Серия «Математика»
2023. Т. 45. С. 145—151

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.956.3: 519.2
MSC 60H15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.145

О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений с частными производными первого порядка

К. Б. Мансимов [1,2], **Р. О. Масталиев** [1,3]✉

[1] Институт систем управления, Баку, Азербайджан
[2] Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
[3] Университет «Азербайджан», Баку, Азербайджан
✉ rashad.mastaliyev@au.edu.az

Аннотация. Изучается стандартная каноническая форма стохастического аналога системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа первого порядка с краевыми условиями Гурса. Введен стохастический аналог матрицы Римана в блочном виде, получено интегральное представление решения рассматриваемой краевой задачи в явной интегральной форме в терминах краевых условий.

Ключевые слова: линейная неоднородная стохастическая система Гурса, стохастическая краевая задача, винеровский процесс, представление решения в явном виде

Ссылка для цитирования: Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений с частными производными первого порядка // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 145–151. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.145

Research article

On the Representation of the Goursat Boundary Problem Solution for the First Order Partial Derivatives Stochastic Hyperbolic Equations

K. B. Mansimov[1,2], **R.O. Mastaliyev**[1,3]✉

[1] Institute of Control Systems, Baku, Azerbaijan
[2] Baku State University, Baku, Azerbaijan
[3] Azerbaijan University, Baku, Azerbaijan
✉ rashad.mastaliyev@au.edu.az

Abstract. We study the standard canonical form of a stochastic analog of a system of linear partial differential equations of first order hyperbolic type with Goursat boundary conditions. The stochastic analogue of the Riemann matrix in block form is introduced, an integral representation of the solution of the boundary value problem under consideration is obtained in an explicit integral form in terms of boundary conditions.

Keywords: linear inhomogeneous stochastic Goursat system, stochastic boundary value problem, Wiener process, explicit representation of the solution

For citation: Mansimov K. B., Mastaliyev R. O. On the Representation of the Goursat Boundary Problem Solution for the First Order Partial Derivatives Stochastic Hyperbolic Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 145–151. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.145

1. Введение

При качественном и конструктивном исследовании различных задач оптимального управления существенную роль играет интегральное представление решений линейных или линеаризованных уравнений, описывающих рассматриваемые задачи оптимального управления (см. напр. [1–4; 7]).

В работе [2] для исследования задачи оптимального управления, которая описывается системой гиперболических уравнений первого порядка в канонической форме с краевыми условиями Гурса, сначала получено представление решения, а затем с помощью полученного представления исследована рассматриваемая задача оптимального управления.

В работе [4] при выводе необходимых условий оптимальности второго порядка в задачах оптимального управления, которые описываются гиперболическими уравнениями первого порядка, использована формула представления решения соответствующей краевой задачи из [2].

В работе авторов [5] для линейного стохастического гиперболического уравнения второго порядка с краевыми условиями Гурса получено представление решения с использованием аналога функции типа Римана.

Полученное представление было успешно применено для вывода различных необходимых условий оптимальности второго порядка для нелинейных стохастических задач оптимального управления, описываемых нелинейными стохастическими гиперболическими уравнениями второго порядка с краевыми условиями Гурса [6].

В работе получено интегральное представление решения краевой задачи для линейного стохастического гиперболического уравнения первого порядка с краевыми условиями Гурса.

2. Постановка задачи

Пусть задано вероятностное пространство $\left(\Omega, \mathcal{F}^i, P\right), i = 1,2$ с фильтрацией $\left\{\mathcal{F}^i_{tx},\ (t,x) \in D = [t_0,t_1] \times [x_0,x_1]\right\},\ i = 1,2,$
где $\mathcal{F}^i_{tx} = \overline{\sigma}\left\{W_i(\tau,s),\ t_0 \le \tau \le t_1, x_0 \le s \le x_1\right\}.$

Здесь D — заданный прямоугольник, а $W_i(t,x),\ i = 1,2-$ независимые между собой винеровские процессы на плоскости.

Рассмотрим стохастическое гиперболическое уравнение первого порядка

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = A(t,x)\,z(t,x) + B(t,x)\,y(t,x) + f(t,x) + {} + C(t,x)\,z(t,x)\,\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} = D(t,x)\,z(t,x) + E(t,x)\,y(t,x) + {} + g(t,x) + F(t,x)\,y(t,x)\,\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}, (t,x) \in D \quad (2.1)$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$z(t_0,x) = a(x), x \in [x_0,x_1], y(t,x_0) = b(t), t \in [t_0,t_1]. \quad (2.2)$$

Здесь $(z(t,x), y(t,x))$ – $(n+m)$-мерная искомая вектор-функция, $A(t,x), B(t,x), C(t,x), D(t,x), E(t,x), F(t,x)$ — заданные соответственно $(n \times n), (n \times m), (n \times n), (m \times n), (m \times m), (m \times m)$-мерные измеримые и ограниченные матрицы коэффициентов, $f(t,x)\,(g(t,x))$ — заданные $n(m)$-мерные измеримые и ограниченные вектор-функции, белые шумы $\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}$ $n\,(m)$ являются производными соответственно по t и x от двухпараметрического винеровского процесса $W_1(t,x),\ W_2(t,x)$ [8], а $a(x), b(t)$ — заданные измеримые и ограниченные на $[x_0,x_1]$, $[t_0,t_1]$ соответственно вектор-функции соответствующих размерностей.

Основной целью статьи является нахождение интегрального представления решения краевой задачи (2.1)–(2.2) с помощью стохастического аналога матричных функций, введенных в детерминированном случае в работе [2].

3. Основной результат

Случайные функции $z(t,x), y(t,x)$, подчиненные потоку $(\mathcal{F}_{xy}^1, \mathcal{F}_{xy}^2)$, назовем решением краевой задачи (2.1)–(2.2), если они допускают представления

$$z(t,x) = a(x) + \int_{t_0}^{t} A(\tau,x)\, z(\tau,x)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,x)\, y(\tau,x)\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f(\tau,x)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} C(\tau,x)\, z(\tau,x)\, \frac{\partial W_1(\tau,x)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$y(t,x) = b(t) + \int_{x_0}^{x} D(t,s)\, z(t,s)\, ds +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} E(t,s)\, y(t,s)\, ds + \int_{x_0}^{x} g(t,s)\, ds + \int_{x_0}^{x} F(t,s)\, z(t,s)\, \frac{\partial W_2(t,s)}{\partial s} ds,$$

а уравнения (2.1)выполняются с вероятностью 1 всюду в области D.

Предположим, что существует решение рассматриваемой линейной краевой задачи в вышеуказанном смысле.

Пусть

$$V(t,x;\tau,s) = \begin{pmatrix} \overbrace{\underline{V_{11}(t,x;\tau,s)}}^{n\times n} & \overbrace{\underline{V_{12}(t,x;\tau,s)}}^{n\times m} \\ \underbrace{V_{21}(t,x;\tau,s)}_{m\times n} & \underbrace{V_{22}(t,x;\tau,s)}_{m\times m} \end{pmatrix}$$

стохастическая блочная матрица, при этом матричные функции

$$V_{ij}(t,x;t,s), i,j = 1,2$$

удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial \tau} = -V_{11}(t,x;\tau,s)\, A(\tau,s) - V_{12}(t,x;t,s)\, D(\tau,s) -$$
$$- V_{11}(t,x;\tau,s)\, C(\tau,s)\, \frac{\partial W_1(\tau,s)}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial s} = -V_{11}(t,x;\tau,s)\, B(\tau,s) - V_{12}(t,x;\tau,s)\, E(\tau,s) -$$
$$- V_{12}(t,x;\tau,s)\, F(\tau,s)\, \frac{\partial W_2(\tau,s)}{\partial s},$$

$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial \tau} = -V_{21}(t,x;\tau,s)\, A(\tau,s) -$$
$$- V_{22}(t,x;\tau,s)\, D(\tau,s) - V_{21}(t,x;\tau,s)\, C(\tau,s)\, \frac{\partial W_1(\tau,s)}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial s} = -V_{21}(t,x;\tau,s)\,B(\tau,s) - V_{21}(t,x;\tau,s)\,E(\tau,s) - \\ - V_{22}(t,x;\tau,s)\,F(\tau,s)\,\frac{\partial W_2(\tau,s)}{\partial s},$$

$$V_{12}(t,x;\tau,x) = 0, t_0 \le \tau \le t,\ V_{21}(t,x;t,s) = 0, x_0 \le s \le x,$$

$$V_{11}(t,x;t,s) = E_1,\ V_{22}(t,x;\tau,x) = E_2,$$

где E_1, E_2 – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Решение* $(z(t,x), y(t,x))$ *системы стохастических линейных гиперболических уравнений первого порядка* (2.1) *с краевыми условиями* (2.2) *допускает представления в виде*

$$z(t,x) = V_{11}(t,x;t_0,x)\,a(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_{11}(t,x;t_0,s)}{\partial x} a(s)\,ds + \\ + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,x_0)}{\partial x} b(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} V_{11}(t,x;\tau,x) f(\tau,x)\,d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial x} f(\tau,s) ds d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial x} g(\tau,s) ds d\tau,$$

$$y(t,x) = V_{22}(t,x;t,x_0)\,b(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,x_0)}{\partial t} b(\tau)\,d\tau + \\ + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_{21}(t,x;t_0,s)}{\partial x} a(s)\,ds + \int_{x_0}^{x} V_{22}(t,x;t,s) g(t,s)\,ds + \\ + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial t} f(\tau,s) ds d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial t} g(\tau,s) ds d\tau.$$

Можно доказать, что стохастическая блочная матричная функция $V(t,x;t,s)$ относительно первой пары переменных (t,x) является решением следующей матричной системы стохастических дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial^2 V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial t \partial x} = A(t,x)\,\frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial x} + B(t,x)\,\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial t \partial x} = D(t,x)\,\frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial x} + E(t,x)\,\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,x)}{\partial t} = A(t,x)\,V_{11}(t,x;\tau,x) + C(t,x)\,V_{11}(t,x;\tau,x)\,\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,x)}{\partial t} = D(t,x)\,V_{11}(t,x;\tau,x)\,, V_{11}(t,x;t,s) = E_1, V_{21}(t,x;t,s) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial t \partial x} = D(t,x)\frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial x} + E(t,x)\frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V_{22}(t,x;t,s)}{\partial x} = E(t,x)V_{22}(t,x;t,s) + F(t,x)V_{22}(t,x;t,s)\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V_{12}(t,x;t,s)}{\partial x} = B(t,x)V_{22}(t,x;t,s),\; V_{22}(t,x;\tau,x) = E_2,\; V_{12}(t,x;\tau,x) = 0.$$

4. Заключение

Рассмотрена краевая задача типа Гурса для одного линейного неоднородного стохастического гиперболического уравнения первого порядка, записанного в канонической форме с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Получено интегральное представление решения краевой задачи в явном виде и исследованы свойства матричных функций, формирующих это решение.

Список источников

1. Ащепков Л. Т., Васильев О. В. Коваленок И. Л. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса – Дарбу //Дифференциальные уравнения. 1980, Т. 16, № 6. С. 1054-1059.
2. Васильев О. В., Терлецкий В. А. К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами // Оптимизация динамических систем. Минск, 1978, С. 26–30.
3. Васильев О. В., Тятюшкин А. И. К вычислению оптимального программного управления в одной задаче с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15, № 4, С. 1047–1053.
4. Мансимов К. Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления системами с распределенными параметрами // Доклады АН СССР. 1988. Т. 301, № 3. С. 546–550.
5. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. Представление решения задачи Гурса для линейных стохастических гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка// Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 36. С. 29–43.
6. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. К необходимым условиям оптимальности особых управлений в стохастических системах Гурса – Дарбу // Автоматика и телемеханика. 2022. № 4. С. 47–61.
7. Срочко В. А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 5. С. 1108–1115.
8. Хрычёв Д. А. Об одном стохастическом квазилинейном гиперболическом уравнении // Математический сборник. 1981. Т. 116 (158), № 3 (11). С. 398–426.

References

1. Ashchepkov L.T., Vasilev O.V., Kovalenok I L. Strengthened optimality condition for singular controls in the Goursat–Darboux system. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 6, pp. 1054–1059. (in Russian)
2. Vasilyev O.V., Terletskiy V.A. On the optimization of one class of controlled systems with distributed parameters. *Optimization of dynamical systems. Minsk*, 1978, pp. 26-30. (in Russian)
3. Vasilev O. V., Tyatyushkin A. I. The calculation of the optimal programmed control in a problem with distributed parameters. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1975, vol. 15, iss. 4, pp. 229–236.
4. Mansimov K.B. On the theory of necessary conditions for optimality in a control problem for systems with distributed parameters. *Dokl. Math.*, 1989, vol. 38, no. 1, pp. 116–121.
5. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Representation of the solution of the Goursat problem for linear stochastic hyperbolic differential equations of the second order. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol.36, pp. 29–43. (in Russian)
6. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. On the necessary optimality conditions for singular controls in Goursat-Darboux stochastic systems. *Automation and Remote control*, 2022, vol. 83. no. 4, pp. 536–547.
7. Srochko V.A. Optimality conditions for a certain class of systems with distributed parameters. *Siberian Mathematical Journal*, 1976, vol. 17, iss. 5, pp. 819–825.
8. Khrychov D.A. On one stochastic quasilinear hyperbolic equation. *Math. sbornik*, 1981, vol. 116 (158), no. 3 (11), pp. 398–426. (in Russian)

Об авторах

Мансимов Камиль Байрамали, д-р физ.-мат. наук, проф., Бакинский государственный университет, AZ 1148, Баку, Азербайджан; Институт систем управления, AZ 1141, Баку, Азербайджан, kamilbmansimov@gmail.com, http://orcid.org/0000-0002-1518-2279

Масталиев Рашад Огтай, канд. физ.-мат. наук., доц., Университет «Азербайджан», Az 1007, Баку, Азербайджан; Институт систем управления, AZ 1141, Баку, Азербайджан, rashad.mastaliyev@au.edu.az, http://orcid.org/0000-0001-6387-2146

About the authors

Kamil Mansimov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Baku State University, AZ 1148, Baku, Azerbaijan; Institute of Control Systems, AZ 1141, Baku, Azerbaijan, kamilbmansimov@gmail.com, http://orcid.org/0000-0002-1518-2279

Rashad Mastaliyev, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Assoc. Prof., Azerbaijan University, AZ 1007, Baku, Azerbaijan; Institute of Control Systems, AZ 1141, Baku, Azerbaijan, rashad.mastaliyev@au.edu.az, http://orcid.org/0000-0001-6387-2146

Поступила в редакцию / Received 18.01.2023
Поступила после рецензирования / Revised 23.05.2023
Принята к публикации / Accepted 30.05.2023