Серия «Математика»
2024. Т. 48. С. 111—128

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.716
MSC 03B50, 08A99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.111

Решетка E-замкнутых классов мультифункций ранга 2

Б. П. Ильин[1✉], **В. И. Пантелеев**[1]

[1] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ ilin_bp@math.isu.ru

Аннотация. Рассматривается классификация мультифункций, заданных на двухэлементном множестве, относительно оператора E-замыкания. Показано, что эта классификация содержит 359 замкнутых классов, среди которых есть 138 пар двойственных классов и 83 самодвойственных класса. Введено понятие разделяющих множеств. С помощью жадного алгоритма задачи о покрытии множества получены 22 множества, разделяющие все E-замкнутые классы мультифункций. Приведены примеры порождающих множеств, содержащие собственно мультифункции.

Ключевые слова: замыкание, предикат равенства, мультифункция, замкнутое множество, суперпозиция

Ссылка для цитирования: Ильин Б. П., Пантелеев В. И. Решетка E-замкнутых классов мультифункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 48. С. 111–128.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.111

Research article

Lattice of E-closed Classes of Multifunctions of Rank 2

Boris P. Ilyin[1✉], **Vladimir I. Panteleev**[1]

[1] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
✉ ilin_bp@math.isu.ru

Abstract. Multifunctions are discrete functions defined on a finite set and returning as their values all subsets of the considered set.
The paper considers the classification of multifunctions defined on a two-element set with respect to the E-closure operator. E-closed sets of multifunctions are sets that are closed under superposition, the closure operator with branching by the equality predicate,

the identification of variables, and the addition of dummy variables. The concept of separating sets was introduced using a greedy algorithm for the set covering problem, and 22 classes of separating sets were obtained. It is shown that the classification under consideration leads to a finite set of closed classes. The work describes all 359 E-closed classes of multifunctions, among which there are 138 pairs of dual classes and 83 self-dual classes.
For each class consisting only of multifunctions, its generating system is indicated.

Keywords: closure, equality predicate, multifunction, closed set, composition

For citation: Ilyin B. P., Panteleev V. I. Lattice of E-closed Classes of Multifunctions of Rank 2. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 48, pp. 111–128. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.111

Введение

Операторы замыкания являются одним из основных инструментов классификации дискретных функций. Помимо широко известного оператора суперпозиции, имеется еще целый ряд так называемых сильных операторов замыкания, порождающих конечные либо счетные классификации. К таким сильным операторам относятся, например, операторы параметрического замыкания и его расширения [4; 8], позитивного замыкания и его расширения [6; 10], оператор по перечислению [7], эквациональный оператор [5].

Наиболее изученными являются классификции, построенные на основе оператора разветвления по предикату равенства [2]. Соответствующие этому оператору замкнутые классы называются Е-замкнутыми классами. Исследование E-замкнутых классов булевых функций, частичных булевых функций и функций многозначной логики приведено в работах [2; 3; 9; 12].

В настоящей работе рассматривается множество мультифункций ранга 2 (M_2) относительно суперпозиции по объединению и оператора разветвления по предикату равенства (E-оператора). Как известно, рассматриваемый оператор суперпозиции порождает континуум замкнутых классов мультифункций ранга 2 [11]. E-оператор, действуя вместе с суперпозицией, позволяет получить конечную классификацию.

В работе приведено полное описание решетки E-замкнутых классов, что завершает исследования, проводимые в [1; 13–15].

1. Основные понятия

Пусть $E_2 = \{0,1\}$ и $\alpha_i \in E_2$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, тогда выражение $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ называется двоичным набором или просто набором и обозначается $\tilde{\alpha}$, а число n называется длиной этого набора. Если длина набора $\tilde{\alpha}$ явно не указана, она определяется по контексту.

Множество всех мультифункций ранга 2 обозначается как M_2 и определяется следующим образом:

$$M_{2,n} = \left\{f \mid f: E_2^n \to 2^{E_2}\right\},\ M_2 = \bigcup_n M_{2,n}.$$

При дальнейшем изложении не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества, для E_2 будем использовать обозначение «$-$» (прочерк), а для пустого множества — «$*$».

Множество M_2 содержит множество гиперфункций (H_2), множество частичных булевых функций (O_2^*) и множество функций алгебры логики (O_2):

$$H_{2,n} = \left\{f \mid f: E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\right\},\ H_2 = \bigcup_n H_{2,n},$$

$$\mathrm{O}_{2,n}^* = \{f \mid f: E_2^n \to E_2 \cup \{\varnothing\}\},\ \mathrm{O}_2^* = \bigcup_n \mathrm{O}_{2,n}^*,$$

$$\mathrm{O}_{2,n} = \{f \mid f: E_2^n \to E_2\},\ \mathrm{O}_2 = \bigcup_n \mathrm{O}_{2,n}.$$

Все двоичные наборы из множества E_2^n будем считать упорядоченными в соответствии с натуральным порядком, $\tilde{0}$ — набор, состоящий из одних 0, а $\tilde{1}$ — набор, состоящий из одних 1. Для мультифункции f, зависящей от n переменных, будем использовать запись в виде вектора $(\tau_{\tilde{0}},\ldots,\tau_{\tilde{1}})$ длины 2^n, где каждый элемент $\tau_{\tilde{\sigma}}$ есть $f(\tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma} \in E_2^n$. Для одноместных и двухместных мультифункций такой вектор имеет вид $(f(0)\,f(1))$ и $(f(0,0)\,f(0,1)\,f(1,0)\,f(1,1))$, соответственно.

Через Q^n будем обозначать множество всех n-местных функций из класса Q. Функции $e_i^n(x_1,\ldots,x_n) = x_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, будем называть селекторными функциями или переменными.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m)$ — мультифункции. Суперпозиция $f(f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m))$ задает мультифункцию $g(x_1,\ldots,x_m)$ следующим образом: для набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ из E_2^m по определению

$$g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

Определенный таким образом оператор будем называть суперпозицией по объединению (S_U-суперпозицией). Он позволяет находить значение мультифункции на наборах, составленных из элементов множества 2^{E_2}, рассматривая элемент набора как функцию-константу, например $f(\{0\},\{0,1\}) = f(0,-)$ есть $f(0,0) \cup f(0,1)$.

Будем говорить, что функция $g(x_1,\dots,x_n)$ получается из мультифункций $f_1(x_1,\dots,x_n)$, $f_2(x_1,\dots,x_n)$ с помощью оператора разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i,j \in \{1,\dots,n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1,\dots,x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем в работе будем использовать предложенную в [13] терминологию ES_U-замыкания множества мультифункций, где ES_U-замыкание множества мультифункций Q ($[Q]_E$) определяется как пересечение всех множеств, замкнутых относительно операций введения фиктивных переменных, отождествления и перестановки переменных, S_U-суперпозиции, разветвления по предикату равенства, и содержащих множество Q. Для краткости и в соответствии с [2] будем вместо термина «ES_U-замыкание» использовать термин «E-замыкание».

Понятие двойственных функций используем стандартным образом. Класс, состоящий из всех мультифункций, двойственных к мультифункциям некоторого класса Q, назовем двойственным к классу Q и обозначим Q^d. Если класс Q является E-замкнутым, то класс Q^d тоже будет E-замкнутым. Класс Q будем называть самодвойственным, если $Q = Q^d$.

Рассматривая значения некоторой мультифункции f на двух наборах $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ и $(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$, для столбца $\begin{pmatrix} f(\beta_1,\dots,\beta_m) \\ f(\gamma_1,\dots,\gamma_m) \end{pmatrix}$ будем использовать запись $f\begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_m \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_m \end{pmatrix}$. Столбец $\binom{a}{b}$ будем записывать как со скобками, так и без, если это не вызывает недоразумений. В множествах, элементами которых являются столбцы вида $\binom{a}{b}$ или $\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$ (без скобок), будем опускать запятые.

2. Оператор обобщенного разветвления по предикату равенства

E-замкнутость на множестве M_2 сводится к E-замкнутости множеств двухместных функций.

Предложение 1. *Любой E-замкнутый класс мультифункций из M_2 E-порождается множеством всех своих мультифункций, зависящих не более чем от двух переменных.*

Доказательство. Справедливость утверждения получается повторением соответствующего утверждения из [12]. □

Предложение 1 показывает, что число E-замкнутых классов в M_2 конечно. Кроме того, для любых двух E-замкнутых классов Q_1 и Q_2 включение $Q_1 \subseteq Q_2$ эквивалентно включению $Q_1^2 \subseteq Q_2^2$.

Таким образом, задача описания всех E-замкнутых классов в M_2 сводится к построению всех замкнутых множеств мультифункций двух переменных. Но в [14] приведен пример (аналогичный упоминаемому в [9]), показывающий, что для гиперфункций, а значит, и для мультифункций нельзя использовать простой перебор порождающих множеств, состоящих только из двухместных функций.

Пример 1. Рассмотрим три гиперфункции $f_1(x_1, x_2) = (-101)$, $f_2(x_1, x_2) = (-011)$ и $f_3(x_1, x_2) = (-1-1)$. Применение операторов суперпозиции и разветвления по предикату равенства к f_1, f_2, f_3 без использования функций большего числа переменных позволяет получать только эти гиперфункции. Но если рассмотреть гиперфункцию $g(x_1, x_2, x_3)$ такую, что

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & \text{если } x_1 = x_3, \\ f_2(x_1, x_2), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то можно получить, например, гиперфункцию $f(x_1, x_2) = (-0-1)$:

$$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, f_3(x_2)).$$

Для использования компьютерного перебора введем новый оператор — оператор обобщенного разветвления по предикату равенства.

Пусть мультифункции g_1, g_2, h_1 и h_2 зависят от двух переменных. Для произвольного двоичного набора (α_1, α_2) значение двухместной функции f определяется следующим образом:

- если $h_1(\alpha_1, \alpha_2), h_2(\alpha_1, \alpha_2) \in E_2$, то
$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & \text{при } h_1(\alpha_1, \alpha_2) = h_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{в противном случае;} \end{cases}$$
- если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = -$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = -$, то
$$f(\alpha_1, \alpha_2) = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2);$$
- если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = *$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = *$, то
$$f(\alpha_1, \alpha_2) = *.$$

Будем говорить, что мультифункция f получается из мультифункций g_1, g_2, h_1, h_2 с помощью операции обобщенного разветвления по предикату равенства (Ex-оператора).

Также ограничим действие суперпозиции. Далее будем рассматривать суперпозиции только следующего вида:

$$g_1(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)).$$

В этих операторах в качестве функций h_1 и h_2 допускается использование селекторных функций. Замыкание множества Q, полученное относительно операторов обобщенного разветвления по предикату равенства и ограниченной суперпозиции, будем обозначать $[Q]_{Ex}$.

3. Ex-замкнутые классы множества M_2

Определение Ex-замыкания позволяет сформулировать алгоритм построения Ex-замкнутых классов мультифункций.

В процессе работы алгоритм строит Ex-порождающие множества двухместных функций. За одну итерацию применяется набор операций ограниченной суперпозиции и набор операций обобщенного разветвления по предикату равенства. Ниже приведено описание алгоритма в виде псевдокода.

```
function get_multyfunction_classes() {
vars
  F: collection<function>;
  Q: collection<class>;
  A: class;
for each f in M₂ do {
  A = new class;
  A ← f;
  while has_new(A) do {
    A ← composition(A);
    A ← Ex(A);
  }
  if is_new(Q, A) then{
    Q ← A;
    F ← f;
  }
}
while has_new(Q) do {
  for each B in Q do {
    for each f in F do {
      B ← f;
      while has_new(B) do {
        B ← composition(B);
        B ← Ex(B);
      }
      if is_new(Q, B) then{
        Q ← B;
      }
    }
```

```
  }
}
return Q;
}
```

Алгоритм был реализован на языке программирования Java. С помощью компьютерной программы было получено, что в M_2 имеется ровно 359 Ex-замкнутых классов мультфункций, из них 100 классов совпадают с классами, описанными в [9], 78 классов гиперфункций совпадают с классами из [14]. Среди оставшихся 152 класса разбиваются на пары попарно двойственных классов и 37 классов являются самодвойственными, 8 классов булевых функций присутствуют во всех этих наборах.

Приведем порождающие системы для несамодвойственных классов $A_0, \ldots, A_{75}$:

$$A_0 = \{(- * **)\}, A_1 = \{(- - - *)\}, A_2 = \{(-0 * *)\}, A_3 = \{(-1 * *)\},$$
$$A_4 = \{(0 - **)\}, A_5 = \{(*0 * *), (* - **)\}, A_6 = \{(* * **), (- * **)\},$$
$$A_7 = \{(-0 * *), (-1 * *)\}, A_8 = \{(01 * *), (0 - **)\},$$
$$A_9 = \{(* * **), (- - -*)\}, A_{10} = \{(- * **), (- * *-)\}, A_{11} = \{(-00*)\},$$
$$A_{12} = \{(-10*)\}, A_{13} = \{(* - 0*)\}, A_{14} = \{(0 - 0*)\}, A_{15} = \{(-11*)\},$$
$$A_{16} = \{(- * *1)\}, A_{17} = \{(-0 * -)\}, A_{18} = \{(010*), (0 - **)\},$$
$$A_{19} = \{(* * **), (0 - **)\}, A_{20} = \{(0 * **), (- * **)\},$$
$$A_{21} = \{(0 * **), (-1 * *)\}, A_{22} = \{(*0 * *), (* - *1)\}, A_{23} = \{(1 - **)\},$$
$$A_{24} = \{(* * **), (-0 * *)\}, A_{25} = \{(0 - 1*)\}, A_{26} = \{(-0 * 1)\},$$
$$A_{27} = \{(-0 * *), (-11*)\}, A_{28} = \{(* * **), (0 - 0*)\},$$
$$A_{29} = \{(0 * **), (-00*)\}, A_{30} = \{(0 * **), (-10*)\},$$
$$A_{31} = \{(0 * **), (0 - *1)\}, A_{32} = \{(- * **), (- * *1)\},$$
$$A_{33} = \{(* - **), (010*)\}, A_{34} = \{(- * *1), (- * *-)\},$$
$$A_{35} = \{(* - *0), (0 * **)\}, A_{36} = \{(* * *-), (1 * **)\},$$
$$A_{37} = \{(1 - 1*)\}, A_{38} = \{(- * *0)\}, A_{39} = \{(0 - *0)\},$$
$$A_{40} = \{(* * **), (-00*)\}, A_{41} = \{(0 * *1), (- * **)\},$$
$$A_{42} = \{(- * **), (-1 * -)\}, A_{43} = \{(* * **), (0 * **), (0 - *1)\},$$
$$A_{44} = \{(0 * **), (1 - **)\}, A_{45} = \{(* * **), (0 - 1*)\},$$
$$A_{46} = \{(0 * **), (-11*)\}, A_{47} = \{(0 * **), (0 - 01)\},$$
$$A_{48} = \{(- * **), (-0 * 1)\}, A_{49} = \{(0 * *1), (- * *1)\},$$

$$A_{50} = \{(-**1), (-0*-)\}, A_{51} = \{(*1*-), (0***)\},$$
$$A_{52} = \{(****), (-10*)\}, A_{53} = \{(****), (-**1)\},$$
$$A_{54} = \{(*-00), (0***)\}, A_{55} = \{(*10-), (0***)\},$$
$$A_{56} = \{(0-*1), (1***)\}, A_{57} = \{(*11-), (1***)\},$$
$$A_{58} = \{(0***), (-**1)\}, A_{59} = \{(0001), (-***)\},$$
$$A_{60} = \{(****), (0***), (0--1)\}, A_{61} = \{(****), (0-*0)\},$$
$$A_{62} = \{(0***), (-**0)\}, A_{63} = \{(***0), (0***), (0-*1)\},$$
$$A_{64} = \{(1-0*)\}, A_{65} = \{(-1*0)\}, A_{66} = \{(0***), (0-10)\},$$
$$A_{67} = \{(0***), (0**1), (--11)\}, A_{68} = \{(****), (-0*1)\},$$
$$A_{69} = \{(*-10), (0***)\}, A_{70} = \{(0-01), (1***)\},$$
$$A_{71} = \{(****), (-**0)\}, A_{72} = \{(****), (0**1), (--11)\},$$
$$A_{73} = \{(***0), (0***), (0--1)\}, A_{74} = \{(****), (0-10)\},$$
$$A_{75} = \{(0***), (-1*0)\}.$$

Самодвойственные классы $B_0, \ldots, B_{36}$ порождаются следующими множествами:

$$B_0 = \{(*--*)\}, B_1 = \{(-**-)\}, B_2 = \{(*-**)\},$$
$$B_3 = \{(--*-)\}, B_4 = \{(****), (-**-)\}, B_5 = \{(*-**), (*--*)\},$$
$$B_6 = \{(*10*), (*--*)\}, B_7 = \{(0**1), (0--1)\},$$
$$B_8 = \{(-**-), (-10-)\}, B_9 = \{(*0**), (*1**), (*-**)\},$$
$$B_{10} = \{(****), (0--1)\}, B_{11} = \{(0**1), (-**-)\},$$
$$B_{12} = \{(0-*1)\}, B_{13} = \{(***-), (-***)\},$$
$$B_{14} = \{(*10*), (*-**)\}, B_{15} = \{(*---), (-***)\},$$
$$B_{16} = \{(****), (1--0)\}, B_{17} = \{(****), (--*-)\},$$
$$B_{18} = \{(*0**), (*-1*)\}, B_{19} = \{(0**1), (0-01)\},$$
$$B_{20} = \{(-0*-), (-1*-)\}, B_{21} = \{(****), (0-*1)\},$$
$$B_{22} = \{(*-*1), (0***)\}, B_{23} = \{(*101), (0-**)\},$$
$$B_{24} = \{(****), (0-01)\}, B_{25} = \{(*-*1), (0***), (0**1)\},$$
$$B_{26} = \{(*-01), (0***)\}, B_{27} = \{(0**-), (-**1)\},$$
$$B_{28} = \{(*-*0), (1***)\}, B_{29} = \{(*10-), (1***)\},$$
$$B_{30} = \{(0**1), (-0*-)\}, B_{31} = \{(*-11), (0***), (0**1)\},$$
$$B_{32} = \{(***-), (0101), (-***)\},$$
$$B_{33} = \{(1-*0)\}, B_{34} = \{(*-00), (1***)\},$$
$$B_{35} = \{(***-), (0--1), (-***)\}, B_{36} = M_2 = \{(****), (-1*0)\}.$$

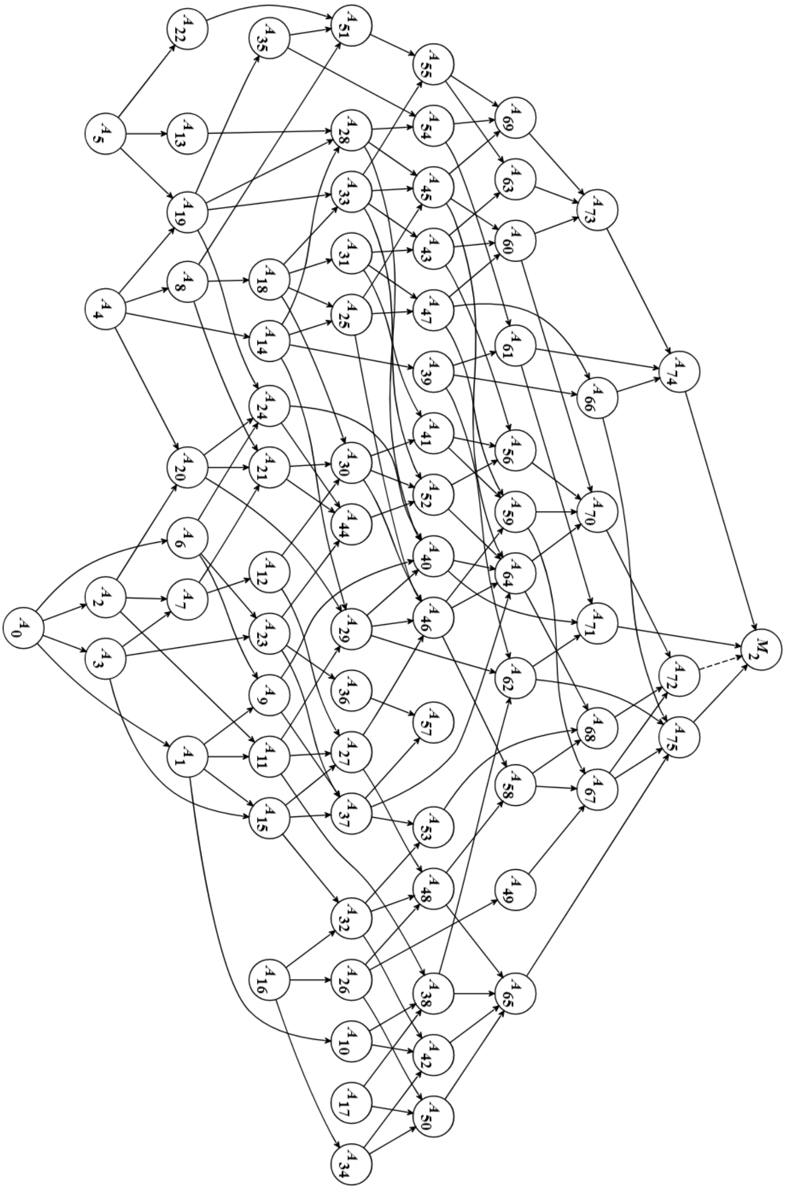

Рис. Решетка несамодвойственных классов $A_0, \ldots, A_{75}$

4. Разделяющие множества

Полученный в предыдущем параграфе результат позволяет оценить сверху число E-замкнутых классов гиперфункций.

Теорема 1. *Для любого множества Q выполняется*

$$[Q]_{Ex} \subseteq [Q]_E.$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассмотреть только оператор обобщенного разветвления по предикату равенства. Пусть мультифункция $g(x_1, x_2)$ получена из функций g_1, g_2, h_1, h_2. Покажем, что $g(x_1, x_2)$ можно представить формулой с использованием обычных операторов E-замыкания.

Положим

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} g_1(x, y), & \text{если } z = t, \\ g_2(x, y), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим мультифункцию $U(x, y)$ следующим образом:

$$U(x, y) = f(x, y, h_1(x, y), h_2(x, y)),$$

и вычислим ее возможные значения на некотором наборе (α_1, α_2). Пусть $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = \tau_1$ и $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = \tau_2$. Рассмотрим все варианты значений τ_1 и τ_2.

- Пусть $\tau_1 \in E_2$ и $\tau_2 \in E_2$. Тогда

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & \text{если } \tau_1 = \tau_2, \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- Пусть $\tau_1 = *$. В этом случае

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, *, \tau_2) = *.$$

  Аналогичным образом рассматривается случай $\tau_2 = *$.

- Пусть $\tau_1 = -$ и $\tau_2 \in E_2$. Тогда

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, -, \tau_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, 0, \tau_2) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 1, \tau_2) = \\ = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

  Аналогичным образом рассматривается случай $\tau_1 \in E_2$ и $\tau_2 = -$.

- Если $\tau_1 = -$ и $\tau_2 = -$, то

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \alpha_2, -, -) = \\ = f(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 0, 1) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 1, 0) \cup f(\alpha_1, \alpha_2, 1, 1) = \\ = g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Таким образом, на произвольном наборе значений переменных значения мультифункции U совпадают со значением мультифункции g, следовательно, справедливо $[Q]_E \supseteq [Q]_{Ex}$. $\square$

Очевидно, что каждый Ex-замкнутый класс порождает E-замкнутое множество, поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Число E-замкнутых классов не больше чем 359.*

Далее покажем, что E-замкнутые классы, порожденные различными Ex-замкнутыми классами, являются различными. А для этого введем понятие разделяющих множеств.

Теорема 2. *Пусть K_1 и K_2 — два различных множества мультифункций. Если найдутся различные Ex-замкнутые множества A и B такие, что $K_1 \subseteq A$, $K_1 \nsubseteq B$, $K_2 \subseteq B$, то $[K_1]_{Ex} \neq [K_2]_{Ex}$.*

Доказательство. Пусть A, B — различные Ex-замкнутые множества.

Так как $K_1 \nsubseteq B$, то найдется f такая, что $f \in K_1$ и $f \notin B$. Из $f \in K_1$ следует $f \in [K_1]_{Ex}$. По условию $K_2 \subseteq B$, а значит, и $[K_2]_{Ex} \subseteq B$. Но $f \notin B$, а следовательно, $f \notin [K_2]_{Ex}$.

Отсюда следует вывод, что $[K_1]_{Ex}$ и $[K_2]_{Ex}$ различны. $\square$

Множества A и B из условия теоремы 2 назовем Ex-разделяющими множествами для множеств K_1 и K_2. Найдем наименьшую систему Ex-разделяющих множеств для всех 359 Ex-замкнутых классов.

Для нахождения разделяющих множеств был использован жадный алгоритм решения задачи о покрытии множества.

Для работы алгоритма требуется выполнить следующие подготовительные шаги:

1) В качестве исходной матрицы для работы алгоритма должна быть построена матрица A включения одного множества мультифункций в другое. В случае с M_2 задается матрица размером 359 на 359 элементов, которая заполняется следующим образом: если множество $K_i \subseteq K_j$, то элемент матрицы $a_{ij} = 1$, в противном случае $a_{ij} = 0$.
2) На основе полученной матрицы A строится новая матрица B путем построения сочетаний всех пар строк матрицы A ($C_{359}^2 = 64261$) и нахождения в них результата поэлементного сложения по модулю 2, т. е. если $a_{ij} = a_{kj}$, то $b_{tj} = 0$ и $b_{tj} = 1$ в противном случае, где t — индекс новой строки матрицы B.

После построения матрицы B алгоритм выполняет следующие действия:

1) в матрице B находится строка, содержащая ровно одну единицу;

2) из матрицы удаляются все строки, содержащие ровно одну единицу в том же столбце, что и в найденной на предыдущем шаге строке;
3) номер этого столбца запоминается;
4) процесс повторяется до тех пор, пока матрица не окажется пустой.

Итогом работы алгоритма являются номера столбцов, которые соответствуют множествам мультифункций.

В результате работы данного алгоритма было установлено, что для всех 359 E_x-замкнутых множеств разделяющими являются 22 множества $L_1 - L_{22}$, которые мы разобьем на три группы.

Первая группа. Множества функций, задаваемых своими значениями на противоположных наборах $L_1 - L_9$ (ниже для всех наборов $\tilde{\alpha}$ выполняется $\tilde{\alpha} \in E_2^n$):

$$L_1 = O_2^* = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (*,0), (*,1), (0,*), (0,0), (0,1), (1,*), (1,0), (1,1)\}\};$$

$$L_2 = H_2 = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(-,-), (-,0), (-,1), (0,-), (0,0), (0,1), (1,-), (1,0), (1,1)\}\};$$

$$L_3 = [A_{71}]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (*,-), (*,0), (-,*), (-,-), (-,0), (0,*), (0,-), (0,0)\}\};$$

$$L_4 = [A_{71}^d]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (*,-), (*,1), (-,*), (-,-), (-,1), (1,*), (1,-), (1,1)\}\};$$

$$L_5 = [B_{16}]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (0,1), (1,0), (-,-)\}\};$$

$$L_6 = U_4\ [15] = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(-,-), (-,0), (-,1), (0,-), (1,-)\}\};$$

$$L_7 = S^-\ [15] = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(-,-), (-,0), (-,1), (0,-), (0,1), (1,-), (1,0)\}\};$$

$$L_8 = [B_{28}]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (*,-), (*,0), (*,1), (-,*), (0,*), (1,*)\}\};$$

$$L_9 = [B_{33}]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})\big) \in \{(*,*), (*,-), (*,0), (*,1), (-,*), (0,*), (0,1), (1,*), (1,0)\}\}.$$

Вторая группа. Множества функций, задаваемых своими значениями на наборах $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$:

$$L_{10} = [B_{27}]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(-,-), (-,1), (0,-)\}\};$$

$$L_{11} = [A_{68}]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(*,*), (-,*), (-,1), (0,*), (1,*)\}\};$$

$$L_{12} = [A_{68}^d]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(*,*), (*,-), (*,0), (*,1), (0,-)\}\};$$

$$L_{13} = [A_{72}]_{Ex} = \{f \mid \big(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})\big) \in \{(*,*), (-,*), (-,1), (0,*), (0,1), (1,*)\}\};$$

$$L_{14}=[A^d_{72}]_{Ex}=\{f\mid \big(f(\tilde{0}),f(\tilde{1})\big)\in\{(*,*),(*,-),(*,0),(*,1),(0,-),(0,1)\}\};$$
$$L_{15}=[B_{34}]_{Ex}=\{f\mid \big(f(\tilde{0}),f(\tilde{1})\big)\in\{(*,*),(*,-),(*,0),(*,1),(-,*),(0,*),(1,*)\}\};$$
$$L_{16}=[B_{35}]_{Ex}=\{f\mid \big(f(\tilde{0}),f(\tilde{1})\big)\in\{(*,*),(*,-),(*,0),(*,1),(-,*),(0,*),(0,1),(1,*)\}\}.$$

Третья группа. Множества функций, задаваемых своими значениями на одном из наборов $\tilde{0}$ или $\tilde{1}$:

$$L_{17}=[A_{65}]_{Ex}=\{f\mid f(\tilde{0})\in\{-\}\}; \quad L_{18}=[A^d_{65}]_{Ex}=\{f\mid f(\tilde{1})\in\{-\}\};$$
$$L_{19}=[A_{74}]_{Ex}=\{f\mid f(\tilde{0})\in\{*,0\}\}; \quad L_{20}=[A^d_{74}]_{Ex}=\{f\mid f(\tilde{1})\in\{*,1\}\};$$
$$L_{21}=[A_{75}]_{Ex}=\{f\mid f(\tilde{0})\in\{-,0\}\}; \quad L_{22}=[A^d_{75}]_{Ex}=\{f\mid f(\tilde{1})\in\{-,1\}\}.$$

Теорема 3. *Пусть K_1 и K_2 — различные Ex-замкнутые множества, A и B — различные E-замкнутые множества. Если $K_1\subseteq A$, $K_1\nsubseteq B$, $K_2\subseteq B$, то $[K_1]_E\neq[K_2]_E$.*

Доказательство. Пусть A,B — E-замкнутые множества, $K_3=[K_1]_E$, $K_4=[K_2]_E$.

Так как $K_1\nsubseteq B$, то найдется f такая, что $f\in K_1$ и $f\notin B$. Из $f\in K_1$ следует $f\in K_3$.

Справедливо, что $K_2\subseteq B$, а значит, справедливо и $K_4\subseteq B$. Поэтому выполняется $f\notin K_4$.

Отсюда следует вывод, что $[K_1]_E$ и $[K_2]_E$ различны. □

Для доказательства того, что все 359 E_x-замкнутых классов являются E-различными, покажем, что полученные выше 22 класса являются E-замкнутыми. При этом заметим, что в силу определения классов достаточно проверить замкнутость этих множеств относительно оператора суперпозиции.

Лемма 1. *Множества L_1 – L_9 являются E-замкнутыми классами.*

Доказательство. L_1 — множество всех частичных функций, L_2 — множество всех гиперфункций, L_3 — это класс функций, не возвращающих 1, а множество L_4 — это класс функций, не возвращающих 0. Очевидно, что все эти множества замкнуты относительно суперпозиции.

Рассматривая оставшиеся классы, предположим, что суперпозиция $f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$ функций из некоторого класса K задает функцию $g(x_1,\dots,x_n)$. Для доказательства замкнутости класса необходимо показать, что g принадлежит K.

Для множества L_8 справедливо, что на наборе $\tilde{\alpha}$ или на наборе $\overline{\tilde{\alpha}}$ одна из внутренних функций возвращает $*$, а следовательно, и функция g

возвращает значение $*$. По определению класса в этом случае значение функции g на противоположном наборе может быть любым.

Очевидно, что для класса L_9 достаточно рассмотреть случай, когда ни одна из внутренних функций ни на наборе $\tilde{\alpha}$, ни на наборе $\overline{\tilde{\alpha}}$ не возвращает $*$. А это означает, что

$$g\binom{\tilde{\alpha}}{\overline{\tilde{\alpha}}} = f_0\begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_m \\ \overline{\beta}_1 & \dots & \overline{\beta}_m \end{pmatrix}, \text{ где } \beta_i \in \{0,1\}_{i=\overline{1,m}}.$$

Функция f_0 на противоположных наборах принимает нужные значения.

Рассмотрим класс L_5. Для этого класса необходимо рассмотреть случаи, когда внутренние функции не возвращают $*$. Из-за возможности перестановки и отождествления переменных достаточно рассмотреть случай, когда внешняя функция f_0 зависит от 3-х переменных, а внутренние функции принимают следующие значения: $f_1\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \overline{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $f_2\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \overline{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f_3\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \overline{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$.

Предположим, что мультифункция g не принадлежит L_5. Это означает, что $f_0\begin{pmatrix} 0\,1\,- \\ 1\,0\,- \end{pmatrix} \in \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & * & - & 0 & * & 1 & * \\ 0 & 1 & - & 0 & - & 1 & - & * & * & 0 & * & 1 \end{smallmatrix}\right\}$. Покажем, что такое невозможно.

Если для некоторого набора α выполняется $f_0(0\ 1\ \alpha) = \gamma \in \{0,1\}$, то на противоположном наборе $(1\ 0\ \overline{\alpha})$ мультифункция f_0 возвращает $\overline{\gamma}$. Поэтому $\gamma \in f(01-)$ а $\overline{\gamma} \in f(10-)$, что исключает случаи $f_0\begin{pmatrix} 0\,1\,- \\ 1\,0\,- \end{pmatrix} \in \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 1 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * & 1 \end{smallmatrix}\right\}$.

Если $f_0(0\ 1\ -) = -$ и есть набор $(0\ 1\ \alpha)$, на котором f_0 возвращает $-$, то тогда $f_0(0\ 1\ \overline{\alpha})$ возвращает $-$.

Если же нет набора $(0\ 1\ \alpha)$, на котором f_0 возвращает $-$, то тогда есть два набора $(0\ 1\ \alpha_1)$ и $(0\ 1\ \alpha_2)$ такие, что на первом f_0 возвращает 0, а на втором 1. Поэтому на отрицаниях этих наборов f_0 возвращает 1 и 0 соответственно. Эти рассуждения исключают оставшиеся случаи.

Рассмотрим класс L_6. Для этого класса можно считать, что функция f_0 зависит от 5 аргументов. Тогда с точностью до перестановки аргументов получим, что для любой пары противоположных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\overline{\tilde{\alpha}}$ выполняется

$$g\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \overline{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} = f_0\begin{pmatrix} - & - & - & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & - & - \end{pmatrix} = f_0\begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0 \end{pmatrix} \cup f_0\begin{pmatrix} - & - & - & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & - & - \end{pmatrix}.$$

Если $f_0\begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$, то доказывать нечего. Из оставшихся вариантов, очевидно, достаточно рассмотреть один.

Пусть $f_0\begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}$, тогда $f_0(-\ 0\ 1\ -\ -) \in \{0,-\}$, а $f_0(-\ -\ -\ 0\ 1) = -$.

Для класса L_7 рассуждения аналогичны тем, что были приведены для класса L_6. Отличие состоит в том, что здесь можно считать, что функция f_0 зависит от 8 аргументов. $\square$

Лемма 2. *Классы $L_{10} - L_{16}$ являются E-замкнутыми классами.*

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, предположим, что суперпозиция $f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ функций из некоторого класса K задает функцию $g(x_1, \dots, x_n)$. Покажем, что функция g принадлежит классу K.

Для L_{15} заметим, что все функции из этого класса, или на наборе из всех 0, или на наборе из всех 1 возвращает $*$. Поэтому этот класс замкнут.

Для класса L_{16} рассматриваем случай, когда внутренние функции на наборе из всех нулей возвращают 0, а на наборе из всех единиц возвращают 1. Но в этом случае внешняя функция, очевидно, возвращает нужный вариант.

Классы L_{11} и L_{12}, L_{13} и L_{14} являются двойственными, поэтому далее рассматриваем только классы L_{10}, L_{11} и L_{13}.

Для классов L_{11} и L_{13} рассматриваем случай, когда ни одна из внутренних функций на наборе из всех единиц не возвращает $*$.

Для каждого из них выполняется

$$g\left(\begin{smallmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{1}\end{smallmatrix}\right) = f_0\left(\begin{smallmatrix}0\dots0\\ 1\dots1\end{smallmatrix}\right) \cup f_0\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\dots\alpha_n\\ 1\dots1\end{smallmatrix}\right), \text{ где } \alpha_i \in f_i(0, \dots, 0).$$

Если $f_0(1, \dots, 1)$ возвращает $*$, то очевидно, что g принадлежит классу. А если $f_0(1, \dots, 1) = 1$, то $f_0(0, \dots, 0) \in \begin{cases}\{0, -\} \text{ для } L_{13};\\ \{-\} \text{ для } L_{11}\end{cases}$. И значит, функция g принадлежит классу.

Осталось рассмотреть класс L_{10}. Для этого класса справедливо

$$g\left(\begin{smallmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{1}\end{smallmatrix}\right) = f_0\left(\begin{smallmatrix}0\dots0\\ 1\dots1\end{smallmatrix}\right) \cup f_0\left(f_1\left(\begin{smallmatrix}0\dots0\\ 1\dots1\end{smallmatrix}\right), \dots, f_m\left(\begin{smallmatrix}0\dots0\\ 1\dots1\end{smallmatrix}\right)\right)$$

Если $f_0(1, \dots, 1) = 1$, то $f_0(0, \dots, 0) = -$ и $g(1, \dots, 1) \in \{1, -\}$, а $g(0, \dots, 0) \in \{-\}$.

Если же $f_0(1, \dots, 1) = -$, то $f_0(0, \dots, 0) \in \{0, -\}$ и $g(1, \dots, 1) \in \{-\}$, а $g(0, \dots, 0) \in \{-, 0\}$. □

Лемма 3. *Множества $L_{17} - L_{22}$ являются E-замкнутыми классами.*

Доказательство. Рассмотрим классы L_{17}, L_{21}. Если

$$g(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

то $g(0, \dots, 0) = f_0(0, \dots, 0) \cup \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(0, \dots, 0)} f_0(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Для L_{17} выполняется $f_0(0, \dots, 0) = -$, а значит, и $g(0, \dots, 0) = -$.

Для L_{21} выполняется $f_0(0, \dots, 0) \in \{-, 0\} = -$, а следовательно, и $g(0, \dots, 0) \in \{-, 0\}$.

Для L_{19} справедливо $g(0, \dots, 0) = *$, или $g(0, \dots, 0) = f_0(0, \dots, 0)$.

Для классов L_{18}, L_{20}, L_{22} рассуждения проводятся двойственным образом. □

Теорема 4. *Решетка E-замкнутых множеств мультифункций ранга 2 содержит 359 элементов.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из предложения 2, теорем 2, 3 и лемм 1, 2, 3. □

Заключение

В настоящей статье было показано, что оператор E-замыкания порождает конечную классификацию множества мультифункций ранга 2, что является завершением исследований E-замыкания множеств булевых функций, частичных и гиперфункций, заданных на двухэлементном множестве. Дальнейшие исследования могут быть посвящены рассмотрению свойств мультиопераций, задаваемых на произвольном конечном множестве.

Список источников

1. Об одном множестве E-замкнутых классов мультифункций ранга 2 / А. С. Зинченко, Б. П. Ильин, В. И. Пантелеев, Л. В. Рябец // Алгебра, геометрия и комбинаторика. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М. : ВИНИТИ РАН. 2022. Т. 214. С. 30–36. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-30-36
2. Марченков С. С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник МГУ. Серия 1, Математика и механика. 2003. № 6. С. 37–39.
3. Марченков С. С. Оператор E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 227–238.
4. Марченков С. С. О расширениях оператора параметрического замыкания с помощью логических связок // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 1. С. 22–31. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-1-3
5. Марченков С. С. Критерий эквациональной полноты в трехзначной логике // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 4. С. 29–41. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2019-4-3
6. Марченков С. С. Расширения оператора позитивного замыкания с помощью логических связок // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25, № 4(138). С. 46–58. https://doi.org/10.17377/daio.2018.25.605
7. Марченков С. С., Простов В. А. Критерий полноты относительно оператора замыкания по перечислению в трехзначной логике // Дискретная математика. 2021. Т. 33, № 2. С. 86–99. https://doi.org/10.4213/dm1641
8. Марченков С. С. Логические расширения оператора параметрического замыкания // Дискретная математика. 2022. Т. 34, № 3. С. 52–62. https://doi.org/10.4213/dm1711

9. Матвеев С. А. Построение всех E-замкнутых классов частичных булевых функций // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 239–244.
10. Шаранхаев И. К. О позитивной полноте и позитивно замкнутых множествах мультифункций ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20, № 2. С. 1313–1319. https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.079
11. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set // Multiple-Valued Logic. An International Journal. 2002. Vol. 8, N 4. P. 495–501.
12. Marchenkov S. S. The Closure Operator With the Equality Predicate Branching on the Set of Partial Boolean Functions // Discrete Math. Appl. 2008. Vol. 18, N 4. P. 381–389. https://doi.org/10.1515/DMA.2008.028
13. Panteleev V. I., Riabets L. V. The Completeness Criterion for Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Multioperations on Two-Element Set // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 29. С. 68–85. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.68
14. Panteleev V. I., Riabets L. V. E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set // Журнал СФУ. Серия: Математика и физика. 2020. Т. 13, №. 2, С. 231–241. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-2-231-241
15. Panteleev V. I., Riabets L. V. Classification of Multioperations of Rank 2 by E-precomplete Sets // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2020. Т. 34. С. 93–108. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.93

References

1. Zinchenko A.S., Ilyin B.P., Panteleev V.I., Ryabets L.V. On a set of E-closed classes of multifunctions on a two-element set. *Algebra, geometriya i kombinatorika. Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory*, Moscow, VINITI Publ., 2022, vol. 214, pp. 30–36. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-214-30-36 (in Russian)
2. Marchenkov S.S. Closure Operators with Predicate Branching. *Bulletin of Moscow State University. Series 1, Mathematics and Mechanics*, 2003, no. 6, pp. 37–39. (in Russian)
3. Marchenkov S.S. E-closed Operator in the Set of Partial Many-Valued Logic Functions. *Mathematical problems in cybernetics*, Moscow, Fizmatlit, 2013, vol. 18, pp. 227–238. (in Russian)
4. Marchenkov S.S. On parametric closure operator extensions by means of logical connectives. *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, 2017, no. 1, pp. 22–31. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-1-3 (in Russian)
5. Marchenkov S.S. Equational completeness criterion in ternary logic. *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, 2019, no. 4, pp. 29–41. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2019-4-3 (in Russian)
6. Marchenkov S.S. Extensions of the positive closure operator by using logical connectives. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, Pleiades Publishing Ltd, 2018, vol. 12, iss. 4, pp. 678–683. https://doi.org/10.1134/S1990478918040087
7. Marchenkov S.S., Prostov V.A. Completeness criterion with respect to the enumeration closure operator in the three-valued logic. *Discrete Mathematics*

and Applications, Walter de Gruyter, 2021, vol. 32, no. 2, pp. 105–114. https://doi.org/10.1515/dma-2022-0010
8. Marchenkov S.S. Logical extensions of the parametric closure operator. *Discrete Mathematics and Applications*, Walter de Gruyter, 2022, vol. 33, no. 6, pp. 371-–379. https://doi.org/10.1515/dma-2023-0033
9. Matveev S.A. Construction of All E-closed Classes of Partial Boolean Functions. *Mathematical problems in cybernetics*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2013. vol. 18, pp. 239–244.
10. Sharankhaev I.K. On positive completeness and positively closed sets of multifunctions of rank 2 *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2023, vol. 20, no 2., pp. 1313–1319. https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.079 (in Russian)
11. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set. *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002, no. 8(4), pp. 495–501.
12. Marchenkov S.S. The Closure Operator With the Equality Predicate Branching on the Set of Partial Boolean Functions, *Discrete Mathematics and Applications*, Walter de Gruyter, vol. 18, no. 4, 2008, pp. 381–389. https://doi.org/10.1515/DMA.2008.028
13. Panteleev V.I., Riabets L.V. The Completeness Criterion for Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Multioperations on Two-Element Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 29, pp. 68–85. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.68
14. Panteleev V.I., Riabets L.V. E-closed Sets of Hyperfunctions on Two-Element Set. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2020, vol. 13, no. 2, pp. 231–241. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-2-231-241
15. Panteleev V.I., Riabets L.V. Classification of Multioperations of Rank 2 by E-precomplete Sets *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 34, pp. 93–108. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.93

Об авторах

Ильин Борис Петрович, ст. преп., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, ilin_bp@math.isu.ru, https://orcid.org/0009-0006-2025-7980

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, д-р физ.-мат. наук, доц., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, vl.panteleyev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4766-486X

About the authors

Boris P. Ilyin, Senior Lecturer, Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, ilin_bp@math.isu.ru, https://orcid.org/0009-0006-2025-7980

Vladimir I. Panteleev, Dr. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, vl.panteleyev@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4766-486X

Поступила в редакцию / Received 22.01.2024
Поступила после рецензирования / Revised 18.03.2024
Принята к публикации / Accepted 25.03.2024