Серия «Математика»
2024. Т. 49. С. 45—62

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.624
MSC 34B10, 45J05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.45

К решению нагруженных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями

В. М. Абдуллаев[1,2,3]✉

[1] Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан
[2] Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики, Баку, Азербайджан
[3] Западно-Каспийский Университет, Баку, Азербайджан
✉ vaqif_ab@rambler.ru

Аннотация. Исследуется система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая точечные и интегральные нагружения, с нелокальными краевыми условиями. Краевые условия включают интегральные и точечные значения неизвестной функции. Существенным условием в задаче является то, что ядра интегральных слагаемых в дифференциальных уравнениях зависят лишь от переменной интегрирования. Показано, что подобные задачи возникают при управлении с обратной связью как объектами с сосредоточенными, так и распределенными параметрами при точечных и интегральных замерах текущего состояния управляемого объекта. Рассматриваемая в статье постановка задачи обобщает многие исследованные раннее задач относительно нагруженных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями. Введением вспомогательных параметров получены необходимые условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Для численного решения задачи предложено использовать представление решения исходной задачи, включающее четыре матричные функции, являющиеся решениями четырех вспомогательных задач Коши. Используя решения вспомогательных задач в краевых условиях, получены значения неизвестной функции в точках нагружения. Это достаточно, чтоб получить искомое решение. В статье приводится изложение применения метода на примере решения модельной задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нагруженное уравнение, многоточечные условия, интегральные условия, нелокальные условия, фундаментальная матрица решений, условия существования и единственности

Благодарности: Автор выражает искреннюю благодарность чл.-кор. НАН Азербайджана, профессору К. Р. Айда-заде за ценные советы и внимание к работе.

Ссылка для цитирования: Абдуллаев В. М. К решению нагруженных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 45–62.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.45

Research article

To the Solution of Loaded Differential Equations with Nonlocal Conditions

Vagif M. Abdullayev[1,2,3]✉

[1] Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan

[2] Institute of Control Systems of Ministry of Science and Education of Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

[3] Western Caspian University, Baku, Azerbaijan

✉ vaqif_ab@rambler.ru

Abstract. We investigate a system of linear ordinary differential equations containing point and integral loadings with nonlocal boundary conditions. Boundary conditions include integral and point values of the unknown function. An essential feature of the problem is that the kernels of the integral terms in the differential equations depend only on the integration variable. It is shown that similar problems arise during feedback control of objects with both lumped and distributed parameters during point and integral measurements of the current state of the controllable object. The problem statement considered in the paper generalizes a lot of previously studied problems regarding loaded differential equations with nonlocal boundary conditions. By introducing auxiliary parameters, we obtain necessary conditions for the existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration. To solve the problem numerically, we propose to use a representation of the solution to the original problem, which includes four matrix functions that are solutions to four auxiliary Cauchy problems. Using solutions to the auxiliary problems in boundary conditions, we obtain the values of the unknown function at the loading points. This is enough to get the desired solution. The paper describes the application of the method using the example of solving a test model problem.

Keywords: integro-differential equation, loaded equation, multipoint condition, integral condition, nonlocal condition, fundamental matrix of solution, existence and uniqueness condition

Acknowledgements: The author is grateful to Prof. K.R. Aida-zade, Corresponding-Member of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, for careful reading of the manuscript and helpful remarks.

For citation: Abdullayev V. M. To the Solution of Loaded Differential Equations with Nonlocal Conditions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 45–62. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.45

1. Введение

В работе изучаются вопросы существования, единственности решения нелокальных задач относительно систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, специфика которых заключается в следующем. Дифференциальные уравнения являются точечно и интегрально нагруженными и ядра интегральных слагаемых зависят лишь от одной переменной интегрирования. Нелокальные условия линейны и содержат точечные и интегральные значения неизвестной функции. Подобные задачи называют также точечно и интегрально нагруженными, и они возникают во многих практических приложениях [8; 9; 12; 14; 20; 23]. Специфическая особенность интегральных слагаемых в уравнениях важна для предлагаемого в статье подхода к получению условий существования, единственности решения задачи и для ее решения как аналитически, так и численно.

Многие задачи оптимального управления с обратной связью процессами нагрева приводят к рассматриваемому в статье классу нелокальных задач. Обратная связь осуществляется за счет точечных и интегральных во времени или в пространстве замеров температуры, результаты которых используются для формирования текущих значений управляющего воздействия [3; 6; 15].

В работе показано, что рассматриваемый класс нелокальных задач введением новых переменных можно привести к хорошо исследованным точечно нагруженным задачам с разделенными краевыми условиями [1; 21]. Но учитывая существенное при этом возрастание размерности задачи, такой подход к исследованию исходной задачи не целесообразен.

Подход к получению условий существования и единственности решения задачи в определенной степени использован для предлагаемого метода решения задачи как в аналитическом виде в случае постоянства матрицы динамической системы, так и для численного решения с переменной матрицей системы. Приводится исследование и аналитический метод решения одной иллюстративной задачи с применением предложенного подхода.

2. Постановка задачи и ее анализ

Рассматривается следующая система точечно и интегрально нагруженных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)u(x) + \sum_{i=1}^{l_1} B_i^1(x)u(x_i) +$$

$$+\sum_{j=1}^{l_2} B_j^2(x) \int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\xi)u(\xi)d\xi + D(x),\ x \in [x_0, x_f] \tag{2.1}$$

с нелокальными условиями

$$\sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i u(x_{L_2+i}) + \sum_{j=1}^{l_4} \int\limits_{x_{L_3+2j-1}}^{x_{L_3+2j}} \beta_j(\xi)u(\xi)d\xi = \gamma. \tag{2.2}$$

Здесь $u(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – неизвестная непрерывно дифференцируемая функция. Заданными являются: неотрицательные целые числа l_1, l_2, l_3, l_4; непрерывные n-мерные квадратные матричные функции $A(x)$, $B_i^1(x)$, $B_j^2(x)$, $i = 1, 2, ..., l_1$, $j = 1, 2, ..., l_2$, при $x \in [x_0, x_f]$, $C_j(x)$ – при $x \in [x_{L_1+2j-1}, x_{L_1+2j}]$, $j = 1, 2, ..., l_2$, $\beta_j(x)$ – при $x \in [x_{L_3+2j-1}, x_{L_3+2j}]$; непрерывная n-мерная вектор-функция $D(x)$; n-мерный вектор γ; точки x_i, $i = 1, 2, ..., L_4$, $L_1 = l_1$, $L_2 = L_1 + 2l_2$, $L_3 = L_2 + l_3$, $L_4 = L_3 + 2l_4$ из отрезка $[x_0, x_f]$ (некоторые из указанных точек могут совпадать), причем предполагается, что, не нарушая общности, выполнены условия:

$$x_{L_1+2j} \geq x_{L_1+2j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, l_2,$$
$$x_{L_3+2j} \geq x_{L_3+2j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, l_4.$$

В задаче требуется найти непрерывно-дифференцируемую при $x \in [x_0, x_f]$ вектор-функцию $u(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую системе точечно и интегрально нагруженных дифференциальных уравнений (2.1) и нелокальным условиям (2.2), содержащим точечные и интегральные значения неизвестной функции.

Отметим, что некоторые частные случаи задачи (2.1), (2.2) были исследованы ранее. В случае $B_j^2(x) \equiv 0, j = 1, 2, ..., l_2$, имеем точечно-нагруженную систему дифференциальных уравнений, исследованную во многих работах, в частности, в [1; 8; 9; 14]. При $B_j^1(x) \equiv 0$, $j = 1, 2, ..., l_1$, получаем интегро-дифференциальную систему уравнений с той спецификой, что ядра $C_j(x)$ зависят только от переменной интегрирования [11; 13; 17–19; 22]. Условия (2.2) также обобщают многие другие локальные и нелокальные условия. Их частными случаями являются условия Коши, двухточечные и многоточечные условия, условия интегрального типа [5; 14].

Задачу (2.1), (2.2) введением новых неизвестных можно привести к двухточечной краевой задаче относительно системы точечно нагруженных дифференциальных уравнений. Покажем это. Введем новые n-мерные переменные $\vartheta^j(x), j = 1, 2, ..., l_2$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta^j(x)}{dx} &= C_j(x)u(x), \quad x_{L_1+2j-1} < x \leq x_{L_1+2j},\ j = 1, 2, \ldots, l_2, \\ \vartheta^j(x) &= 0_n, \qquad\qquad\qquad x \leq x_{L_1+2j-1},\ j = 1, 2, \ldots, l_2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где 0_n — n-мерный нулевой вектор. Тогда система (2.1) будет иметь только точечные нагружения:

$$\frac{du(x)}{dt} = A(x)u(x) + \sum_{i=1}^{l_1} B_i^1(x)u(x_i)+$$

$$+\sum_{j=1}^{l_2} B_j^2(x)\vartheta^j(x_{L_1+2j}) + D(x), x \in [x_0, x_f]. \tag{2.4}$$

Введением новых n-мерных векторов $w^j(x)$, $j = 1, 2, ..., l_4$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dw^j(x)}{dx} &= \beta_j(x)u(x), \quad x_{L_3+2j-1} < x \le x_{L_3+2j},\ j = 1, 2, \ldots, l_4, \\ w^j(x) &= 0_n, \qquad\qquad\qquad x \le x_{L_3+2j-1},\ \ j = 1, 2, \ldots, l_4, \end{aligned} \tag{2.5}$$

условия (2.2) приводятся к многоточечным условиям

$$\sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i u(x_{L_2+i}) + \sum_{j=1}^{l_4} w^j(x_{L_3+2j}) = \gamma. \tag{2.6}$$

Порядок полученной линейной системы нагруженных дифференциальных уравнений (2.3)–(2.5) равен $(l_2 + l_4 + 1)n$. Используя подход, предложенный в работе [21], многоточечные условия (2.6) можно привести к разделенным краевым условиям. Для этого каждый из $2(l_3+l_4+1)$ отрезков между всеми точками x_0, x_{L_2+i}, $i = 1, 2, ..., l_3$, x_{L_3+2j}, $j = 1, 2, ..., l_4$, x_f после их упорядочения разбивается на две части. Для каждой из половин этих отрезков между точками вводятся системы дифференциальных уравнений относительно новых переменных, соответствующих $u(x)$, $\vartheta^i(x)$, $w^j(x)$, $i = 1, 2, ..., l_1$, $j = 1, 2, ..., l_2$, но в разных направлениях изменения аргумента x. В результате получим систему дифференциальных уравнений порядка $2(l_3+l_4+1)(l_2+l_4+1)n$ с двухточечными краевыми условиями вида (после индивидуального для каждого отрезка масштабирования и приведения их к отрезкам единичной длины):

$$A_1 w(0) = A_2, \qquad A_3 w(1) = A_4,$$

где A_1, A_3 — квадратные матрицы размера $2(l_3 + l_4 + 1)(l_2 + l_4 + 1)n$; A_2, A_4 — векторы соответствующей размерности.

Точечно нагруженные уравнения с двухточечными и многоточечными условиями достаточно хорошо изучены, относительно них получены необходимые и достаточные условия существования, единственности решения [11; 13], предложены подходы к их численному решению [1;7;8]. Исследованы задачи оптимизации и оптимального управления, обратные задачи в различных постановках, описываемые точечно-нагруженными уравнениями [4; 10; 16], имеются численные методы их решения [4; 16].

Учитывая существенное увеличение размерности исходной задачи (2.1), (2.2) при ее приведении к задаче с точечно-нагруженными дифференциальными уравнениями с разделенными краевыми условиями, применение ранее предложенных методов как для исследования, так и их численного решения нецелесообразно. Особенно это касается задач оптимизации, оптимального управления, требующих многократного решения задач вида (2.1), (2.2).

Поэтому в данной статье проводятся исследования существования и единственности решения задачи (2.1), (2.2), а также предложен подход к ее решению, не требующий повышения размерности исходной задачи.

3. Условия существования и единственности решения задачи (2.1), (2.2)

Рассмотрим следующую вспомогательную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)u(x) + \sum_{i=1}^{l_1} B_i^1(x)\overset{\smile}{\lambda}{}^{i} + \sum_{j=1}^{l_2} B_j^2(x)\overset{\frown}{\lambda}{}^{j} + D(x),\ x \in [x_0, x_f] \quad (3.1)$$

с условиями (2.2). Здесь $\overset{\smile}{\lambda}{}^{i}$, $\overset{\frown}{\lambda}{}^{j}$, $i = 1, 2, ..., l_1$, $\quad j = 1, 2, ..., l_2$ являются пока произвольными n-мерными векторами, остальные функции и параметры те же, что в уравнении (2.1).

При принятых предположениях на функции, участвующие в задаче, решение системы (3.1), при произвольно заданном начальном условии

$$u(x_0) = u_0, \quad (3.2)$$

согласно формуле Коши, можно записать в следующем виде:

$$u(x) = F(x)u_0 + F(x)\int_{x_0}^{x} F^{-1}(\xi)R(\xi)d\xi, \quad x \in [x_0, x_f], \quad (3.3)$$

$$R(\xi) = \sum_{i=1}^{l_1} B_i^1(\xi)\overset{\smile}{\lambda}{}^{i} + \sum_{j=1}^{l_2} B_j^2(\xi)\overset{\frown}{\lambda}{}^{j} + D(\xi). \quad (3.4)$$

Здесь n-мерная квадратная фундаментальная матрица $F(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dF(x)}{dx} = A(x)F(x), \quad F(x_0) = I_n, \quad x \in [x_0, x_f], \quad (3.5)$$

где I_n — n-мерная квадратная единичная матрица.

Введем обозначения:

$$\overset{\smile}{F}^{i}(x) = F(x)\int\limits_{x_0}^{x} F^{-1}(\xi)B_i^1(\xi)d\xi, \quad i = 1, 2, \ldots, l_1, \tag{3.6}$$

$$\overset{\frown}{F}^{j}(x) = F(x)\int\limits_{x_0}^{x} F^{-1}(\xi)B_j^2(\xi)d\xi, \quad j = 1, 2, \ldots, l_2, \tag{3.7}$$

$$F^1(x) = F(x)\int\limits_{x_0}^{x} F^{-1}(\xi)D(\xi)d\xi. \tag{3.8}$$

Тогда решение (3.3), (3.4) системы дифференциальных уравнений (3.1) при произвольно заданных начальном условии u_0 и векторах $\overset{\smile}{\lambda}^{i}$, $\overset{\frown}{\lambda}^{j}$, $i = 1, 2, ..., l_1, \quad j = 1, 2, ..., l_2$ можно записать в виде

$$u(x) = F(x)u_0 + \sum_{i=1}^{l_1} \overset{\smile}{F}^{i}(x)\overset{\smile}{\lambda}^{i} + \sum_{j=1}^{l_2} \overset{\frown}{F}^{j}(x)\overset{\frown}{\lambda}^{j} + F^1(x). \tag{3.9}$$

Учитывая произвольность n-мерных векторов

$$u_0, \overset{\smile}{\lambda}^{i}, \overset{\frown}{\lambda}^{j}, i = 1, 2, ..., l_1, j = 1, 2, ..., l_2,$$

потребуем от них выполнения следующих условий:

$$\overset{\smile}{\lambda}^{\nu} = u(x_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, l_1, \tag{3.10}$$

$$\overset{\frown}{\lambda}^{\mu} = \int\limits_{x_{L_1+2\mu-1}}^{x_{L_1+2\mu}} C_\mu(\xi)u(\xi)d\xi, \quad \mu = 1, 2, \ldots, l_2, \tag{3.11}$$

и условий (2.2). Ясно, что общее число условий в (2.2), (3.10), (3.11) равно и совпадает с суммарной размерностью произвольных векторов u_0, $\overset{\smile}{\lambda}^{i}$, $\overset{\frown}{\lambda}^{j}$, $i = 1, 2, ..., l_1, \quad j = 1, 2, ..., l_2$. Введем обозначения для векторов:

$$\breve{\Lambda} = (\overset{\smile}{\lambda}^{1}, \overset{\smile}{\lambda}^{2}, ..., \overset{\smile}{\lambda}^{l_1})^T \in \mathbb{R}^{l_1 n}, \quad \widehat{\Lambda} = (\overset{\frown}{\lambda}^{1}, \overset{\frown}{\lambda}^{2}, ..., \overset{\frown}{\lambda}^{l_2})^T \in \mathbb{R}^{l_2 n},$$

$$\Lambda = (\breve{\Lambda}, \widehat{\Lambda}) \in \mathbb{R}^{(l_1+l_2)n}.$$

Значок «T» означает транспонирование.

Из (3.10), учитывая (3.9), имеем

$$\breve{\lambda}^{\nu} = F(x_\nu)u_0 + \sum_{i=1}^{l_1} \breve{F}^{i}(x_\nu)\breve{\lambda}^{i} + \sum_{j=1}^{l_2} \widehat{F}^{j}(x_\nu)\,\widehat{\lambda}^{j} + F^1(x_\nu). \quad \nu = 1,2,...,l_1. \tag{3.12}$$

Из (3.11), учитывая (3.9), получим

$$\widehat{\lambda}^{\mu} = \int\limits_{x_{L_1+2\mu-1}}^{x_{L_1+2\mu}} C_\mu(\eta)\left[F(\eta)u_0 + \sum_{i=1}^{l_1} \breve{F}^{i}(\eta)\,\breve{\lambda}^{i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{l_2} \widehat{F}^{j}(\eta)\widehat{\lambda}^{j} + F^1(\eta)\right] d\eta. \tag{3.13}$$

Из условий (2.2) с учетом (3.9) получим

$$\sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i \left[F(x_{L_2+i})u_0 + \sum_{s=1}^{l_1} \breve{F}^{s}(x_{L_2+i})\breve{\lambda}^{s} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{l_2} \widehat{F}^{j}(x_{L_2+i})\widehat{\lambda}^{j} + F^1(x_{L_2+i})\right] + \sum_{i=1}^{l_3} \int\limits_{x_{L_3+2j-1}}^{x_{L_3+2j}} \beta_j(\eta)\left[F(\xi)u_0 + \sum_{i=1}^{l_1} \breve{F}^{i}(\eta)\breve{\lambda}^{i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{l_2} \widehat{F}^{s}(\eta)\widehat{\lambda}^{s} + F^1(\eta)\right] d\eta = \gamma. \tag{3.14}$$

Соотношения (3.12)–(3.14) представляют собой системы линейных алгебраических уравнений соответственно $l_1 n$, $l_2 n$ и n-го порядков относительно неизвестных значений n-мерных векторов

$$u_0, \breve{\lambda}^{i}, \widehat{\lambda}^{j}, i = 1,2,...,l_1, j = 1,2,...,l_2.$$

Общее число уравнений в этих системах соответствует общему числу неизвестных: $(u_0, \breve{\Lambda}, \widehat{\Lambda}) \in \mathbb{R}^{(l_1+l_2+1)n}$. После несложных преобразований, группировки полученную алгебраическую систему можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} G_{11}^{i}u_0 + G_{12}^{i}\breve{\Lambda} + G_{13}^{i}\widehat{\Lambda} = G_{10}^{i}, \ i = 1,2,...,l_1, \\ G_{21}^{j}u_0 + G_{22}^{j}\breve{\Lambda} + G_{23}^{j}\widehat{\Lambda} = G_{20}^{j}, \ j = 1,2,...,l_2, \\ G_{31}u_0 + G_{32}\breve{\Lambda} + G_{33}\widehat{\Lambda} = G_{30}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Участвующие в (3.15) матричные коэффициенты определяются из (3.12)–(3.14):

$$G_{11}^{i} = F(x_i) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$G_{12}^i = \left(\breve{F}^1(x_i),\ ...,\breve{F}^{i-1}(x_i),\breve{F}^i(x_i) - \mathrm{I}_n,\breve{F}^{i+1}(x_i),...,\breve{F}^{l_1}(x_i)\right) \in \mathbb{R}^{n\times l_1 n},$$

$$G_{13}^i = \left(\widehat{F}^1(x_i),\ \widehat{F}^2(x_i)...,\widehat{F}^{l_2}(x_i)\right) \in \mathbb{R}^{n\times l_2 n},$$

$$G_{10}^i = -F^1(x_i) \in \mathbb{R}^{l_1 n}, \quad i = 1,2,\dots,l_1,$$

$$C_{21}^j = \int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)F(\eta)d\eta \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$G_{22}^j = \left(\int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)\breve{F}^1(\eta)d\eta,\ ..., \int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)\breve{F}^{l_1}(\eta_i)d\eta\right) \in \mathbb{R}^{n\times l_1 n},$$

$$G_{23}^j = \left(\int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)\widehat{F}^1(\eta)d\eta,..., \int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)\widehat{F}^{j-1}(\eta)d\eta,\right.$$

$$\int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)\widehat{F}^j(\eta)d\eta - \mathrm{I}_n,$$

$$\left.\int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)\widehat{F}^{j+1}(\eta)d\eta,..., \int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j}} C_j(\eta)\widehat{F}^{l_2}(\eta)d\eta\right) \in \mathbb{R}^{n\times l_2 n},$$

$$G_{20}^j = -\int\limits_{x_{L_1+2j-1}}^{x_{L_1+2j-1}} C_j(\eta)F^1(\eta)d\eta \in \mathbb{R}^{l_2 n}, \quad j = 1,2,\dots,l_2,$$

$$G_{31} = \sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i F(x_{L_2+i}) + \sum_{j=1}^{l_4} \int\limits_{x_{L_3+2j-1}}^{x_{L_3+2j}} \beta_j(\eta)F(\eta)d\eta \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$G_{32} = \sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i \sum_{s=1}^{l_1} \breve{F}^s(x_{L_2+i}) + \sum_{j=1}^{l_4} \int\limits_{x_{L_3+2j-1}}^{x_{L_3+2j}} \beta_j(\eta) \sum_{i=1}^{l_1} \breve{F}^i(\eta)d\eta \in \mathbb{R}^{n\times l_1 n},$$

$$G_{33} = \sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i \sum_{j=1}^{l_2} \widehat{F}^j(x_{L_2+i}) + \sum_{j=1}^{l_4} \int\limits_{x_{L_3+2j-1}}^{x_{L_3+2j}} \beta_j(\eta) \sum_{s=1}^{l_2} \widehat{F}^s(\eta)d\eta \in \mathbb{R}^{n\times l_2 n},$$

$$G_{30} = \gamma - \sum_{i=1}^{l_3} \alpha_i F^1(x_{L_2+i}) - \sum_{j=1}^{l_4} \int\limits_{x_{L_3+2j-1}}^{x_{L_3+2j}} \beta_j(\eta) F^1(\eta) d\eta \in \mathbb{R}^n.$$

Из решения алгебраической системы (3.15) определяются начальное значение неизвестной функции $u_0 = u(x_0)$, точечные значения $\overset{\smile}{\lambda}{}^i = u(x_i)$, $i = 1, 2, ..., l_1$, интегральные значения $\overset{\frown}{\lambda}{}^j = \int\limits_{L_1+2j-1}^{L_1+2j} C(\xi)u(\xi)d\xi$, $j = 1, 2, ..., l_2$. Это позволяет решить задачу Коши относительно системы дифференциальных уравнений (3.1) вместо нагруженной системы (2.1) с начальными условиями (3.2) без использования нелокальных условий (2.2).

Таким образом, существование и единственность решения задачи (2.1), (2.2) зависит от существования и единственности векторов u_0, $\overset{\smile}{\lambda}{}^i$, $\overset{\frown}{\lambda}{}^j$, $i = 1, 2, ..., l_1$, $j = 1, 2, ..., l_2$, являющихся решениями алгебраической системы (3.15). Отсюда очевидно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Для существования и единственности решения задачи (2.1), (2.2) ранг квадратной матрицы алгебраической системы (3.15) размерности* $(l_1 + l_2 + 1)n$ *должен удовлетворять условию:*

$$rank \begin{bmatrix} G_{11}^1 & ... & G_{11}^{l_1} & G_{21}^1 & ... & G_{21}^{l_2} & G_{31} \\ G_{12}^1 & ... & G_{12}^{l_1} & G_{22}^1 & ... & G_{22}^{l_2} & G_{32} \\ G_{13}^1 & ... & G_{13}^{l_1} & G_{23}^1 & ... & G_{23}^{l_2} & G_{33} \end{bmatrix}^T = (l_1 + l_2 + 1)n. \qquad (3.16)$$

Ясно, что в случае, если ранг матрицы в (3.16) меньше n, то алгебраическая система (3.15) может не иметь решений или иметь множество решений в зависимости от ранга расширенной матрицы (3.15). Следовательно, соответственно и исходная задача (2.1), (2.2) может иметь множество решений или не иметь их вообще.

Приведенный подход к исследованию существования и единственности решения задачи (2.1), (2.2) может быть использован и для решения задачи. Но, как видно из приведенных выше формул, для нахождения коэффициентов системы алгебраических уравнений (3.15) необходимо иметь фундаментальную матрицу решений $F(x)$ и ее обратную матрицу $F^{-1}(x)$, $x \in [x_0, x_f]$. В случае выполнения условия $A(x) \neq const$, $\quad x \in [x_0, x_f]$, построение этих матриц в аналитическом виде на практике не представляется возможным, а с использованием численных методов требует большого объема вычислений и памяти.

В следующем разделе приводится подход к численному решению задачи (2.1), (2.2), не требующий знания матрицы $F^{-1}(x)$, $x \in [x_0, x_f]$.

4. Подход к решению задачи

Ниже предлагается подход к решению задачи (2.1), (2.2), использующий вспомогательные задачи Коши относительно линейных систем дифференциальных уравнений. Для численного решения вспомогательных задач Коши могут быть использованы известные методы и пакеты программ.

Предлагаемый подход основан на представлении решения (3.9) вспомогательной задачи (3.1), (3.2) и задачах Коши, приведенных в следующей теореме.

Теорема 2. *Решение системы дифференциальных уравнений (3.1) при произвольно заданных независимых начальном условии (3.2) и n-мерных векторах $\overset{\smile}{\lambda}{}^{i}$, $\overset{\frown}{\lambda}{}^{j}$, $i = 1,2,...,l_1$, $j = 1,2,...,l_2$, представимо в виде (3.9), причем единственным образом, если n-мерные квадратные матричные функции $F(x)$, $\overset{\smile}{F}{}^{i}(x)$, $\overset{\frown}{F}{}^{j}(x)$ и векторная функция $F^1(x)$ являются решениями соответствующих задач Коши (3.5) и*

$$\frac{d\overset{\smile}{F}{}^{i}(x)}{dx} = A(x)\overset{\smile}{F}{}^{i}(x) + B_i^1(x), \quad \overset{\smile}{F}{}^{i}(x_0) = 0_{n\times n}, \;\; i = 1,2,...,l_1, \tag{4.1}$$

$$\frac{d\overset{\frown}{F}{}^{j}(x)}{dx} = A(x)\overset{\frown}{F}{}^{j}(x) + B_j^2(x), \; \overset{\frown}{F}{}^{j}(x_0) = 0_{n\times n}, \;\; j = 1,2,...,l_2, \tag{4.2}$$

$$\frac{dF^1(x)}{dx} = A(x)F^1(x) + D(x), \; F^1(x_0) = 0_n. \tag{4.3}$$

Доказательство. Согласно формуле Коши, решениями задач (4.1)–(4.3), причем единственными, являются соответственно функции $\overset{\smile}{F}{}^{i}(x)$, $\overset{\frown}{F}{}^{j}(x)$, $F^1(x)$, определенные формулами (3.6)–(3.8). В этих формулах участвует матричная функция $F(x)$, являющаяся фундаментальным решением однородных систем относительно (4.1)–(4.3) и единственным решением задачи Коши (3.5). Ясно, что функции $F(x)$, $\overset{\smile}{F}{}^{i}(x)$, $\overset{\frown}{F}{}^{j}(x)$, $F^1(x)$ не зависят от начального условия u_0 и параметров $\overset{\smile}{\lambda}{}^{i}$, $\overset{\frown}{\lambda}{}^{j}$. Но и представление решения системы дифференциальных уравнений (3.1) в виде (3.9), в силу формулы Коши (3.4), единственно при произвольно и независимо заданных векторах u_0, $\overset{\smile}{\lambda}{}^{i}$, $\overset{\frown}{\lambda}{}^{j}$, $i = 1,2,...,l_1$, $j = 1,2,...,l_2$. □

Из вышесказанного можно сформулировать следующий подход к решению исходной задачи (2.1), (2.2).

Сначала решаются вспомогательные задачи Коши (3.5), (4.1)–(4.3). После нахождения функций $F(x)$, $\overset{\smile}{F}^{i}(x)$, $\overset{\frown}{F}^{j}(x)$, $F^1(x)$, $i = 1,2,...,l_1$, $j = 1,2,...,l_2$, далее, учитывая произвольность параметров $\overset{\smile}{\lambda}^{i}$, $\overset{\frown}{\lambda}^{j}$, $i = 1,2,...,l_1$, $j = 1,2,...,l_2$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ в задаче (3.1), (2.2), потребуем от них выполнения условий (3.10), (3.11) и (2.2).

Из (3.12)–(3.14) получим систему $(l_1 + l_2 + 1)n$ линейных уравнений относительно неизвестных n-мерных векторов u_0, $\overset{\smile}{\lambda}^{\nu}$, $\overset{\frown}{\lambda}^{\mu}$, $\nu = 1,2,...,l_1$, $\mu = 1,2,...,l_2$. Определив эти векторы, из представления (3.9) находим искомое решение задачи (2.1), (2.2).

В случае, если среди функций $B_i^1(x)$, $i = 1,2,...,l_1$, или $B_j^2(x)$, $j = 1,2,...,l_2$, имеются совпадающие или отличающиеся постоянными коэффициентами, то количество вспомогательных задач (4.1)–(4.3) можно уменьшить на число совпадающих функций. Например, если $k_1 B_{i_1}^1(x) = k_2 B_{i_2}^1(x) = ... = k_s B_{i_s}^1(x)$, тогда вместо векторов $\overset{\smile}{\lambda}^{i_1}, ..., \overset{\smile}{\lambda}^{i_s}$ достаточно ввести в (3.10) один вектор $\overset{\frown}{\lambda}^{i_*} = \sum\limits_{q=1}^{s} k_q u(x_{i_q})$.

Аналогично, если $k_1 B_{j_1}^1(x) = k_2 B_{j_2}^2(x) = ... = k_s B_{j_s}^2(x)$, то вместо векторов $\overset{\frown}{\lambda}^{j_1}, \overset{\frown}{\lambda}^{j_2}, ..., \overset{\frown}{\lambda}^{j_s}$ в (3.11) вводим один вектор:

$$\overset{\frown}{\lambda}^{j_*} = \sum_{q=1}^{s} k_q \int\limits_{x_{L_1+2j_q-1}}^{x_{L_1+2j_q}} C_{j_q}(\xi) u(\xi) d\xi.$$

Один из таких случаев будет продемонстрирован на примере иллюстративной задачи, приводимой в следующем разделе.

5. Иллюстративный пример

Рассмотрим решение задачи (2.1)–(2.2) при следующих данных:
$n = 2$, $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, $l_3 = 3$, $l_4 = 2$, $x \in [0,4]$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$, $x_6 = 3$, $x_7 = 4$, $x_8 = 1$, $x_9 = 2$, $x_{10} = 1$, $x_{11} = 2$, $L_1 = 2$, $L_2 = 4$, $L_3 = 7$.

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B_1^1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B_2^1(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_1^2(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D(x) = \begin{pmatrix} 2x - 26 \\ 5x^2 - 4x - 20 \end{pmatrix},\ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \beta_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться, что решением задачи является функция $u(x) = (x^2 - 1, -2x^2 + 3)^T$.

Введем обозначения

$$\overset{\smile}{\lambda}^1 = u(1), \quad \overset{\smile}{\lambda}^2 = u(2), \quad \overset{\frown}{\lambda}^1 = \int\limits_2^3 C_1(\tau)u(\tau)\,d\tau. \tag{5.1}$$

Построим вспомогательные задачи (3.5), (4.1)–(4.3):

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} F(x),\ F(0) = I_{2\times 2}\,, \tag{5.2}$$

$$\frac{d\overset{\smile}{F}^1(x)}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\smile}{F}^1(x) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{\smile}{F}^1(0) = 0_{2\times 2}\,, \tag{5.3}$$

$$\frac{d\overset{\smile}{F}^2(x)}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\smile}{F}^2(x) + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overset{\smile}{F}^2(0) = 0_{2\times 2}\,, \tag{5.4}$$

$$\frac{d\overset{\frown}{F}^1(x)}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\frown}{F}^1(x) + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \overset{\frown}{F}^1(0) = 0_{2\times 2}\,, \tag{5.5}$$

$$\frac{dF^1(x)}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} F^1(x) + \begin{pmatrix} 2t - 26 \\ 5t^2 - 4t - 20 \end{pmatrix},\ F^1(0) = 0_2\,. \tag{5.6}$$

Несложно определить решения задач Коши (5.2)–(5.6):

$$F(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} & -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{5x} \\ -\frac{3}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} & \frac{3}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{5x} \end{pmatrix},$$

$$\overset{\smile}{F}^1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{20}e^{5x} - \frac{2}{5} & \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{10}e^{5x} - \frac{8}{5} \\ -\frac{1}{4}e^x + \frac{9}{20}e^{5x} - \frac{1}{5} & -\frac{3}{2}e^x + \frac{3}{10}e^{5x} + \frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$\overset{\smile}{F}^2(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{10}e^{5x} - \frac{8}{5} & -\frac{5}{2}e^x - \frac{1}{10}e^{5x} + \frac{13}{5} \\ -\frac{3}{2}e^x + \frac{3}{10}e^{5x} + \frac{6}{5} & \frac{5}{2}e^x - \frac{3}{10}e^{5x} - \frac{11}{5} \end{pmatrix},$$

$$\overset{\frown}{F}^1(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{10}e^{5x} - \frac{8}{5} & -\frac{3}{4}e^x + \frac{3}{20}e^{5x} + \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{2}e^x + \frac{3}{10}e^{5x} + \frac{6}{5} & \frac{3}{4}e^x + \frac{9}{20}e^{5x} - \frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$F^1(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{29}{2}e^x - \dfrac{23}{10}e^{5x} + x^2 + \dfrac{84}{5} \\ \dfrac{29}{2}e^x - \dfrac{69}{10}e^{5x} - 2x^2 - \dfrac{38}{5} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь представлением (3.9) и обозначениями (5.1), получим:

$$\overset{\smile}{\lambda}{}^1 = F(1)u_0 + \overset{\smile}{F}{}^1(1)\overset{\smile}{\lambda}{}^1 + \overset{\smile}{F}{}^2(1)\overset{\smile}{\lambda}{}^2 + \overset{\frown}{F}{}^1(1)\overset{\frown}{\lambda}{}^1 + F^1(1)\,,$$

$$\overset{\smile}{\lambda}{}^2 = F(2)u_0 + \overset{\smile}{F}{}^1(2)\overset{\smile}{\lambda}{}^1 + \overset{\smile}{F}{}^2(2)\overset{\smile}{\lambda}{}^2 + \overset{\frown}{F}{}^1(2)\overset{\frown}{\lambda}{}^1 + F^1(2)\,,$$

$$\overset{\frown}{\lambda}{}^1 = \int\limits_2^3 C_1(\tau)\left[F(\tau)u_0 + \overset{\smile}{F}{}^1(\tau)\overset{\smile}{\lambda}{}^1 + \overset{\smile}{F}{}^2(\tau)\overset{\smile}{\lambda}{}^2 + \overset{\frown}{F}{}^1(\tau)\overset{\frown}{\lambda}{}^1 + F^1(\tau)\right]d\tau.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что ранг матрицы полученной системы равен 8, а ее единственным решением является следующее:

$$u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overset{\smile}{\lambda}{}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overset{\smile}{\lambda}{}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},\ \overset{\frown}{\lambda}{}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда из представления (3.9) получим искомое решение:

$$u(x) = F(x)u_0 + \overset{\smile}{F}{}^1(x)\overset{\smile}{\lambda}{}^1 + \overset{\smile}{F}{}^2(x)\overset{\smile}{\lambda}{}^2 + \overset{\frown}{F}{}^1(x)\overset{\frown}{\lambda}{}^1 + F^1(x) =$$

$$= \left(x^2 - 1, -2x^2 + 3\right)^T, \quad x \in [0,\ 4].$$

6. Заключение

Предложен подход к исследованию и решению класса нелокальных задач относительно линейных обыкновенных точечно и интегрально нагруженных дифференциальных уравнений. Основная специфика интегральных нагружений заключается в том, что ядра интегральных слагаемых зависят только от одной переменной интегрирования. Это позволило свести решение исходной задачи к решению вспомогательных задач Коши относительно обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотренная задача имеет самостоятельный интерес. К ней приводятся задачи оптимального управления объектами с обратной связью, в которых замеры текущего состояния объекта могут иметь точечный и интегральный характер.

Получены условия существования и единственности решения рассмотренного класса задач, приводится исследование и решение одной иллюстративной задачи.

Список источников

1. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 91. С. 1585–1595 .
2. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1096–1109. https://doi.org/10.7868/S0044466914070023
3. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Численное решение задачи определения количества и мест замеров состояния при управлении процессом нагрева с обратной связью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 1. С. 83–94.
4. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Подход к численному решению задач оптимального управления нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 5. С. 739–751. https://doi.org/10.1134/S0044466919050028
5. Айда-заде К. Р., Абдуллаев В. М. О решении краевых задач с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1152–1162.
6. Айда-заде К. Р., Гашимов В. А. Синтез локально сосредоточенных управлений стабилизацией мембраны с оптимизацией размещения точек контроля и гасителей колебаний // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 7. С. 1126–1142.
7. Алиханов А. А, Березков А. М., Шхануков-Лафишев М. Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 9. С. 1619–1628.
8. Асанова А. Т., Иманчиев А. Е., Кадирбаева Ж. М. О численном решении систем обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 4. С. 520–529. https://doi.org/10.7868/S0044466918040038
9. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы : Компьютер. центр ИТПМ, 1995. 270 с.
10. Дженалиев М. Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 4. С. 641–651.
11. Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А. О признаках однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1125–1140.
12. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.

13. Яковлев М. Н. Оценки решений систем нагруженных интегро-дифференциальных уравнений, подчиненных многоточечным и интегральным краевым условиям // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 124. С. 131–139.
14. Abdullayev V. M. Identification of the functions of response to loading for stationary systems // Cybern. Syst. Anal. 2017. Vol. 53, N 3. P. 417–425. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9942-6
15. Abdullayev V. M., Aida-Zade K. R. Rod temperature regulation using current and time-delayed feedback // Quaestiones Mathematicae. 2023. Vol. 46, N 10. P. 1991–2011. https://doi.org/10.2989/16073606.2022.2125454
16. Aida-Zade K. R., Abdullayev V. M. Numerical method for solving the parametric identification problem for loaded differential equations // Bull. Iran. Math. Soc. 2019. Vol. 45, N 6. P. 1725–1742. https://doi.org/10.1007/s41980-019-00225-3
17. Aida-zade K. R., Abdullayev V. M. To the solution of integro-differential equations with nonlocal conditions // Turkish Journal of Mathematics. 2022. Vol. 46, N 1. P. 177–188. https://doi.org/10.3906/mat-2108-89
18. Baiburin M.M., Providas E. Exact Solution to Systems of Linear First-Order Integro-Differential Equations with Multipoint and Integral Conditions // Mathematical Analysis and Applications. Springer Optimization and Its Applications / Rassias T., Pardalos P. (eds.). Springer, Cham., 2019. Vol. 154. P. 591–609. https://doi.org/10.1007/978-3-030-31339-5_1
19. Bakirova E. A., Assanova A. T., Kadirbayeva Zh. M. A problem with parameter for the integro-differential equations // Mathematical Modelling and Analysis. 2021. Vol. 26, N 1. P. 34–54. https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977
20. Baltaeva I. I., Rakhimov I. D., Khasanov M. M. Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 85–95. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.85
21. Moszynski K. A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differential equation // Algorytmy. Varshava. 1964. Vol. 11, N 3. P. 25–43.
22. Parasidis I. N., Providas E. On the exact solution of nonlinear integro-differential equations // Applications of Nonlinear Analysis / ed. by T. Rassias. Springer Optimization and Its Applications. Springer, Cham, 2018. Vol. 134. P.591–609. https://doi.org/10.1007/978-3-319-89815-5_21
23. Talaei Y., Noeiaghdam S., Hosseinzadeh H. Numerical Solution of Fractional Order Fredholm Integro-differential Equations by Spectral Method with Fractional Basis Functions // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 89–103. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.89

References

1. Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 4, no. 9, pp. 1505–1515.
2. Abdullaev V.M., Aida-Zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1096–1109. https://doi.org/10.1134/S0965542514070021

3. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Numerical Solution of the Problem of Determining the Number and Locations of State Observation Points in Feedback Control of a Heating Process. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 1, pp. 78–89. https://doi.org/10.1134/S0965542518010025
4. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Approach to the numerical solution of optimal control problems for loaded differential equations with nonlocal conditions. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 5, pp. 739–751. https://doi.org/10.1134/S0965542519050026
5. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the solution of boundary value problems with nonseparated multipoint and integral conditions. *Diff. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1114–1125. https://doi.org/10.1134/S0012266113090061
6. Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Synthesis of locally lumped controls for membrane stabilization with optimization of sensor and vibration suppressor locations. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 7, pp. 1126–1142. https://doi.org/10.1134/S0965542520050024
7. Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov-Lafishev M.X. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 9, pp. 1619–1628. https://doi.org/10.1134/S096554250809008X
8. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 4, pp. 520–529. https://doi.org/10.1134/S096554251804005X
9. Dzhenaliev M.T. *K teorii lineinykh kraevykh zadach dlia nagruzhennykh differentsialnykh uravnenii* [On the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations]. Almaty, Gylym Publ., 1995, 270 p. (in Russian)
10. Dzhenaliev M.T. Optimal control of linear loaded parabolic equations. *Differ. Equations*, 1989, vol. 25, no. 4, pp. 437–445.
11. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1087–1102. https://doi.org/10.1134/S0012266113090048
12. Nakhushev A.M.*Nagruzhennye uravneniia i ikh primenenie [Loaded Equations and Applications]*. Moscow, Nauka Publ., 2012, 232 p. (in Russian)
13. Yakovlev M.N. Otsenki reshenii sistem nagruzhennykh integro-differentsialnykh uravnenii, podchinennykh mnogotochechnym i integralnym kraevym usloviiam [Estimates for solutions to systems of loaded integro-differential equations subject to multi-point and integral boundary conditions]. *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI* [Notes of scientific seminars LOMI], 1983, vol. 124, pp. 131–139. (in Russian)
14. Abdullayev V.M. Identification of the functions of response to loading for stationary systems. *Cybern. Syst. Anal.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 417–425. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9942-6
15. Abdullayev V.M., Aida-Zade K.R. Rod temperature regulation using current and time-delayed feedback. *Quaestiones Mathematicae*, 2023, vol. 46, no. 10, pp. 1991–2011. https://doi.org/10.2989/16073606.2022.2125454
16. Aida-Zade K.R., Abdullayev V.M. Numerical method for solving the parametric identification problem for loaded differential equations. *Bull. Iran. Math. Soc.*, 2019, vol. 45, no. 6, pp. 1725–1742. https://doi.org/10.1007/s41980-019-00225-3
17. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. To the solution of integro-differential equations with nonlocal conditions. *Turkish Journal of Mathematics*, 2022, vol. 46, no. 1, pp. 177–188. https://doi.org/10.3906/mat-2108-89

18. Baiburin M.M., Providas E. Exact Solution to Systems of Linear First-Order Integro-Differential Equations with Multipoint and Integral Conditions*Mathematical Analysis and Applications. Springer Optimization and Its Applications.* Ed. by Rassias T., Pardalos P. Springer, Cham., 2019, vol. 154, pp. 591–609. https://doi.org/10.1007/978-3-030-31339-5_1
19. Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. A problem with parameter for the integro-differential equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2021, vol. 26, no. 1, pp. 34–54. https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977
20. Baltaeva I.I., Rakhimov I.D., Khasanov M.M. Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg-de Vries Equation. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 85–95. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.85
21. Moszynski K. A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differential equation. *Algorytmy*, 1964, vol. 11, no. 3, pp. 25–43.
22. Parasidis I.N., Providas E. On the exact solution of nonlinear integro-differential equations. *Applications of Nonlinear Analysis.* Ed. by T. Rassias. Springer Optimization and Its Applications. Springer, Cham 2018, vol. 134, pp. 591–609. https://doi.org/10.1007/978-3-319-89815-5_21
23. Talaei Y., Noeiaghdam S., Hosseinzadeh H. Numerical Solution of Fractional Order Fredholm Integro-differential Equations by Spectral Method with Fractional Basis Functions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 89–103. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.89

Об авторах

Абдуллаев Вагиф Маариф оглы, д-р физ.-мат. наук, проф., Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности; ведущий научный сотрудник, Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики; сотрудник Научно-исследовательского центра Западно-Каспийского университета, Баку, AZ1141, Азербайджан, vaqif_ab@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0001-7772-1226

About the authors

Vagif M. Abdullayev, Dr. Sci. (Phys.Math.), Prof., Azerbaijan State Oil and Industry University and Senior Researcher of Institute of Control Systems of Ministry of Science and Education of Republic of Azerbaijan; employee of the Scientific and Innovation Center of the Western Caspian University, Baku, AZ1141, Azerbaijan, vaqif_ab@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0001-7772-1226

Поступила в редакцию / Received 22.01.2024
Поступила после рецензирования / Revised 11.03.2024
Принята к публикации / Accepted 18.03.2024