ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Серия «Математика»
2024. Т. 47. С. 3—11

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.97
MSC 49K99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.3

О некоторых задачах программного управления пучком траекторий. Часть II

Д. А. Овсянников[1]✉, **Е. Д. Котина**[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация
✉ d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Аннотация. Рассматриваются задачи управления макропараметрами в линейной динамической системе. Ранее авторами исследовались такие проблемы при управлении нелинейными системами, где получены вариации рассматриваемых функционалов и необходимые условия оптимальности. В данной работе уделяется основное внимание управлению пучками траекторий в линейном случае. В этом случае задача управления пучком траекторий может быть сведена к задаче управления отдельными траекториями. Разрабатываемый подход может быть интересен при исследовании динамики заряженных частиц в ускоряющих и фокусирующих структурах, а также при построении поля скоростей при автоматической обработке изображений.

Ключевые слова: программное управление, линейные системы, поле скоростей, пучок траекторий, вариация функционала, оптимизация, обработка изображений

Ссылка для цитирования: Овсянников Д. А., Котина Е. Д. О некоторых задачах программного управления пучком траекторий. Часть II // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 3–11.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.3

Research article

On Some Problems of Trajectory Beam Program Control. Part II

Dmitri A. Ovsyannikov[1], **Elena D. Kotina**[1]

[1] St. Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation
✉ d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Abstract. The paper considers the problems of macroparameter control in a linear dynamic system. In the authors' previous paper, such problems in controlling nonlinear systems were investigated. Variations of the considered functionals and necessary optimality conditions were obtained. This paper focuses on the trajectory beam control in the linear case. In this case, the problem of beam control can be reduced to the problem of the individual trajectory control. The developed approach may be of interest in the study of charged particle dynamics in accelerating and focusing structures, as well as in the construction of the velocity field in automatic image processing.

Keywords: program control, linear systems, velocity field, trajectory beam, functional variation, optimization, image processing

For citation: Ovsyannikov D. A., Kotina E. D. On Some Problems of Trajectory Beam Program Control. Part II. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 47, pp. 3–11. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.3

1. Введение

В первой части нашего исследования изучались проблемы управления макропараметрами в нелинейных системах [7]. В данной работе рассматривается управляемая линейная система. Исследованию задач управления пучками траекторий в линейных системах посвящено много работ. Рассматриваются детерминированные и стохастические системы, непрерывные и дискретные, исследуются задачи линейно-квадратичного типа и возможность их эффективного решения, отметим некоторые из них [1–6; 8; 9; 14]. При этом качество управления пучком траекторий характеризуется либо средним значением функционала качества [5; 6], либо его наибольшим значением [4; 9]. Исследуются также задачи линейной транспортировки пучков траекторий [3; 5; 6], когда ставится задача перевода одного множества в другое. Проблемы сведения задач управления пучками траекторий к задачам управления отдельными траекториями в различных постановках рассматриваются в работах [1; 2; 5; 6; 14]. В данной статье продолжается изучение задач управления макропараметрами. Проводится учет плотности распределения траекторий в фазовом пространстве. Исследуются задачи управления центром тяжести, а также матрицей вторых моментов. Вторую задачу можно трактовать как задачу управления соответствующим эллипсоидом в фазовом пространстве. Данные постановки возникают в прикладных задачах при рассмотрении задач управления пучками заряженных частиц, а также, например, при построении поля скоростей при обработке изображений [5;6;10;12]. Показывается, что рассматриваемые задачи управления пучком траекторий в данном случае могут быть сведены к соответствующим задачам управления отдельными траекториями. Даются необходимые условия оптимальности.

2. Управление центром тяжести

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t,p)x + f(t,q) = F(t,x,p,q) \tag{2.1}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0 \in M_0$.

Здесь t – время, x – вектор фазовых координат в R^n, $M_0 \subset R^n$ – множество начальных значений системы (2.1), матрица $A(t,p)$ размерности $n \times n$ и n-мерный вектор $f(t,q)$ кусочно-непрерывны по t и непрерывны по p и q соответственно; $p = p(t)$, $q = q(t)$ – кусочно-непрерывные векторные функции со значениями в U, U – компакт в R^r. Совокупность векторов $p(t)$ и $q(t)$ будем также обозначать вектором управления $u(t)$ и считать, что они принадлежат множеству D. Управления $u \in D$ будем называть допустимыми управлениями. Предполагаем, что M_0 есть компактное множество ненулевой меры Лебега.

Обозначим через

$$x(t) = x_t = x(t,x_0,u), t \in [0,T],$$

решение системы (2.1) с начальным условием $x(0) = x_0$, а через $M_{t,u}$ сечение пучка траекторий в момент времени t при фиксированном векторе u, т. е. множество

$$M_{t,u} = \{x(t) = x(t,x_0,u,), x_0 \in M_0\}.$$

Далее будем для определенности считать, что вектор x задает координаты некоторых частиц в фазовом пространстве. Введем функцию плотности распределения частиц $\rho(t,x)$ в фазовом пространстве. Уравнение, описывающее изменение функции плотности в пространстве с течением времени вдоль траекторий системы (2.1), имеет вид [5]

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\rho(t,x)}{\partial x}F(t,x,p,q) + \rho(t,x)\,\mathrm{sp}\,A(t,p) = 0 \tag{2.2}$$

при начальном условии $\rho(0,x) = \rho_0(x)$. В формуле (2.2) $\mathrm{sp}\,A(t,p) = \sum_{s=1}^{n} a_{ss}(t,p)$ – след матрицы $A(t,p)$.

Рассмотрим центр тяжести частиц, определяемый плотностью $\rho(t,x)$ на сечении $M_{t,u}$,

$$\bar{X}(t,u) = \frac{1}{\bar{\rho}_0}\int_{M_{t,u}} x_t\rho(t,x_t)\,\mathrm{d}x_t. \tag{2.3}$$

Наряду с функцией $\rho(t,x)$ будем рассматривать также функцию $\hat{\rho}(x)$, характеризующую плотность распределения частиц в рассматриваемом фазовом пространстве. Обозначим через $\hat{X}$ центр тяжести, определяемый плотностью $\hat{\rho}(x)$ в R^n. Имеем

$$\hat{X} = \frac{1}{\hat{\rho}_0}\int_{R^n} x\hat{\rho}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Предполагаем далее [7], что

$$\bar{\rho}_0 = \int_{M_0}\rho_0(x_0)\,\mathrm{d}x_0 = 1, \hat{\rho}_0 = \int_{R^n}\hat{\rho}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Введем функционал

$$J_1(u) = (\bar{X}(T,u) - \hat{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_i(T,u) - \hat{X}_i)^2. \tag{2.5}$$

Ставится задача минимизации функционала (2.5), т. е. минимизация при $t = T$ отклонения центра тяжести $\bar{X}(T,u)$, определяемого формулой (2.3), от фиксированного центра тяжести $\hat{X}$, определяемого формулой (2.4).

Покажем, что задача минимизации функционала (2.5), которая есть задача управления пучком траекторий, в случае когда динамика частиц описывается линейной системой, сводится к управлению отдельной траекторией.

Нетрудно проверить, что $\bar{X}(t,u)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = A(t,p)\bar{X}(t) + f(t,q) \tag{2.6}$$

с начальным условием $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$, где $\bar{X}_0 = \int_{M_0} x_0\rho_0(x_0)\,\mathrm{d}x_0$.

Учитывая, что центр тяжести (2.3) удовлетворяет уравнению (2.6), можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть $\hat{X}$ определяется равенством (2.4). Тогда задача минимизации функционала (2.5) в линейном случае, когда динамика частиц описывается системой (2.1), сводится к управлению одной траекторией $\bar{X}(t)$ (центром тяжести), описываемой уравнением (2.6) с начальным условием $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$.*

Отметим, что функционал (2.5) на пучке траекторий для нелинейной системы был рассмотрен в первой части этой статьи [7]. При этом исследовался также функционал, когда вместо центра тяжести, определяемого формулой (2.4), рассматривался центр тяжести, определяемый плотностью $\hat{\rho}(x)$ на множестве $M_{T,u}$.

3. Управление матрицей вторых моментов

Введем матрицу вторых моментов, определяемую плотностью $\rho(t,x)$ на сечениях $M_{t,u}$, а именно

$$D(t,u) = \int_{M_{t,u}} (x_t - \bar{X}(t))(x_t - \bar{X}(t))^* \rho(t, x_t)\, \mathrm{d}x_t. \tag{3.1}$$

Здесь и далее знак * означает транспонирование вектора или матрицы, изменение $\bar{X}(t)$ описывается уравнением (2.6). Нетрудно заметить, что матрица $D(t,u)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{D} = A(t,p)D + DA^*(t,p) \tag{3.2}$$

с начальным условием $D(0) = D_0$, где

$$D_0 = \int_{M_0} (x_0 - \bar{X}_0)(x_0 - \bar{X}_0)^* \rho_0(x_0)\, \mathrm{d}x_0.$$

Рассмотрим также матрицу вторых моментов, определяемую в R^n плотностью $\hat{\rho}(x)$:

$$\hat{D} = \int_{R^n} (x - \hat{X})(x - \hat{X})^* \hat{\rho}(x)\, \mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Введем функционал

$$J_2(u) = a\,\mathrm{sp}(D(T,u) - \hat{D})^2 + b(\bar{X}(T,u) - \hat{X})^2, \tag{3.4}$$

характеризующий отклонение центра тяжести $\bar{X}(T,u)$ и матрицы вторых моментов $D(t,u)$ от заданных характеристик, определяемых плотностью $\hat{\rho}(x)$, а именно $\hat{X}$ и $\hat{D}$.

Учитывая, что матрица вторых моментов $D(t,u)$ удовлетворяет уравнению (3.2), можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть центр тяжести $\hat{X}$ и матрица вторых моментов $\hat{D}$ определяются равенствами (2.4) и (3.3) соответственно. Минимизация функционала (3.4), определяемого характеристиками (2.3) и (3.1) на пучке траекторий системы (2.1) при фиксированных $\hat{X}$ и $\hat{D}$, сводится в линейном случае к управлению системой (2.6)* *и матричным уравнением (3.2) с начальными данными* $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$ *и* $D(0) = D_0$. *Таким образом, задача управления пучком траекторий сводится в данном случае к управлению отдельными траекториями, а именно к управлению центром тяжести и матрицей вторых моментов.*

Выпишем вариацию функционала (3.4), определяемого траекториями уравнений (2.6) и (3.2). Используя уравнения в вариациях для систем (2.6) и (3.2) и вводя вспомогательные функции, вариацию функционала (3.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\delta J_2(u) = \int_0^T [\psi^*(t)\Delta_p A(t,p)\bar{X}(t) + \psi^*(t)\Delta_q f(t,q) + \\ + \operatorname{sp}\left(D(t)\theta(t)\Delta_p A(t,p) + \theta(t)D(t)\Delta_p A^*(t,p)\right)]\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\Delta_p A(t,p) = A(t,p+\Delta p) - A(t,p),$$

$$\Delta_q f(t,q) = f(t,q+\Delta q) - f(t,q).$$

Здесь $\psi = \psi(t)$ – вспомогательная n-вектор функция, которая удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\dot{\psi} = -A^*\psi \tag{3.6}$$

с конечным условием

$$\psi(T) = -2b(\bar{X}(T,u) - \hat{X}). \tag{3.7}$$

Вспомогательная матрица $\theta = \theta(t)$ размерности $n \times n$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\theta} = -\theta A(t,p) - A^*(t,p)\theta \tag{3.8}$$

с конечным условием

$$\theta(T) = -2a(D(T,p) - \hat{D}). \tag{3.9}$$

Сформулируем на основе вариации (3.5) необходимые условия оптимальности в задаче минимизации функционала (3.4). С этой целью введем функцию

$$\begin{aligned}&H(t,\bar{X}(t),D(t),\psi(t),\theta(t),p,q) = \\ &\quad = \psi^*(t)A(t,p)\bar{X}(t) + \psi^*(t)f(t,q) + \\ &\qquad + \operatorname{sp}(D(t)\theta(t)A(t,p) + \theta(t)D(t)A^*(t,p)).\end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть $u^0 = u^0(t) = (p^0(t), q^0(t))$ — оптимальное управление в задаче минимизации функционала (3.4), а вектор-функция $\bar{X}^0(t)$ и матрица $D^0(t)$ есть решения уравнений (2.6), (3.2) при начальных условиях $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$, $D(0) = D_0$ и оптимальном управлении. Вектор-функция $\psi^0(t)$ и матрица $\theta^0(t)$ удовлетворяют на оптимальном процессе уравнениям (3.6), (3.8) при конечных условиях (3.7), (3.9). Тогда при $t \in [0, T]$ выполняется следующее условие максимума*

$$\max_{p,q \in U} H(t, \bar{X}^0(t), D^0(t), \psi^0(t), \theta^0(t), p, q) =$$
$$= H(t, \bar{X}^0(t), D^0(t), \psi^0(t), \theta^0(t), p^0(t), q^0(t)).$$

Доказательство теоремы 1 проводится так же, как и доказательство теорем в первой части статьи с использованием игольчатой вариации [7]. Здесь, как и ранее, учитывается, что управления есть кусочно-непрерывные функции и в точках разрыва принимают конечные пределы слева или справа.

Заметим, что уравнение (3.2) зависит только от управления $p = p(t)$, т. е. динамика матрицы вторых моментов не зависит от неоднородности уравнения (2.1) и управления $q(t)$. Если $a = 0$ в функционале (3.4), то получаем задачу управления центром тяжести, а при $b = 0$ мы имеем задачу управления матрицей вторых моментов. В том и другом случае получаем соответствующие условия оптимальности.

4. Заключение

В работе рассмотрены задачи управления макропараметрами в случае линейных систем. Показано, что задачи управления пучком траекторий в данном случае сводятся к задачам управления отдельными траекториями. Результаты, полученные в данной статье, могут найти применение в задачах управления пучками заряженных частиц, а также в задачах обработки изображений [10–12], в частности для решения задач цифровой обработки изображений в ядерной медицине [13].

Список источников

1. Бортаковский А. С. Теорема разделения в задачах управления пучками траекторий детерминированных линейных переключаемых систем // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2020. № 2. С. 37–63.
2. Бортаковский А. С. Теорема разделения для оптимального в среднем управления гибридными системами переменной размерности // Автоматика и телемеханика. 2020. № 11. С. 46–71.
3. Зубов В. И. Динамика управляемых систем. М. : Высшая школа, 1982. 285 с.

4. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
5. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
6. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
7. Овсянников Д. А., Котина Е. Д. О некоторых задачах программного управления пучком траекторий. Часть I // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 51–65. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.51
8. Срочко В. А., Антоник В. Г. Решение линейно-квадратичных задач в дискретно-непрерывном формате с внешними воздействиями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 24–36. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.24
9. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска. М. : Наука, 1978. 270 с.
10. Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing / P. Bazhanov, E. Kotina, D. Ovsyannikov, V. Ploskikh // Cybernetics and Physics. 2018. N 7. P. 174–181.
11. Kotina E. D., Leonova E. B., Ploskikh V. A. Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 39. P. 3–16.
12. Kotina E., Ovsyannikov D., Elizarova M. Optimization approach to the velocity field determining problem // Cybernetics and physics. 2022. Vol. 11, N 3. P. 131–135.
13. Kotina E., Ploskikh V., Shirokolobov A. Digital Image Processing in Nuclear Medicine // Physics of Particles and Nuclei. 2022. Vol. 53, N 2. P. 535–540.
14. Wonham W. M. On the Separation Theorem of Stochastic Control // SIAM J. Control. 1965. Vol. N 6. P. 312–326.

References

1. Bortakovskii A.S. Teorema razdeleniya v zadachakh upravleniya puchkami traektoriy determinirovannykh pereklyuchaemykh system [Separation theorem in control problems of beam trajectories of deterministic linear switched systems]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems]*, no. 2, pp. 37–63. (in Russian)
2. Bortakovskii A.S. Separation theorem for average optimal control for hybrid systems of variable dimension. *Automation and Remote Control*, 2020, vol. 81, no. 11, pp. 1974–1993.
3. Zubov V.I. *Dinamika upravlyayemykh sistem. [Dynamics of Control Systems].* Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1982, 285 p. (in Russian)
4. Kurzhansky A.B. *Upravlenie i nabludenie v usloviah neopredelennosti [Control in case of uncertainty].* Moscow, Nauka Publ., 1977, 394 p. (in Russian)
5. Ovsyannikov D.A. *Matematicheskie metody upravlenija puchkami [Mathematical methods of beam control].* Leningrad, Leningrad University Publ., 1980, 228 p. (in Russian)
6. Ovsyannikov D.A. *Modelling and optimization of charged particle beam dynamics.* Leningrad, Leningrad University Publ., 1990, 312 p. (in Russian)

7. Ovsyannikov D.A., Kotina E.D. On Some Problems of Trajectory Beam Program Control. Part I. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 51–65. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.46.51
8. Srochko V.A., Antonik V.G. Resolution of Linear-quadratic Problems in a Discrete-continuous Format with External Actions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 24–36. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.24
9. Chernousko F.L., Melikyan, A.A. *Igrovie zadachi upravleniya i poiska [Game control and search problems]*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 270 p. (in Russian)
10. Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V. Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing. *Cybernetics and Physics*, 2018, vol. 7, pp. 174–181.
11. Kotina E.D., Leonova E.B., Ploskikh V.A. Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 39, pp. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.3
12. Kotina E., Ovsyannikov D., Elizarova M. Optimization approach to the velocity field determining problem. *Cybernetics and physics*, 2022, vol. 11, no. 3, pp. 131–135.
13. Kotina E., Ploskikh V., Shirokolobov A. Digital Image Processing in Nuclear Medicine. *Physics of Particles and Nuclei*, 2022, vol. 53, no. 2, pp. 535–540.
14. Wonham W.M. On the Separation Theorem of Stochastic Control. *SIAM J. Control*, 1965. vol. 6, pp. 312–326.

Об авторах

Овсянников Дмитрий Александрович, д-р физ.-мат. наук, проф., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, d.a.ovsyannikov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-0829-2023

Котина Елена Дмитриевна, д-р физ.-мат. наук, проф., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, e.kotina@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2057-682X

About the authors

Dmitri A. Ovsyannikov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Saint Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation, d.a.ovsyannikov@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-0829-2023

Elena D. Kotina, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Saint Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation, e.kotina@spbu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2057-682X

Поступила в редакцию / Received 28.12.2023
Поступила после рецензирования / Revised 05.02.2024
Принята к публикации / Accepted 12.02.2024