что $\mu_1(\varphi) < \alpha < \mu_2(\varphi)$, можно построить нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu$, которая, с одной стороны, согласована с означиванием $\overline{ev}$, а с другой стороны, $\mu(\varphi) = \alpha$.

Пусть $k_1 = \frac{\alpha - \mu_1(\varphi)}{\mu_2(\varphi) - \mu_1(\varphi)}$ и $k_2 = \frac{\mu_2(\varphi) - \alpha}{\mu_2(\varphi) - \mu_1(\varphi)}$. Определим отображение $\mu = k_2 \cdot \mu_1 + k_1 \cdot \mu_2$.

Не трудно показать, что отображение μ является нечеткой мерой, а следовательно, определяет некоторую нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu$.

Также очевидно, что $\mu(\varphi) = \alpha$.

Нам остается показать, что модель $\mathfrak{A}_\mu$ согласована с означиванием ev. Для этого нужно показать, что для любого предложения $\psi \in S(\sigma_A)$ выполняется включение $\mu(\psi) \in ev(\psi)$.

Так как модели $\mathfrak{A}_{\mu_1}$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2}$ согласуются с означиванием ev, то $\mu_1(\psi) \in ev(\psi)$ и $\mu_1(\psi) \in ev(\psi)$. Допустим, что $\mu_1(\psi) < \mu_2(\psi)$.

Заметим, что $k_1 + k_2 = 1$. Тогда $\mu_1(\psi) = k_2 \cdot \mu_1(\psi) + k_1 \cdot \mu_1(\psi)$. Так как $\mu_1(\psi) < \mu_2(\psi)$, получим $\mu_1(\psi) \leq k_2 \cdot \mu_1(\psi) + k_1 \cdot \mu_2(\psi)$.

Аналогичным образом получим $k_2 \cdot \mu_1(\psi) + k_1 \cdot \mu_2(\psi) \leq \mu_2(\psi)$.

Откуда следует $\mu_1(\psi) \leq \mu(\psi) \leq \mu_2(\psi)$.

А так как означивание ev интервальное, то получим $\mu(\psi) \in ev(\psi)$. Следовательно, $\mu(\psi) \in \overline{ev}(\psi)$. □

Точечные означивания можно интерпретировать как субъективные оценки эксперта событий данной предметной области [18]. Даже в случае, когда сигнатура σ_A является конечной, множество предложений $S(\sigma_A)$ счетно.

Очевидно, что эксперт не может дать оценки для бесконечного множества событий в рассматриваемой предметной области. Поэтому встает вопрос о том, какое минимальное количество событий предметной области необходимо означить эксперту для того, чтобы по полученной информации однозначно восстанавливалась нечеткая модель, формализующая данную предметную область.

Таким образом, встает следующий вопрос: какие необходимо наложить условия на точечное означивание ev, чтобы класс нечетких моделей $\mathbb{K}_{ev}$ содержал ровно одну модель? Очевидно, что если точечное означивание ev полное, то класс $\mathbb{K}_{ev}$ будет содержать ровно одну модель. Однако даже некоторые частные случаи частичного точечного означивания могут обладать точечным замыканием.

Лемма 1. *Пусть $ev : S(\sigma_A) \to I$ — точечное означивание такое, что*

$$ev(\varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi \in S_a(\sigma_A).$$

Класс нечетких моделей $\mathbb{K}_{ev}$ содержит ровно одну модель тогда и только тогда, когда означивание ev является тривиальным.

Доказательство. Рассмотрим нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu\rangle$. Так как истинностная функция μ является нечеткой мерой, определенной на алгебре Линденбаума – Тарского $S(\sigma_A)_{/\sim}$, то для нее выполняются следующие включения [8]:

$$\mu(\varphi \wedge \psi) \in [\max\{0; \mu(\varphi) + \mu(\psi) - 1\}; \min\{\mu(\varphi); \mu(\psi)\}]; \tag{3.1}$$

$$\mu(\varphi \vee \psi) \in [\max\{\mu(\varphi); \mu(\psi)\}; \min\{1; \mu(\varphi) + \mu(\psi)\}]. \tag{3.2}$$

Очевидно, что если модель $\mathfrak{A}$ является тривиальной, т. е. для любых предложений $\varphi, \psi \in S(\sigma_A)$ выполняется условие $\mu(\varphi), \mu(\psi) \in \{0; 1\}$, то интервалы из (3.1) и (3.2) сжимаются в точку (также равную 0 или 1).

В противном случае истинностное значение составного предложения не может однозначно определяться по истинностным значениям входящих в него атомарных предложений. А значит, означивание всех атомарных предложений недостаточно для того, чтобы однозначно описать нечеткую модель. □

Лемма 2. *Пусть $ev : S(\sigma_A) \to I$ — точечное означивание. Тогда для того, чтобы класс нечетких моделей $\mathbb{K}_{ev}$ содержал ровно одну модель, достаточно выполнения условия*

$$\{\varphi \in S(\sigma_A) \mid ev(\varphi) \neq \emptyset\} = S_{qf}(\sigma_A).$$

Доказательство. Рассмотрим нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu \rangle$. В статье [17] было показано, что для любой формулы с одной свободной переменной $\varphi(x)$ имеем

$$\mu\Big(\forall x \varphi(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(a_i)\Big) \quad \mu\Big(\exists x \varphi(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi(a_i)\Big).$$

Следовательно, для определения нечеткой модели нет необходимости означивать предложения, содержащие кванторы. Истинностные значения предложений с кванторами однозначно восстанавливаются по истинностным значениям соответствующих бескванторных предложений. □

Таким образом, в Лемме 2 показано, что означивание всех бескванторных предложений сигнатуры σ_A достаточно для того, чтобы однозначно определить нечеткую модель. Однако этого может оказаться *«слишком много»* для описания нечеткой модели.

Следующие два предложения приводят примеры собственных подмножеств множества всех бескванторных предложений сигнатуры σ_A, означивание которых достаточно для однозначного описания нечеткой модели.

Предложение 4. *Пусть множество всех атомарных предложений сигнатуры σ_A конечно, т. е. $S_a(\sigma_A) = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$. Определим множество всех* ***максимальных конъюнктов*** *$S_\beta(\sigma_A)$ следующим образом:*

$$S_\beta(\sigma_A) = \{\varphi \in S_{qf}(\sigma_A) \mid \varphi = \varepsilon_1\psi_1 \wedge ... \wedge \varepsilon_n\psi_n, \varepsilon_i \in \{\_\,; \neg\}\}.$$

Точечное означивание ev такое, что $ev(\varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi \in S_\beta(\sigma_A)$ является согласованным тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sum_{\varphi \in S_\beta(\sigma_A)} \mu(\varphi) = 1.$$

Более того, класс $\mathbb{K}_{ev}$ содержит ровно одну нечеткую модель.

Предложение 5. *Пусть $S_a(\sigma_A) = \{\psi_1, ..., \psi_n, ...\}$. Определим множество всех* ***положительных конъюнктов*** *$S_\gamma(\sigma_A)$ следующим образом:*

$$S_\gamma(\sigma_A) = \{\varphi_i \in S_{qf}(\sigma_A) \mid \varphi_i = \psi_{i_1} \wedge ... \wedge \psi_{i_{n_i}}, n_i \in \mathbb{N}\}.$$

Точечное означивание ev такое, что $ev(\varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi \in S_\gamma(\sigma_A)$ является согласованным тогда и только тогда, когда для любых предложений $\varphi_1, \varphi_2 \in S_\gamma(\sigma_A)$ выполняется условие

$$\varphi_1 \sim \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow \mu(\varphi_1) \leq \mu(\varphi_2).$$

Более того, класс $\mathbb{K}_{ev}$ содержит ровно одну нечеткую модель.

4. Классы моделей, порожденные подмоделями

В этом параграфе введем еще одно ограничение на сигнатуру σ. Мы будем рассматривать чисто предикатную сигнатуру (т. е. не содержащую ни функциональных символов, ни символов констант).

Мы будем говорить, что нечеткие модели $\mathfrak{A}_{\mu_1} = \langle A, \sigma, \mu_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2} = \langle A, \sigma, \mu_2 \rangle$ **изоморфны** (и обозначать $\mathfrak{A}_{\mu_1} \equiv \mathfrak{A}_{\mu_2}$), если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеет место равенство $\mu_1(\varphi) = \mu_2(\varphi)$.

Далее дадим определение подмодели нечеткой модели, определенной на предикатной сигнатуре σ.

Определение 9. *Пусть $B \subseteq A$. Тогда нечеткая модель*

$$\mathfrak{B}_{\mu_1} = \langle B, \sigma, \mu_1 \rangle$$

является ***подмоделью*** *нечеткой модели $\mathfrak{A}_{\mu_2} = \langle A, \sigma, \mu_2 \rangle$, если для любого бескванторного предложения $\varphi \in S(\sigma_B)$ имеет место $\mu_1(\varphi) = \mu_2(\varphi)$.*

Далее через $\mathfrak{A}_\mu^{\downharpoonleft B}$ будем обозначать подмодель модели $\mathfrak{A}_\mu$, определенную на множестве B.

Определение 10. *Рассмотрим нечеткие модели $\mathfrak{A}_{\mu_1} = \langle A, \mu_1, \sigma \rangle$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2} = \langle A, \mu_2, \sigma \rangle$. Пусть $B \subseteq A$. Будем говорить, что модели $\mathfrak{A}_{\mu_1}$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2}$ являются B-эквивалентными (и обозначать $\mathfrak{A}_{\mu_1} \sim_B \mathfrak{A}_{\mu_2}$), если $\mathfrak{A}_{\mu_1}^{\downharpoonleft B} \equiv \mathfrak{A}_{\mu_2}^{\downharpoonleft B}$.*

Очевидно, что для любого подмножества $B \subseteq A$ отношение $\sim_B$ является отношением эквивалентности, а значит, разбивает класс $\mathbb{K}(A, \sigma)$ на непересекающиеся подклассы.

Введем стандартное обозначение класса эквивалентности

$$[\mathfrak{A}_\mu]_B = \{\mathfrak{A}_{\mu'} \mid \mathfrak{A}_{\mu'} \sim_B \mathfrak{A}_\mu\}$$

и фактор-класса

$$\mathbb{K}(A, \sigma)/_B = \{[\mathfrak{A}_\mu]_B \mid \mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}(A, \sigma)\}.$$

Заметим, что если $B = \emptyset$, то все модели из класса $\mathbb{K}(A, \sigma)$ B-эквивалентны, т. е. $[\mathfrak{A}_\mu]_\emptyset = \mathbb{K}(A, \sigma)$ для любой нечеткой модели $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}(A, \sigma)$.

Предложение 6. *Пусть $B_1 \subseteq B_2 \subseteq A$. Тогда для любой нечеткой модели $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}(A, \sigma)$ имеем*

$$[\mathfrak{A}_\mu]_{B_2} \subseteq [\mathfrak{A}_\mu]_{B_1}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_{B_2}$. Тогда $\mathfrak{A}_{\mu'}^{\downharpoonleft B_2} \equiv \mathfrak{A}_\mu^{\downharpoonleft B_2}$. А так как $B_1 \subseteq B_2$, то $\mathfrak{A}_{\mu'}^{\downharpoonleft B_1} \equiv \mathfrak{A}_\mu^{\downharpoonleft B_1}$. Следовательно, $\mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_{B_1}$. $\square$

Определение 11. *Рассмотрим нечеткие модели* $\mathfrak{A}_{\mu_1} = \langle A, \mu_1, \sigma \rangle$ *и* $\mathfrak{A}_{\mu_2} = \langle A, \mu_2, \sigma \rangle$ *и последовательность подмножеств* $\{B_i \subseteq A\}_{i \in I}$. *Будем говорить, что модели* $\mathfrak{A}_{\mu_1}$ *и* $\mathfrak{A}_{\mu_2}$ *являются* $\{B_i\}$*-эквивалентными (и обозначать* $\mathfrak{A}_{\mu_1} \sim_{\{B_i\}} \mathfrak{A}_{\mu_2}$*), если* $\mathfrak{A}_{\mu_1}^{\restriction B_i} \equiv \mathfrak{A}_{\mu_2}^{\restriction B_i}$ *для любого* $i \in I$.

Предложение 7. *Пусть* $\{B_i \subseteq A\}_{i \in I}$ *— последовательность подмножеств, множества* A. *Тогда для любой нечеткой модели* $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}(A, \sigma)$ *имеем*

$$[\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}} = \bigcap_{i \in I} [\mathfrak{A}_\mu]_{B_i}.$$

Доказательство. $\mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}} \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I : \mathfrak{A}_{\mu'}^{\restriction B_i} \equiv \mathfrak{A}_{\mu}^{\restriction B_i} \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I : \mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_{B_i} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}_{\mu'} \in \bigcap_{i \in I} [\mathfrak{A}_\mu]_{B_i}$. □

Следствие 1. *Пусть* $\{B_i \subseteq A\}_{i \in I}$ *– последовательность подмножеств множества* A. *Тогда для любой нечеткой модели* $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}(A, \sigma)$ *имеем*

$$[\mathfrak{A}_\mu]_{\cup B_i} \subseteq [\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}} \subseteq [\mathfrak{A}_\mu]_{\cap B_i}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_{\cup B_i}$. Тогда $\mathfrak{A}_{\mu'}^{\restriction \cup B_i} \equiv \mathfrak{A}_{\mu}^{\restriction \cup B_i}$. Значит, для любого $i \in I$ имеем $\mathfrak{A}_{\mu'}^{\restriction B_i} \equiv \mathfrak{A}_{\mu}^{\restriction B_i}$, т.е. для любого $i \in I$ имеем $\mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_{B_i}$. Следовательно, по Предложению 7, получаем, что $\mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}}$. Таким образом, мы получили, что $[\mathfrak{A}_\mu]_{\cup B_i} \subseteq [\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}}$.

Очевидно, что для любого $i \in I$ имеем $\bigcap_{i \in I} B_i \subseteq B_i$. Тогда, по Предложению 6 получим, что для любого $i \in I$ имеем $[\mathfrak{A}_\mu]_{B_i} \subseteq [\mathfrak{A}_\mu]_{\cap B_i}$.

Следовательно, $\bigcap_{i \in I} [\mathfrak{A}_\mu]_{B_i} \subseteq [\mathfrak{A}_\mu]_{\cap B_i}$.

□

Теорема 4. *Пусть* $\{B_i \subseteq A\}_{i \in I}$ *– последовательность подмножеств множества* A. *Тогда для любой нечеткой модели* $\mathfrak{A}_\mu \in \mathbb{K}(A, \sigma)$ *класс* $[\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}}$ *является аксиоматизированным интервальным классом.*

Доказательство. Рассмотрим подмножество $B \subseteq A$ и нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu$. Определим точечное означивание $\eta : S(\sigma_A) \to [0; 1]$ следующим образом:

$$\eta(\varphi) = \begin{cases} \mu(\varphi), & \varphi \in S_{qf}(\sigma_B); \\ \emptyset, & \varphi \notin S_{qf}(\sigma_B). \end{cases}$$

Покажем, что $[\mathfrak{A}_\mu]_B = \mathbb{K}_\eta$, т. е. класс нечетких моделей $[\mathfrak{A}_\mu]_B$, является аксиоматизированным интервальным классом.

$$\mathfrak{A}_{\mu'} \in [\mathfrak{A}_\mu]_B \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A}_{\mu'}^{\restriction B} \equiv \mathfrak{A}_{\mu}^{\restriction B} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \forall \varphi \in S_{qf}(\sigma_B) : \mu'(\varphi) = \mu(\varphi) = \eta(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A}_{\mu'} \in \mathbb{K}_\eta.$$

Рассмотрим теперь последовательность подмножеств $\{B_i \subseteq A\}_{i\in I}$. По Предложению 7, имеем $[\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}} = \bigcap_{i\in I}[\mathfrak{A}_\mu]_{B_i}$.

Далее, по Предложению 1, получим, что класс $[\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}}$ аксиоматизирован, А, по Предложению 2, класс $[\mathfrak{A}_\mu]_{\{B_i\}}$ является интервальным. □

5. Заключение

Данная работа посвящена исследованиям в области теории нечетких моделей, являющейся методологией логической формализации предметных областей при условии неточности и неполноты знаний об этих предметных областях.

Одной из сфер применения теории нечетких моделей является формализация субъективных оценочных знаний экспертов о предметной области. Набор экспертных оценок является конечным и зачастую неполным. В результате не всегда получается однозначно описать нечеткую модель, формализующую эти знания. Это приводит к возникновению целого класса нечетких моделей, согласованных с данным набором экспертных оценок, и возникает проблема неоднозначности порождения новых оценочных знаний о предметной области [16; 18]. Для формализации таких знаний хорошо подходят интервальные и точечные означивания, а также классы нечетких моделей, порожденные такими означиваниями.

Под другим направлением применения теории нечетких моделей можно рассматривать теоретико-модельную формализацию квантовых вычислений. В квантовых вычислениях минимальным и неделимым носителем информации является кубит [5]. В отличие от бита кубит может принимать континуум различных значений, которые возможно формализовать, используя нечеткую нотацию [4]. При таком подходе измерение квантовой системы можно рассматривать как выделение подмодели нечеткой модели.

Одной из центральных концепций квантовых вычислений является квантовая запутанность, которая отличает квантовую теорию от классических описаний мира [13]. Она представляет большой интерес из-за резкого контраста с нашей повседневной интуицией. Ключевой характеристикой этого явления является отсутствие локализации измерения. Система считается незапутанной или разделимой, если результаты измерений одних элементов не зависят от измерений других элементов.

В будущих исследованиях мы планируем сосредоточиться на изучении разделимых и переплетенных нечетких моделей, которые будут являться обобщением соответствующих понятий из теории квантовых измерений.

Список источников

1. Аверкин А. Н. Методы объяснимого искусственного интеллекта в работах Лотфи Заде // Мягкие измерения и вычисления. 2022. Т. 56, № 7-2. С. 79–90. https://doi.org/10.36871/2618-9976.2022.07-2.007.
2. Гаврилин Д. Н., Кустова И. А, Манцивода А. В. Объектные модели как микросервисы: язык запросов // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 121–137. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.121
3. Подвесовский А. Г., Исаев Р. А. Идентификация структуры и параметров нечетких когнитивных моделей: экспертные и статистические методы // International Journal of Open Information Technologies. 2019. Vol. 7, N 6. P. 35–61.
4. Яхъяева Г. Э., Пальчунова О. Д. О квантовой интерпретации теории нечетких моделей // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте : сб. науч. тр. XII Междунар. науч.-практ. конф. Коломна, 14-17 мая 2024 г. Т. 1. С. 225–236.
5. Chris B. Quantum Computing for Everyone. The MIT Press, 2020. 216 p.
6. Demin A. V., Ponomaryov D. K. Machine Learning with Probabilistic Law Discovery: a Concise Introduction // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 43. С. 91–109. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.91
7. Morzhin O. V., Pechen A. N. Krotov Type Optimization of Coherent and Incoherent Controls for Open Two-Qubit Systems // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 3–23. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.3
8. Palchunov D., Yakhyaeva G. Fuzzy logics and fuzzy model theory // Algebra and Logic. 2015. Vol. 54, N 1. P. 74–80. https://doi.org/10.1007/s10469-015-9326-9
9. Palchunov D., Yakhyaeva G. Application of Boolean-valued models and FCA for the development of ontological model // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 1921. P. 77–87.
10. Palchunov D. E. Methodological Aspects of the Application of Model Theory // 2022 Ural-Siberian Conference on Computational Technologies in Cognitive Science, Genomics and Biomedicine (CSGB). Novosibirsk, 2022. P. 210–215. https://doi.org/10.1109/CSGB56354.2022.9865602
11. Palchunov D. E. Model Theory of Subject Domains I // Algebra and Logic. 2022. Vol. 61, N 2. P. 239–250. https://doi.org/10.33048/alglog.2022.61.207
12. Pospelov D. A., Stefanuk V. L., Averkin A.N. et all. Remembering Lotfi Zadeh // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем. 2018. № 8. С. 27–39.
13. Wong T. G. Introduction to Classical and Quantum Computing. Rooted Grove, 2022. 400 p.
14. Yakhyaeva G., Karmanova A., Ershov A. Application of the Fuzzy Model Theory for Modeling QA-Systems // Computing and Informatics, 2021. Vol. 40. N 6. P. 1197–1216. https://doi.org/10.31577/cai_2021_6_1197
15. Yakhyaeva G. Application of the Case Models Restriction for Modeling Argumentation Reasoning // 2021 International Symposium on Knowledge, Ontology, and Theory (KNOTH). Novosibirsk, 2021. P. 40–44. https://doi.org/10.1109/KNOTH54462.2021.9686318
16. Yakhyaeva G., Skokova V. Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence

and Lecture Notes in Bioinformatics). 2021. Vol. 12948 LNAI. P. 152–165. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86855-0/_11

17. Yakhyaeva G. E. On the Local Coordination of Fuzzy Valuations // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 130–144. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.130
18. Yakhyaeva G. E., Palchunova O. D. Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge // Pattern Recognition and Image Analysis. 2023. Vol. 33, N 3. P. 529–535. https://doi.org/10.1134/S105466182303046X

References

1. Averkin A.N. Methods of explicable artificial intelligence in the works of Lotfi Zadeh. *Myagkie izmereniya i vichisleniya*, 2022, vol. 56, no. 7-2, pp. 79–90. https://doi.org/10.36871/2618-9976.2022.07-2.007 (in Russian)
2. Gavrilin D.N., Kustova I.A., Mantsivoda A.V. Object models as microservices: a query language. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 121–137. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.121 (in Russian)
3. Podvesovskii A., Isaev R. Identification of structure and parameters of fuzzy cognitive models: expert and statistical methods. *International Journal of Open Information Technologies*, 2019, vol. 7, no. 6. pp. 35–61. (in Russian)
4. Yakhyaeva G.E., Palchunova O.D. On quantum interpretation of the fuzzy models theory. *Proceedings of the XII International Scientific and Practical Conference "Integrated Models and Soft Computing in Artificial Intelligence* Kolomna, 14–17 May 2024, vol. 1, pp. 225–236. (in Russian)
5. Chris B. *Quantum Computing for Everyone*. The MIT Press, 2020, 216 p.
6. Demin A.V., Ponomaryov D.K. Machine Learning with Probabilistic Law Discovery: a Concise Introduction. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 43, pp. 91–109. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.43.91
7. Morzhin O.V., Pechen A.N. Krotov Type Optimization of Coherent and Incoherent Controls for Open Two-Qubit Systems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 3–23. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.3
8. Palchunov D., Yakhyaeva G. Fuzzy logics and fuzzy model theory. *Algebra and Logic*, vol. 54, no. 1, 2015, pp. 74–80. https://doi.org/10.1007/s10469-015-9326-9
9. Palchunov D., Yakhyaeva G. Application of Boolean-valued models and FCA for the development of ontological model. *CEUR Workshop Proceedings*, 2017, vol. 1921, pp. 77–87.
10. Palchunov D.E. Methodological Aspects of the Application of Model Theory. *2022 Ural-Siberian Conference on Computational Technologies in Cognitive Science, Genomics and Biomedicine (CSGB)*, Novosibirsk, 2022, pp. 210–215. https://doi.org/10.1109/CSGB56354.2022.9865602
11. Palchunov D.E. Model Theory of Subject Domains. *Algebra and Logic*, 2022, vol. 61, no. 2, pp. 166–173. https://doi.org/10.33048/alglog.2022.61.207
12. Pospelov D.A., Stefanuk V.L., Averkin A.N. et al. Remembering Lotfi Zadeh. *Open Semantic Technology for Intelligent Systems*, 2018, no. 8, pp. 27–39. (in Russian)
13. Wong T.G. *Introduction to Classical and Quantum Computing*. Rooted Grove, 2022, 400 p.

14. Yakhyaeva G., Karmanova A., Ershov A. Application of the Fuzzy Model Theory for Modeling QA-Systems. *Computing and Informatics*, 2021, vol. 40, no. 6, pp. 1197–1216. https://doi.org/10.31577/cai_2021_6_1197
15. Yakhyaeva G. Application of the Case Models Restriction for Modeling Argumentation Reasoning. *2021 International Symposium on Knowledge, Ontology, and Theory (KNOTH)*, Novosibirsk, 2021, pp. 40–44. https://doi.org/10.1109/KNOTH54462.2021.9686318
16. Yakhyaeva G., Skokova V. Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2021, vol. 12948 LNAI, pp. 152—165. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86855-0_11
17. Yakhyaeva G.E. On the Local Coordination of Fuzzy Valuations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 130—144. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.130
18. Yakhyaeva G.E., Palchunova O.D. Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 529–535. https://doi.org/10.1134/S105466182303046X

Об авторах

Яхъяева Гульнара Эркиновна, канд. физ.-мат. наук, доц., Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 630073, Российская Федерация, gul_nara@mail.ru

About the authors

Gulnara E. Yakhyaeva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, gul_nara@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 22.07.2024
Поступила после рецензирования / Revised 20.09.2024
Принята к публикации / Accepted 25.09.2024