Серия «Математика»
2024. Т. 49. С. 90—104

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.55
MSC 39B72, 32A05, 32A15, 32A27
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.90

О вещественных корнях систем трансцендентных уравнений с вещественными коэффициентами

А. М. Кытманов[1]✉, **О. В. Ходос**[1]

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ akytmanov@sfu-kras.ru

Аннотация. Исследуется число вещественных корней систем трансцендентных уравнений в $\mathbb{C}^n$ с вещественными коэффициентами, состоящих из целых функций, в некоторой ограниченной многомерной области $D \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что число корней системы дискретно (тогда оно не более чем счетно). Для некоторой целой функции $\varphi(z), z \in \mathbb{C}^n$, с вещественными коэффициентами Тейлора в точке $z = 0$, и заданной системы уравнений вводится понятие результанта $R_\varphi(t)$, который является целой функцией одного комплексного переменного t. Он строится, используя степенные суммы корней системы в отрицательной степени, найденных с помощью вычетных интегралов. Если результант не имеет кратных нулей, то показано, что число вещественных корней системы в $D = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \varphi(x) < b\}$ $(x = \operatorname{Re} z)$ равно числу вещественных нулей этого результанта в интервале (a, b). Приведен пример для системы уравнений.

Ключевые слова: системы трансцендентных уравнений, результант, простые корни

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00023.

Ссылка для цитирования: Кытманов А. М., Ходос О. В. О вещественных корнях систем трансцендентных уравнений с вещественными коэффициентами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 90–104.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.90

Research article

On Real Roots of Systems of Trancendental Equations with Real Coefficients

Alexander M. Kytmanov[1✉], **Olga V. Khodos**[1]

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ akytmanov@sfu-kras.ru

Abstract. The work is devoted to the study of the number of real roots of systems of transcendental equations in $\mathbb{C}^n$ with real coefficients, consisting of entire functions, in some bounded multidimensional domain $D \subset \mathbb{R}^n$. It is assumed that the number of roots of the system is discrete (then it is no more than countable). For some entire function $\varphi(z), z \in \mathbb{C}^n$, with real Taylor coefficients at $z = 0$, and a given system of equations, the concept of a resultant $R_\varphi(t)$ is introduced, which is an entire function of one complex variable t. It is constructed using power sums of the roots of the system in a negative degree, found using residue integrals. If the resultant has no multiple zeros, then it is shown that the number of real roots of the system in $D = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \varphi(x) < b\}$ $(x = \operatorname{Re} z)$ is equal to the number of real zeros of this resultant in the interval (a, b). An example is given for a system of equations.

Keywords: systems of transcendental equations, resultant, simple roots.

Acknowledgements: The research was financially supported by the Russian Scientific Found, (Project No. 24-21-00023).

For citation: Kytmanov A. M., Khodos O. V. On Real Roots of Systems of Trancendental Equations with Real Coefficients. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 90–104. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.90

1. Введение

Нахождение числа вещественных корней многочленов с вещественными коэффициентами является классической задачей алгебры. Ей посвящены метод Эрмита квадратичных форм [3, гл. 16, §9], [4, дополнение I], теорема Штурма, правило знаков Декарта, теорема Бюдана – Фурье (см., например, учебник [6, гл. 9]). Дальнейшее развитие этих методов для многочленов можно найти в обзоре Крейна и Наймарка [20] (на самом деле этот обзор был опубликован в 1936 г. на русском языке, но стал давно библиографической редкостью) и монографии Джури [18]. Для целых функций вопрос о локализации вещественных положительных корней рассматривался в классических работах Н. Г. Чеботарёва [16, с. 3–18, 29–56], а также в работе [21] (мы ссылаемся на собрание сочинений Н. Г. Чеботарёва, поскольку оригинальные его работы сейчас малодоступны).

Для систем уравнений число вещественных корней исследовалось в статьях [1; 7; 15; 22; 23].

В монографиях [8; 17] рассмотрены алгебраические и трансцендентные системы уравнений. Системы трансцендентных уравнений возникают, например, при изучении уравнений химической кинетики [2]. Одна из возникающих там задач — это задача о числе вещественных положительных корней системы уравнений, либо о числе корней в многограннике реакции.

Целью статьи является исследование числа вещественных корней систем трансцендентных уравнений в $\mathbb{C}^n$ с вещественными коэффициентами, состоящих из целых функций, в некоторой ограниченной многомерной области $D \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что число корней системы дискретно (тогда оно не более чем счетно). Для некоторой целой функции $\varphi(z), z \in \mathbb{C}^n$ с вещественными коэффициентами Тейлора в точке $z = 0$, и заданной системы уравнений вводится понятие результанта $R_\varphi(u)$, который является целой функцией одного комплексного переменного u. Он строится, используя степенные суммы корней системы в отрицательной степени, найденных с помощью вычетных интегралов. Если результант не имеет кратных нулей, то показано, что число вещественных корней системы в $D = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \varphi(x) < b\}$ $(x = \operatorname{Re} z)$ равно числу вещественных нулей этого результанта в интервале (a, b). Приведен пример для системы уравнений.

2. Результант системы

Рассмотрим систему трансцендентных уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(z) = 0, \\ \dots \\ f_n(z) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $f_1(z), \dots, f_n(z)$ являются целыми функциями от комплексных переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$ в $\mathbb{C}^n$.

В дальнейшем будем предполагать, что множество корней системы (2.1) дискретно. Поэтому оно не более чем счетно. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество корней системы с ненулевыми координатами $w_{(\nu)} = \big(w_{1(\nu)}, \dots, w_{n(\nu)}\big)$, $\nu = 1, 2, \dots$, занумерованных в порядке возрастания модулей: $\left|w_{(1)}\right| \leqslant \left|w_{(2)}\right| \leqslant \dots \leqslant \left|w_{(\nu)}\right| \leqslant \dots$.

Рассмотрим степенные суммы корней S_α из $\mathcal{E}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — неотрицательный мультииндекс (все компоненты неотрицательные и целые) и $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n > 0$, вида

$$S_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}^{\alpha_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\alpha_2} \cdots w_{n(\nu)}^{\alpha_n}}.$$

Будем считать, что ряды S_α абсолютно сходятся для любых мультииндексов α, $\|\alpha\| > 0$.

Понятие степенных сумм для трансцендентных систем уравнений было рассмотрено в работах [9–12]. Результаты этих статей были основаны на представлении степенных сумм через так называемые вычетные интегралы [26].

В статье [22] доказано утверждение.

Лемма 1. *Ряды S_α абсолютно сходятся для любых мультииндексов α, $\|\alpha\| > 0$, тогда и только тогда, когда ряды*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}}, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{n(\nu)}}$$

абсолютно сходятся.

Эта лемма позволяет определить понятие результанта системы (2.1). А именно, введем целую функцию нулевого рода ([14], гл. 7)

$$R\left(z_1\right) = z_1^s \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right), \tag{2.2}$$

где s — кратность нуля системы (2.1) в точке ноль, $s \geqslant 0$.

В формуле (2.2) бесконечное призведение абсолютно и равномерно сходится на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в силу леммы 1.

Функцию $R(z_1)$ будем называть *результантом* системы (2.1) по переменной z_1. Понятие результанта для систем трансцендентных уравнений не является общепринятым. Для случая двух уравнений похожее определение было введено Н. Г. Чеботаревым [16, с. 24–27]. В последние годы оно рассматривалось с различных точек зрения в работах [13; 21; 24; 25]. Результаты данных статей были основаны на вычислении степенных сумм через так называемые вычетные интегралы [26].

3. Вспомогательные результаты

Пусть все коэффициенты разложения Тейлора в точке 0 функций системы (2.1) вещественные.

Лемма 2. *Степенные суммы S_α из $\mathcal{E}$ являются вещественными числами.*

Доказательство. Если z_0 является корнем системы (2.1), то $\bar{z}_0$ также является ее корнем. Поэтому с каждым слагаемым, содержащим хотя бы одну комплексную координату,

$$\frac{1}{w_{1(\nu)}^{\alpha_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\alpha_2} \cdots w_{n(\nu)}^{\alpha_n}}$$

в степенную сумму S_α входит и слагаемое

$$\frac{1}{\overline{\overline{w_{1(\nu)}^{\alpha_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\alpha_2} \cdots w_{n(\nu)}^{\alpha_n}}}}.$$

Что доказывает утверждение.

□

Лемма 3. *Результант*

$$R(z_1) = z_1^s \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot z_1^m$$

имеет вещественные коэффициенты b_m, $m \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right) = 1 - z_1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(j)}} + z_1^2 \cdot \sum_{j_1<j_2} \frac{1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)}} -$$

$$-z_1^3 \cdot \sum_{j_1<j_2<j_3} \frac{1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)} \cdot w_{1(j_3)}} + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot z_1^m \cdot \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_m} \frac{1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)} \cdot \ldots \cdot w_{1(j_m)}}.$$

Коэффициенты при z_1^m равны:

$$b_0 = 1,$$

$$b_m = (-1)^m \cdot \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_m} \frac{1}{w_{1(j_1)} \cdot w_{1(j_2)} \cdot \ldots \cdot w_{1(j_m)}}, \quad m = 1, 2, \ldots \quad (3.1)$$

Из вида (3.1) очевидно следует, что b_m являются симметрическими функциями чисел $\frac{1}{w_{1(1)}}$, $\frac{1}{w_{1(2)}}$, $\frac{1}{w_{1(3)}}$, ..., а значит b_m — вещественные.

□

4. Основной результат

Теорема 2 из [23] состоит в следующем.

Теорема 1. *Если система (2.1) с вещественными коэффициентами такова, что все нули $R(z_1)$ простые, кроме точки $z_1 = 0$, то число вещественных корней системы (2.1) в $\mathcal{E}$ совпадает с числом вещественных корней результанта $R(z_1)$.*

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция с вещественными коэффициентами разложения Тейлора в точке $z = 0$ и $\varphi(0) = 0$. Если $z \in \mathbb{C}^n$ и $\mathrm{Im\,z} = 0$, то $z = x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через

$$D_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \varphi(x) < b\}.$$

Как определить число вещественных корней системы (2.1), лежащих в $D_{a,b}$?

Введем комплексные числа

$$\varphi\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(\nu)}}\right),$$

$w_{(\nu)} \in \mathcal{E}$, $\nu = 1, 2, \dots$

Нам нужно найти степенные суммы вида

$$S^j_\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^j\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(\nu)}}\right), \quad j \geqslant 1, \tag{4.1}$$

и проверить эти ряды на сходимость.

Лемма 4. *Ряды (4.1) абсолютно сходятся для всех $j \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi^j(z) = \sum_{\|\beta\| \geqslant 1} d_\beta z^\beta, \tag{4.2}$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — неотрицательный мультииндекс с целыми координатами, а $\|\beta\| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Тогда

$$S^j_\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^j\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(\nu)}}\right) = \sum_{\|\beta\| \geqslant 1} d_\beta S_\beta,$$

но

$$|S_\beta| = \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}^{\beta_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\beta_2} \cdots w_{n(\nu)}^{\beta_n}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|(S_{(1,0,\dots,0)})^{\beta_1} \cdot (S_{(0,1,\dots,0)})^{\beta_2} \cdots (S_{(0,\dots,0,1)})^{\beta_n}\right|.$$

Поэтому $|S^j_\varphi| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{\|\beta\| \geqslant 1} |d_\beta| \cdot \left|(S_{(1,0,\dots,0)})\right|^{\beta_1} \cdot \left|(S_{(0,1,\dots,0)})\right|^{\beta_2} \cdots \left|(S_{(0,\dots,0,1)})^{\beta_n}\right| < +\infty.$$

□

Предположим, что S^j_φ найдены (вопрос о их нахождении мы обсудим позже). Тогда мы можем применить к ним рекуррентные формулы Ньютона для целых функций одного комплексного переменного (см. [17, Ch. 1], [8, гл. 1]). Они справедливы для целых функций вида

$$f(t)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{c_j}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k, \quad b_0=1, \tag{4.3}$$

таких что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|c_j|}$$

сходится (это условие, например, справедливо для целых функций первого порядка роста минимального типа [14, гл. 7]).

Таким образом, нам нужно проверить выполнение условия сходимости рядов

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left|\varphi^{-j}\left(\dfrac{1}{w_{1(\nu)}},\dots,\dfrac{1}{w_{n(\nu)}}\right)\right|}, \quad j=1,\dots,$$

а это и есть сумма модулей для S^j_φ.

Коэффициенты b_k целой функции $f(t)$ можно найти по формулам (см. [17, Ch. 1], [8, гл. 1])

$$b_k=\frac{(-1)^kb_0}{k!}\begin{vmatrix}\sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \sigma_1 & \sigma_1 & 2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \sigma_1\end{vmatrix}, \tag{4.4}$$

где $\sigma_j=S^j_\varphi$, и использовать тем самым лемму 4.

Таким образом, мы найдем целую функцию $R_\varphi(t)=f(t)$ одного комплексного переменного t, имеющую корни

$$\varphi\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}},\dots,\frac{1}{w_{n(\nu)}}\right), \quad \nu=1,2,\dots$$

Если $w_{(j)}$ — корень системы (2.1) из $\mathcal{E}$, не все координаты которого вещественные, то $\bar{w}_{(j)}$ также корень системы (2.1). Если

$$\varphi\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}},\dots,\frac{1}{w_{n(\nu)}}\right)$$

— вещественное число, то то же самое можно сказать о равном ему числе

$$\varphi\left(\frac{1}{\bar{w}_{1(\nu)}},\dots,\frac{1}{\bar{w}_{n(\nu)}}\right).$$

Поэтому число
$$\varphi\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}},\ldots,\frac{1}{w_{n(\nu)}}\right)$$
является кратным нулем функции $R_\varphi(t)$.

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 2. *Если система (2.1) имеет вещественные коэффициенты и если функция $R_\varphi(t)$ имеет только простые нули, то число вещественных корней системы (2.1) в области $D_{a,b}$ совпадает с числом вещественных нулей функции $R_\varphi(t)$ на интервале (a,b).*

Данная теорема является естественным обобщением теоремы 1.

5. Нахождение степенных сумм $\sigma_j = S^j_\varphi$

Рассмотрим вопрос о нахождении степенных сумм $\sigma_j = S^j_\varphi$. В работах [9]– [12] рассмотрены различные системы вида (2.1) и вычетные интегралы формы
$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\gamma \frac{1}{z^{\beta+I}}\cdot\frac{df}{f} = \int\limits_\gamma \frac{1}{z_1^{\beta_1+1}\cdot z_2^{\beta_2+1}\cdots z_n^{\beta_n+1}}\cdot\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n},$$
где γ — некоторый n-мерный компактный цикл, зависящий от вида системы (2.1), β — мультииндекс с неотрицательными целыми координатами, $I=(1,\ldots,1)$.

Эти вычетные интегралы связывались затем со степенными суммами корней системы в отрицательной степени $S_{\beta+I}$.

Мы рассмотрим простейшую систему (2.1) (см. [9]), в которой
$$f_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z), \quad j=1,\ldots,n, \tag{5.1}$$
где $\beta^j = (\beta^j_1,\beta^j_2,\ldots,\beta^j_n)$ — мультииндекс с неотрицательными целыми координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta^j_1}\cdot z_2^{\beta^j_2}\cdots z_n^{\beta^j_n}$, а $Q_j(z)$ — многочлены, в которых каждый входящий в них моном имеет общую степень большую $\|\beta^j\| = k_j$, $j=1,\ldots,n$.

Цикл γ имеет вид
$$\gamma = \{z\in\mathbb{C}^n : |z_s| = r_s,\ s=1,\ldots,n\} \quad r_1>0,\ldots,r_n>0.$$
В работе [9] приведены формулы, позволяющие явно вычислять вычетные интегралы J_β.

Затем в [9] показано, что вычетные интегралы J_β равны степенным суммам $(-1)^n S_{\beta+I}$ при некоторых дополнительных предположениях на коэффициенты системы.

Рассмотрим интеграл для функций $\varphi(z)$ из разд. 4:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma}\varphi^j\left(\frac{1}{z_1},\dots,\frac{1}{z_n}\right)\frac{1}{z^I}\cdot\frac{df}{f}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma}\sum_{\|\beta\|\geqslant 0}d_\beta\frac{1}{z^{\beta+I}}\cdot\frac{df}{f}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\|\beta\|\geqslant 0}d_\beta\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z^{\beta+I}}\cdot\frac{df}{f}=(-1)^n\sum_{\|\beta\|\geqslant 0}d_\beta S_{\beta+I}.$$

В частности, при $j=0$ получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z^I}\cdot\frac{df}{f}=(-1)^n S_I.$$

К сожалению, полученное выражение не является степенной суммой S^j_φ, поэтому нам нужно более подробно рассмотреть систему (5.1).

Основное допущение, наложенное на систему (5.1) в работе [9], состоит в том, что при замене $z_j\to 1/u_j$, $j=1,\dots,n$,, сокращении и отбрасывании знаменателя система (5.1) принимает вид

$$F_j(u)=u_j^{s_j}+\tilde{Q}_j(u),\quad j=1,\dots,n,\quad u=(u_1,\dots,u_n),\tag{5.2}$$

где многочлены $\tilde{Q}_j(u)$ имеют степень (по совокупности переменных) строго меньшую, чем s_j. При этом корни $w_{(\nu)}$ из $\mathcal{E}$ перейдут в корни $\mathcal{E}'$ системы (5.2) с ненулевыми координатами $u_{(\nu)}$.

В качестве функции φ возьмем многочлен степени N.

В этом случае степенные суммы S^j_φ примут вид

$$S^j_\varphi=\sum_{\nu\geqslant 1}\varphi^j(u_{1(\nu)},\dots,u_{n(\nu)}),\quad j\geqslant 1.$$

Для вычисления этих выражений можно воспользоваться формулой Айзенберга (см., например, [17, формула (8.9)]. Поэтому справедливо утверждение

Следствие 1. *Степенная сумма*

$$S^j_\varphi=\sum_{\|\alpha\|\leqslant Nj}(-1)^{\|\alpha\|}\mathfrak{M}\left[\varphi^j J_F\frac{\tilde{Q}_1^{\alpha_1}\cdots\tilde{Q}_n^{\alpha_n}}{u_1^{\alpha_1 s_1+s_1-1}\cdots u_n^{\alpha_n s_n+s_n-1}}\right],\tag{5.3}$$

где J_F — якобиан системы (5.2), $N\cdot j$ — степень многочлена φ^j, а $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана (стоящему под знаком функционала $\mathfrak{M}$) его свободный член.

Как нетрудно проверить, что при $j = 0$ выражение в формуле (5.3) будет равно $s_1 \cdots s_n$, т.е. числу корней системы (5.2).

В работе [9] рассмотрены и более сложные системы, состоящие из целых функций. То же самое можно сказать о работах [10–12].

6. Пример

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} z_2 + a_1 z_1 z_2 + b_1 z_1^2 + c_1 z_1^2 z_2 = 0, \\ z_1 + a_2 z_2^2 + b_2 z_1 z_2 + c_2 z_1 z_2^2 = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Данная система удовлетворяет условиям, наложенным на систему из [9], для подсчета степенных сумм (теорема 2). Действительно, сделав замену $u_1 = 1/z_1,\ u_2 = 1/z_2$ и отбрасывая знаменатель, получим систему

$$\begin{cases} u_1^2 + a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 = 0, \\ u_2^2 + a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Найдем результант системы (6.1) по переменной z_1, используя любой метод, например результант Сильвестра (см. [6, гл. 11, §54]).

Запишем систему (6.1) по переменной z_2.

$$\begin{cases} z_2 \left(1 + a_1 z_1 + c_1 z_1^2\right) + b_1 z_1^2 = 0, \\ z_2^2 \left(a_2 + c_2 z_1\right) + z_2 b_2 z_1 + z_1 = 0. \end{cases}$$

В качестве результанта возьмем определитель

$$R(z_1) = \begin{vmatrix} 1 + a_1 z_1 + c_1 z_1^2 & b_1 z_1^2 & 0 \\ 0 & 1 + a_1 z_1 + c_1 z_1^2 & b_1 z_1^2 \\ a_2 + c_2 z_1 & b_2 z_1 & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= z_1 \cdot \left[z_1^4 \left(c_1^2 + b_1^2 c_2 - b_1 b_2 c_1\right) + z_1^3 \left(2a_1 c_1 + a_2 b_1^2 - a_1 b_1 b_2\right) + \right.$$

$$\left. + z_1^2 \left(a_1^2 + 2c_1 - b_1 b_2\right) + z_1 2a_1 + 1 \right].$$

Таким образом, система имеет 5 корней. Из них один — это начало координат $(0, 0)$, остальные 4 имеют ненулевые координаты, т. е. принадлежат $\mathcal{E}$.

Нетрудно понять, что $R(z_1)$ не имеет кратных корней при почти всех значениях коэффициентов (если рассматривать его дискриминант). Поэтому по теореме 1 число вещественных корней системы (6.1) совпадает с числом вещественных корней $R(z_1)$. Это число можно найти, не вычисляя корней, с помощью метода Эрмита квадратичных форм (см., например, [3, гл. 16, §9]).

Рассмотрим применение теоремы 2. В качестве функции $\varphi(z)$ возьмем функцию $\varphi(z)=z_1^2+z_2^2$. Таким образом будем искать число корней системы в круге или в кольце.

Запишем систему (6.2) в виде

$$F_1=u_1^2+\tilde{Q}_1=0,,\qquad F_2=u_2^2+\tilde{Q}_2=0,$$

где $\tilde{Q}_1=a_1u_1+b_1u_2+c_1,\quad \tilde{Q}_2=a_2u_1+b_2u_2+c_2$.

Якобиан J_F этой системы равен

$$J_F=4u_1u_2+2a_1u_2+2b_2u_1+a_1b_2-a_2b_1.$$

Согласно следствию 1 нам нужно вычислить выражения

$$S_\varphi^j=\sum_{\|\alpha\|\leqslant 2j}(-1)^{\|\alpha\|}\mathfrak{M}\left[(u_1^2+u_2^2)^jJ_F\frac{\tilde{Q}_1^{\alpha_1}\cdot\tilde{Q}_2^{\alpha_2}}{u_1^{2\alpha_1+1}\cdot u_2^{2\alpha_2+1}}\right].$$

При $j=0$ получим, что данное выражение равно 4, т. е. числу корней системы (6.2).

Вычисляя этот функционал, получим

$$S_\varphi^1=2a_1^2+2a_1a_2+2b_1^2+2b_1b_2-4(c_1+c_2),$$

$$S_\varphi^2=(a_1+a_2)^2(-2b_1b_2+2a_1^2-4c_1)+(b_1+b_2)^2(2a_1a_2+2b_2^2-4c_2)+$$
$$+4(c_1+c_2)^2+2(a_1b_2+3a_2b_1)(a_1+a_2)(b_1+b_2)-$$
$$-4a_1((a_1+a_2)(c_1+c_2)-4b_2(b_1+b_2)(c_1+c_2).$$

Затем вычислим S_φ^3, S_φ^4. Понятно, что данные формулы становятся все более громоздкими и для их нахождения лучше привлекать системы компьютерной алгебры (например, Maple), тем не менее мы получим конечный ответ.

После этого, применяя классические формулы Ньютона (см., например, [6, §53]) либо формулы (4.4), получаем многочлен $P(t)=t^4+b_1t^3+b_2t^2+b_3t+b_4$ четвертой степени с нужными корнями. Его и исследуем на наличие вещественных корней на заданном промежутке и кратность.

В качестве более общего примера мы можем рассмотреть целые функции $Q_1,\ Q_2$, содержащие произвольные мономы степеней больше чем 2.

7. Заключение

Рассмотрена система уравнений вида (2.1), где функции $f_j(z)$ являются целыми функциями от n комплексных переменных с вещественными коэффициентами разложения в ряд Тейлора в точке 0. Для заданной целой функции $\varphi(z)$ с вещественными коэффициентами разложения в точке 0 исследуется вопрос о числе вещественных корней системы (2.1) в области $D_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \varphi(x) < b\}$, где $x = \operatorname{Re} z$.

Для этого вводится понятие результанта $R_\varphi(t)$ системы и функции φ, используя понятие вычетных интегралов и степенных сумм корней системы в отрицательной степени. Показано, что если результант $R_\varphi(t)$ не имеет кратных корней, то число вещественных корней системы (2.1) в области $D_{a,b}$ равно числу нулей результанта $R_\varphi(t)$ на интервале (a, b). Приведен пример, показывающий, что данное утверждение вполне алгоритмизуемо.

Список источников

1. Айзенберг Л. А., Болотов В. А., Цих А. К. О решении систем нелинейных алгебраических уравнений с использованием многомерного логарифмического вычета. О разрешимости в радикалах // Доклады АН СССР. 1980. Т. 252, № 1. С. 11–14.
2. Быков В. И., Цыбенова С. Б. Нелинейные модели химической кинетики. М. : КРАСАНД, 2011. 387 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 577 с.
4. Иохвидов И. С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М. : Наука, 1974. 263 с.
5. Куликов В. Р., Степаненко В. А. О решениях и формулах Варинга для систем n алгебраических уравнений от n неизвестных // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 5. С. 200–214.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1971.
7. Кытманов А. М. О числе вещественных корней систем уравнений // Известия вузов. Математика. 1991. № 6. С. 20–23.
8. Кытманов А. М. Алгебраические и трансцендентные системы уравнений. Красноярск : СФУ, 2019. 354 с.
9. Кытманов А. М., Мышкина Е. К. Нахождение степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ // Известия вузов. Математика. 2013. № 12. С. 36–50. https://doi.org/10.3103/S1066369X13120049
10. Кытманов А. М., Мышкина Е. К. О степенных суммах корней систем целых функций конечного порядка роста // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2014, Т. 14, № 3. С. 62–82. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2748-7
11. Кытманов А. М., Мышкина Е. К. О вычислении степенных сумм корней одного класса систем неалгебраических уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 190–209. https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.016
12. Кытманов А. М., Мышкина Е. К. Вычетные интегралы и формулы Варинга для алгебраических и трансцендентных систем уравнений // Известия вузов. Математика. 2019. № 5. С. 40–55 https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-40-55
13. Кытманов А. М., Ходос О. В. Об одном подходе к определению результанта двух целых функций // Известия вузов. Математика. 2018. № 4. С. 49–59. https://doi.org/10.3103/S1066369X18040059
14. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М. : Наука, 1968. 626 с.

15. Тарханов Н. Н. О вычислении индекса Пуанкаре // Известия вузов. Математика. 1984. № 9. С. 47–50.
16. Чеботарев Н. Г. Собрание сочинений. М. ; Л. : АН СССР, 1949. Т.2. 417 с.
17. Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra / eds. Bykov V., Kytmanov A., Lazman M., Passare M. Dordreht : Springer science+business media, 1998. 254 p.
18. Jury E. I. Inners and stability of dynamic systems. New York ; London ; Sydney ; Toronto : Wiley, 1974. 308 p.
19. Khodos O. V. On Some System of Non-algebraic Equation in $\mathbb{C}^n$ // Journal SFU. Mathematics and Physics. 2014. Vol. 7, N 4. P. 455–465.
20. Krein M. G., Naimark M. A. The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation // Linear Multilin. Algebra. 1981. Vol. 10, N 4. P. 265–308.
21. Kytmanov A. M., Khodos O. V. On localization of the zeros of an entire function of finite order of growth // Journal Complex Analysis and Operator Theory. 2017. Vol. 11. P. 393–416. https://doi.org/10.1007/s11785-016-0606-8
22. Kytmanov A. M., Khodos O. V. On the roots of systems of transcendental equations // Probl. Anal. 2024. Vol. 13, N 1. P. 37–49. https://doi.org/10.15393/j3.art.2024.14430
23. Kytmanov A. M., Khodos O. V. On the real roots of systems of transcendental equations // Journal SFU. Mathematics and Physics. 2024. Vol. 17, N 3. P. 326–333.
24. Kytmanov A. A., Kytmanov A. M., Myshkina E. K. Residue Integrals and Waring's Formulas for Class of Systems of Transcendental Equations in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Complex variables and Elliptic Equations. 2019. Vol. 64. P. 93–111. https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1419210
25. Kytmanov A. M., Naprienko Ya. M. One approach to finding the resultant of two entire function // Complex variables and elliptic equations. 2017. Vol. 62. P. 269–286. https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1218855
26. Passare M., Tsikh A. Residue integrals and their Melin transforms // Can. J. Math. 1995. Vol. 47. P. 515–529.

References

1. Ajzenberg L.A., Bolotov V.A., Tsikh A.K. On the solution of systems of nonlinear algebraic equations using the multidimensional logarithmic residue. On the solvability in radicals. *Sov. Math. Dokl.*, 1980, vol. 21, pp. 645–648.
2. Bykov V.I., Tsybenova S.B. *Nonlinear models of chemical kinetics*. Moscow, KRASAND Publ., 2011, 387 p. (in Russian)
3. Gantmakher F.R. *Theory of Matrices*. New York, Chelsea Pub. Co., 1959, 298 p.
4. Iokhvidov I.S. *Hankel and Toeplitz matrices and forms*. Springer, 1982, 244 p.
5. Kulikov V.R., Stepanenko V.A. On solutions and Waring's formulae for the system of n algebraic equations with n unknowns. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2015, vol. 26, no. 5, pp. 839–848. https://doi.org/10.1090/spmj/1361
6. Kurosh A.G. *Higher Algebra*. Central Books Ltd, 1972, 428 p.
7. Kytmanov A.M. On the number of real roots of systems of equations. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1991, vol. 35, no. 6, pp. 19–22.
8. Kytmanov A.M. Algebraic and trascendental systems of equations, Krasnoyarsk, Siberian Federal University Publ., 2019, 354 p. (in Russian)

9. Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Evaluation of power sums of roots for systems of non-algebraic equation in $\mathbb{C}^n$. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2013, vol. 57, no. 12, pp. 31–43. https://doi.org/10.3103/S1066369X131200499
10. Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Power Series and Roots of Systems of Entire Functions of Finite Growths Order. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 213, no. 6, pp. 868–886. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2748-7
11. Kytmanov A.M., Myshkina E.K. On calculation of power sums of roots for one class of systems of non-algebraic equations. *Sib. Electr. Math. Reports*, 2015, vol. 12, pp. 190–209. https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.016 (in Russian)
12. Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Residue inttegrals and Waring formulas for algebraic and transcendent systems of equations. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2019, vol. 63, no. 5, pp. 36–50. https://doi.org/10.3103/S1066369X19050049
13. Kytmanov A.M., Khodos O.V. An approach to the determination oof the resultant of two entire functions. *Russian Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2018, vol. 62, no. 4, pp. 42–51. https://doi.org/10.3103/S1066369X18040059
14. Markushevich A.I. *Theory of Functions of a Complex Variable. Vol. 2*. Prentice-Hall, 1965, 333 p.
15. Tarkhanov N.N. Calculation of the Poincare index. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1984, no. 9, pp. 47–50 (in Russian)
16. Chebotarev N.G. *Work Collection*. Moscow, Leningrad, AN SSSR, 1949, vol. 2, 417 p.
17. Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra / eds. Bykov V., Kytmanov A., Lazman M., Passare M. Dordreht : Springer science+business media, 1998. 254 p.
18. Jury E.I. *Inners and stability of dynamic systems*. New York, London, Sydney,Toronto, Wiley, 1974, 308 p.
19. Khodos O.V. On Some System of Non-algebraic Equation in $\mathbb{C}^n$ *Journal SFU. Mathematics and Physics*, 2014, vol. 7, no. 4. pp. 455–465.
20. Krein M.G., Naimark M.A. The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation. *Linear Multilin. Algebra*, 1981, vol. 10, pp. 265–308.
21. Kytmanov A.M., Khodos O.V. On localization of the zeros of an entire function of finite order of growth. *Journal Complex Analysis and Operator Theory*, 2017, vol. 11, pp. 393–416. https://doi.org/10.1007/s11785-016-0606-8
22. Kytmanov A.M., Khodos O.V. On the roots of systems of transcendental equations. *Probl. Anal.*, 2024, vol.13, no. 1, pp. 37–49. https://doi.org/10.15393/j3.art.2024.14430
23. Kytmanov A.M., Khodos O.V. On the real roots of systems of transcendental equations. *Journal SFU. Mathematics and Physics*, 2024, vol. 17, pp. 326–333.
24. Kytmanov A.A., Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Residue Integrals and Waring's Formulas for Class of Systems of Transcendental Equations in $\mathbb{C}^n$. *J. Compl. Var. Ellip. Eq.*, 2019, vol. 64, pp. 93–111. https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1419210
25. Kytmanov A.M., Naprienko Ya.M. One approach to finding the resultant of two entire function. *Comp. var. ellip. eq.*, 2017, vol. 62, pp. 269–286. https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1218855
26. Passare M., Tsikh A. Residue integrals and their Melin transforms. *Can. J. Math.*, 1995, vol. 47, pp. 515–529.

Об авторах

Кытманов Александр Мечиславович, д-р физ.-мат. наук, проф., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, akytmanov@sfu-kras.ru, https://orcid.org/0000-0002-7394-1480

Ходос Ольга Вениаминовна, канд. физ.-мат. наук, доц., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, khodos_olga@mail.ru

About the authors

Alexander M. Kytmanov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, akytmanov@sfu-kras.ru, https://orcid.org/0000-0002-7394-1480

Olga V. Khodos, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, khodos_olga@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 29.02.2024
Поступила после рецензирования / Revised 25.04.2024
Принята к публикации / Accepted 06.05.2024