Серия «Математика»
2023. Т. 45. С. 24—36

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.977
MSC 49M25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.24

Решение линейно-квадратичных задач в дискретно-непрерывном формате с внешними воздействиями

В. А. Срочко[1], **В. Г. Антоник**[1✉]

[1] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ vga@math.isu.ru

Аннотация. Рассматриваются две задачи линейно-квадратичного типа на множестве кусочно-постоянных управлений. Первая задача содержит дискретное возмущение в правой части управляемой системы и неопределенные параметры в квадратичном функционале со знаконеопределенными матрицами. Решение проводится по правилу гарантированного результата и реализуется в форме конечномерной минимаксной задачи. Получены условия на параметры, приводящие целевую функцию к выпукло-вогнутой структуре и открывающие возможность эффективного решения задачи. Это линейные неравенства, содержащие экстремальные собственные значения симметричных матриц. Вторая задача связана с функционалом в дискретном варианте, который задается как отклонение фазовой траектории от последовательных по времени реализаций внешнего воздействия. Это приводит к пошаговому решению задачи на экстремум данной функции в каждой узловой точке промежутка времени. Возникающие на этом пути локальные задачи допускают эффективное решение за конечное число итераций.

Ключевые слова: линейно-квадратичные задачи, дискретные воздействия на систему и функционал, редукция к задачам выпуклого программирования

Благодарности: Проект реализуется победителем конкурса «Поддержка профессионального развития» благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина, договор гранта № ГЮПР-0006/23.

Ссылка для цитирования: Срочко В. А., Антоник В. Г. Решение линейно-квадратичных задач в дискретно-непрерывном формате с внешними воздействиями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 24–36.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.24

Research article

Resolution of Linear-quadratic Problems in a Discrete-continuous Format with External Actions

Vladimir A. Srochko[1], **Vladimir G. Antonik**[1✉]

[1] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
✉ vga@math.isu.ru

Abstract. Two linear-quadratic problems are considered on the set of piecewise-constant controls. The first problem contains a discrete perturbation on the right side of the controlled system and uncertain parameters in a quadratic functional with sign-indefinite matrices. Its solution is obtained by the guaranteed result rule and is implemented in the form of a finite-dimensional minimax problem. There are obtained conditions for the parameters that convert the objective function to a convex-concave structure and give the possibility of an effective solving of the problem. These are linear inequalities containing extreme eigenvalues of symmetric matrices. The second problem is related to the functional in the discrete variant, which is defined as the deviation of the phase trajectory from consecutive time realizations of the external influence. It gives the opportunity of the step by step searching of the extremmum at each node point of the time interval. Local problems can be effectively solved in a finite number of iterations.

Keywords: linear-quadratic problems, discrete actions to system and functional, reduction to convex problems

Acknowledgements: The project is being implemented by the winner of the contest "Professional Development Support" of the "Vladimir Potanin Scholarship Program" of the Vladimir Potanin Foundation, grant agreement No. GUPR-0006/23.

For citation: Srochko V. A., Antonik V. G. Resolution of Linear-quadratic Problems in a Discrete-continuous Format with External Actions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 24–36. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.24

1. Введение

К настоящему времени в теории линейно-квадратичных задач с ограничением на управление оформились и стали стандартными некоторые характерные признаки. В первую очередь это дискретизация по времени и переход на конечномерный уровень кусочно-постоянных воздействий (управление и возмущение). Управление ориентируется на минимум целевого функционала, возмущение парируется в соответствии с принципом гарантированного результата (минимаксный подход).

Обобщение по части целевого функционала связано с отказом от комфортного предположения положительной определенности для матриц квадратичных форм. При этом возникает проблема конструктивной регуляризации итоговой минимаксной задачи в плане ее преобразования к выпукло-вогнутой структуре, допускающей эффективную численную реализацию.

Наконец, решение некоторых задач необходимо синхронизировать с режимом поступающей информации о возмущениях, что приводит, как правило, к пошаговой процедуре численного решения относительно точек дискретизации.

Указанные особенности отражены в данной статье при изучении двух линейно-квадратичных задач различного формата. Первая задача: линейная система с управлением и возмущением, квадратичный функционал терминально-интегрального типа со знаконеопределенными матрицами и параметрами при квадратичных формах. В результате процедуры дискретизации управления и возмущения получена минимаксная задача, которая приводится к благоприятной для эффективного решения выпукло-вогнутой структуре с условиями на параметры. Эти условия (линейные неравенства) носят спектральный характер и связаны с экстремальными собственными значениями соответствующих симметричных матриц.

Вторая задача: линейная система с многомерным управлением, целевой функционал в дискретном формате как сумма квадратов евклидовых отклонений фазовых траекторий в узловых точках от соответствующих реализаций внешнего воздействия. Эти реализации последовательно формируются на основе предыстории процесса управления и становятся известны только в текущий момент дискретного времени. Такая ситуация приводит к пошаговому решению задачи на экстремум данной функции в каждой узловой точке промежутка времени. Важно подчеркнуть, что возникающие на этом пути локальные задачи (на минимум или максимум) имеют небольшую размерность и допускают эффективное численное решение за конечное число итераций.

2. Линейно-квадратичная задача с возмущением в системе

Пусть для $t \in [t_0, T]$ вектор-функция $x(t) \in R^n$ определяется линейной системой

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + c(t)v(t),\ x(t_0) = x^0 \tag{2.1}$$

с управлением $u(t) \in R$ и возмущением $v(t) \in R$ при условии непрерывности $A(t)$, $b(t)$, $c(t)$.

Определим допустимые воздействия $(u(t),\ v(t))$ на систему (2.1) как множество кусочно-постоянных функций с интервальными ограничениями

$$u(t) \in [u_-, u_+],\ v(t) \in [v_-, v_+],\ t \in [t_0, T]. \tag{2.2}$$

Проведем соответствующую формализацию.

Введем на $[t_0, T]$ набор узловых точек $t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = T$ и выделим промежутки $T_j = [t_{j-1}, t_j),\ j = 1, 2, \ldots, m$ вместе с характеристическими функциями

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_j, \\ 0, & t \in [t_0, T] \backslash T_j. \end{cases}$$

Образуем множества возможных значений

$$Y = \Big\{ y = (y_1, \ldots, y_m):\ y_j \in [u_-, u_+].\ j = 1, 2, \ldots, m \Big\},$$

$$Z = \Big\{ z = (z_1, \ldots, z_m):\ z_j \in [v_-, v_+].\ j = 1, 2, \ldots, m \Big\}$$

и сформируем функции допустимых воздействий (управление и возмущение)

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t),\ \ v(t, z) = \sum_{j=1}^{m} z_j \chi_j(t),\ t \in [t_0, T],\ y \in Y,\ z \in Z.$$

Это ступенчатые функции со значениями y_j, z_j на заданных промежутках $T_j = [t_{j-1}, t_j),\ j = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяющие ограничениям (2.2).

Рассмотрим решение $x(t, y, z)$ системы (2.1), соответствующее допустимой паре $(u(t, y),\ v(t, z))$. Для получения явного выражения от y, z определим следующие объекты:
$x^0(t)$ – решение системы (2.1) при нулевом воздействии $(u(t) = v(t) = 0)$;
$B_\chi(t) \in R^{n\times m}$ – матрица столбцов $b(t)\chi_j(t),\ j = 1, 2, \ldots, m$;
$X_1(t) \in R^{n\times m}$ – решение матричной системы

$$\dot{X}_1(t) = A(t)X_1(t) + B_\chi(t),\ X_1(t_0) = O;$$

$C_\chi(t) \in R^{n\times m}$ – матрица столбцов $c(t)\chi_j(t),\ j = 1, 2, \ldots, m$;
$X_2(t) \in R^{n\times m}$ – решение матричной системы

$$\dot{X}_2(t) = A(t)X_2(t) + C_\chi(t),\ X_2(t_0) = O.$$

Здесь O – матрица, составленная из нулевых элементов.

В этих обозначениях справедливо представление

$$x(t, y, z) = x^0(t) + X_1(t)y + X_2(t)z. \tag{2.3}$$

Проверим систему дифференциальных уравнений для $x(t, y, z)$, учитывая, что

$$B_\chi(t)y = \sum_{j=1}^{m} b(t)\chi_j(t)y_j = b(t)u(t, y),$$

$$C_\chi(t)z = \sum_{j=1}^{m} c(t)\chi_j(t)z_j = c(t)v(t,z).$$

Тогда

$$\dot{x}(t,y,z) = A(t)x^0(t) + A(t)X_1(t)y + b(t)u(t,y) + A(t)X_2(t)z + c(t)v(t,z) =$$

$$= A(t)x(t,y,z) + b(t)u(t,y) + c(t)v(t,z),$$

что и подтверждает формулу (2.3).

На множестве фазовых траекторий $x(t,y,z)$ определим целевую функцию

$$\varphi(y,z) = \frac{1}{2}\left[\alpha\langle x(T,y,z),\, Px(T,y,z)\rangle + \beta\int_{t_0}^{T}\langle x(t,y,z),\, Q(t)x(t,y,z)\rangle dt\right].$$

Здесь $\langle\, ,\rangle$ – скалярное произведение в соответствующем конечномерном пространстве, P, $Q(t)$ – $(n\times n)$ симметричные матрицы, $\alpha>0$, $\beta>0$ – неопределенные параметры (весовые коэффициенты).

Функцию $\varphi(y,z)$ можно интерпретировать как линейную свертку квадратичных функционалов с коэффициентами α, β в некоторой задаче двухкритериальной оптимизации.

В рамках функции $\varphi(y,z)$, $y\in Y$, $z\in Z$, в соответствии с принципом гарантированного результата сформулируем следующую минимаксную задачу (минимум по управлениям, максимум по возмущениям):

$$\min_{y\in Y}\max_{z\in Z}\varphi(y,z). \tag{2.4}$$

Введем функцию максимума

$$\psi(y) = \max_{z\in Z}\varphi(y,z) \tag{2.5}$$

и представим задачу в традиционной форме

$$\psi(y)\to\min,\ y\in Y. \tag{2.6}$$

Наша установка состоит в получении конструктивных условий на параметры функции $\varphi(y,z)$ с целью регуляризации (улучшения) задачи (2.4) в плане ее эффективного численного решения.

3. Параметрическая регуляризация задачи

В первую очередь, используя формулу (2.3) для $x(t,y,z)$, представим явное выражение целевой функции $\varphi(y,z)$. После очевидных преобразований получаем следующую структуру:

$$\varphi(y,z)=\frac{1}{2}\langle y,(\alpha P_{11}+\beta Q_{11})y\rangle+\frac{1}{2}\langle z,(\alpha P_{22}+\beta Q_{22})z\rangle+\langle y,(\alpha P_{12}+\beta Q_{12})z\rangle+$$
$$+\langle y,\alpha P_1+\beta Q_1\rangle+\langle z,\alpha P_2+\beta Q_2\rangle+\varphi(0,0).$$

Здесь введены векторно-матричные обозначения

$$P_{ij}=X_i^{\mathrm{T}}(T)PX_j(T),\quad Q_{ij}=\int\limits_{t_0}^{T}X_i^{\mathrm{T}}(t)Q(t)X_j(t)dt,\ i,j=1,2,\ i\leqslant j;$$

$$P_i=X_i^{\mathrm{T}}(T)Px^0(T),\quad Q_i=\int\limits_{t_0}^{T}X_i^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x^0(t)dt,\ i=1,2.$$

Отметим, что симметричные матрицы P_{ii}, Q_{ii}, $i=1,2$ в силу своей структуры сохраняют свойство знакоопределенности исходных матриц P и $Q(t)$ соответственно:

$$P,\ Q(t)\geqslant 0\ (\leqslant 0)\ \Rightarrow\ P_{ii},\ Q_{ii}\geqslant 0\ (\leqslant 0).$$

Выделим матрицы вторых частных производных

$$\frac{\partial^2\varphi(y,z)}{\partial y^2}=\alpha P_{11}+\beta Q_{11},\quad \frac{\partial^2\varphi(y,z)}{\partial z^2}=\alpha P_{22}+\beta Q_{22}$$

и в рамках задачи (2.4) обеспечим функции $\varphi(y,z)$ свойство выпуклости по y и вогнутости по z с помощью параметров $\alpha>0$, $\beta>0$. Соответствующие условия представим через экстремальные собственные значения $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ возникающих матриц. При этом будем использовать известные представления

$$\lambda_{\min}(A)=\min_{y\neq 0}\frac{\langle y,Ay\rangle}{\langle y,y\rangle},\ \lambda_{\max}(B)=\max_{z\neq 0}\frac{\langle z,Bz\rangle}{\langle z,z\rangle}. \tag{3.1}$$

Свойство выпуклости функции $\varphi(y,z)$ по y эквивалентно спектральному неравенству

$$\lambda_{\min}(\alpha P_{11}+\beta Q_{11})\geqslant 0.$$

С учетом представления (3.1) получаем (минимум суммы и сумма минимумов)

$$\lambda_{\min}(\alpha P_{11}+\beta Q_{11})\geqslant \alpha\lambda_{\min}(P_{11})+\beta\lambda_{\min}(Q_{11}).$$

Эта оценка приводит к достаточному условию выпуклости (линейное неравенство)

$$\alpha\lambda_{\min}(P_{11}) + \beta\lambda_{\min}(Q_{11}) \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Аналогично вогнутость функции $\varphi(y,z)$ по z соответствует неравенству

$$\lambda_{\max}(\alpha P_{22} + \beta Q_{22}) \leqslant 0.$$

Используя представление (3.1), получаем оценку сверху

$$\lambda_{\max}(\alpha P_{22} + \beta Q_{22}) \leqslant \alpha\lambda_{\max}(P_{22}) + \beta\lambda_{\max}(Q_{22})$$

и достаточное условие вогнутости

$$\alpha\lambda_{\max}(P_{22}) + \beta\lambda_{\max}(Q_{22}) \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, пара линейных неравенств (3.2), (3.3) с условием положительности параметров α, β обеспечивает целевой функции $\varphi(y,z)$ выпукло-вогнутую структуру, что является существенно благоприятным фактором в рамках минимаксной задачи (2.4).

Отметим, что строгие неравенства в (3.2), (3.3) обеспечивают выпукло-вогнутое свойство в строгом смысле.

Приведем примеры разрешимости системы неравенств (3.2), (3.3) вместе с условиями положительности параметров. Представим ситуацию в сокращенном формате

$$p_1\alpha + q_1\beta \geqslant 0,\ p_2\alpha + q_2\beta \leqslant 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0 \tag{3.4}$$

и выделим некоторые случаи совместности системы (3.4) по знакам коэффициентов p_j, q_j, $j = 1, 2$.

Рассмотрим, например, вариант, когда $p_j < 0$, $q_j > 0$. В исходных обозначениях это соответствует следующей знакоопределенности матриц: $P \leqslant 0$, $Q(t) \geqslant 0$. Из неравенств (3.4) получаем

$$\beta \geqslant \frac{\alpha|p_1|}{q_1},\ \ \beta \leqslant \frac{\alpha|p_2|}{q_2},$$

что приводит к условию совместности

$$\frac{|p_1|}{q_1} \leqslant \frac{|p_2|}{q_2}.$$

При этом допустимые значения параметров представляются в виде

$$\alpha > 0,\ \beta \in \left[\frac{\alpha|p_1|}{q_1},\ \frac{\alpha|p_2|}{q_2}\right].$$

Выделим еще один случай для системы (3.4), когда $p_1 > 0$, $p_2 < 0$, $q_1 < 0$, $q_2 > 0$. Это приводит к двум оценкам

$$\beta \leqslant \frac{\alpha p_1}{|q_1|},\ \beta \leqslant \frac{\alpha|p_2|}{q_2}.$$

Отсюда получаем множество допустимых значений параметров

$$\alpha > 0,\ 0 < \beta \leqslant \alpha \min\left\{\frac{p_1}{|q_1|}, \frac{|p_2|}{q_2}\right\}.$$

В заключение проведем характеризацию минимаксной задачи (2.4) после ее регуляризации: $\varphi(y,z)$ – выпукло-вогнутая функция. Тогда составляющие задачи (2.5), (2.6) являются выпуклыми: максимум вогнутой функции $\varphi(y,z)$ по $z \in Z$ и минимум выпуклой функции $\psi(y)$ для $y \in Y$. Если регуляризация прошла по строго вогнутому сценарию (строгое неравенство (3.3)), то внутренняя задача на максимум

$$\varphi(y,z) \to \max,\ z \in Z$$

имеет единственное решение $z(y)$, и функция $\psi(y)$ приобретает свойство дифференцируемости с градиентом

$$\nabla\psi(y) = \frac{\partial\varphi(y,z(y))}{\partial y}.$$

С учетом простейшей структуры ограничений (двусторонние неравенства) составляющие минимакс задачи (2.5), (2.6) допускают эффективное решение известными методами выпуклого программирования [3; 5].

Замечание 1. В связи с рассмотренной задачей (линейная система с возмущением, задача оптимального гарантированного управления) укажем в качестве альтернативы публикации [2;4], в которых для линейной терминальной задачи конструируется управление с обратной связью в дискретные моменты времени.

4. Задача на экстремум суммы квадратов отклонений

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(t_0) = x^0 \tag{4.1}$$

с переменными $t \in [t_0, T]$, $x \in R^n$, $u \in R^r$ (время, состояние, управление) при условии непрерывности матричных функций $A(t)$, $B(t)$. Введем ограничение на управление

$$u(t) \in U,\ t \in [t_0, T],$$

где U – выпуклый компакт в R^r.

Представим множество допустимых управлений. Введем на отрезке $[t_0, T]$ набор узлов $t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = T$ и выделим промежутки $T_j = [t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ с характеристическими функциями

$\chi_j(t)$, $t \in [t_0, T]$. Определим массив параметров y_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, m$ и введем набор r-мерных векторов $y^j = (y_{1j}, \ldots, y_{rj})$. Сформируем блочный вектор $y = (y^1, \ldots, y^m)$ с множеством значений

$$Y = \Big\{ y = (y^1, \ldots, y^m) : \ y^j \in U, \ j = 1, 2, \ldots, m \Big\}.$$

Для $y \in Y$ образуем управление

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(t) y^j, \ t \in [t_0, T]. \tag{4.2}$$

Это кусочно-постоянная (ступенчатая) вектор-функция на заданной сетке со значениями $u(t, y) = y^j$, $t \in T_j$ и ограничением $u(t) \in U$, $t \in [t_0, T)$. Формула (4.2) определяет допустимое управление.

Рассмотрим решение $x(t, y)$ системы (4.1), соответствующее управлению $u(t, y)$. Введем $(n \times r)$ матричную функцию $X_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ как решение матричной задачи Коши

$$\dot{X}_j(t) = A(t) X_j(t) + B(t) \chi_j(t), \ X_j(t_0) = O. \tag{4.3}$$

Тогда справедливо представление

$$x(t, y) = x^0(t) + \sum_{j=1}^{m} X_j(t) y^j, \ t \in [t_0, T],$$

где $x^0(t)$ — решение системы (4.1) при $u = 0$.

Согласно уравнению (4.3) имеем $X_j(t) \equiv O$, $t \in [t_0, t_{j-1}]$, $j = 2, 3, \ldots, m$. Следовательно, в узловых точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ получаем $X_j(t_k) = O$, $j > k$. Отсюда следует представление

$$x(t_k, y) = x^0(t_k) + \sum_{j=1}^{k} X_j(t_k) y^j, \ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.4}$$

Отметим, что фактически $x(t_k, y) = x(t_k, y^1, \ldots, y^k)$.

На множестве узловых состояний (4.4) определим целевую функцию

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \| x(t_k, y^1, \ldots, y^k) - z^{k-1} \|^2$$

с евклидовой нормой и набором векторов $z = (z^0, z^1, \ldots, z^{m-1})$. Отметим структуру функции φ:

$$\varphi(y, z) = \varphi_1(y^1, z^0) + \varphi_2(y^1, y^2, z^1) + \cdots + \varphi_m(y^1, \ldots, y^m, z^{m-1}),$$

$$\varphi_k(y^1,\ldots,y^k,z^{k-1})=\frac{1}{2}\|x(t_k,y^1,\ldots,y^k)-z^{k-1}\|^2.$$

Введем обозначение $s^k=x^0(t_k)-z^{k-1}$ и с учетом формулы (4.4) конкретизируем выражение для φ_k:

$$\varphi_k(y^1,\ldots,y^k,z^{k-1})=\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{m}X_j(t_k)y^j\right\|^2+ \tag{4.5}$$

$$+\left\langle\sum_{j=1}^{m}X_j(t_k)y^j,s^k\right\rangle+\frac{1}{2}\|s^k\|^2.$$

Это выпуклая квадратичная функция по переменным $y^1,\ldots,y^k$.

В отношении массива векторов $\{z^{k-1}\}$ примем следующий режим поступления информации: векторное значение z^{k-1} становится известным в момент времени t_{k-1} и реализуется на основе уже полученных значений управления $\overline{y}^1,\ldots,\overline{y}^{k-1}$. При этом стартовое значение z^0 предъявляется на основе начального состояния системы x^0. Например, в простейшем случае $z^0=x^0,\ z^{k-1}=x(t_{k-1},\overline{y}^1,\ldots,\overline{y}^{k-1}),\ k=2,3,\ldots,m.$

Таким образом, последовательность $\{z^{k-1}\}$ реализует некоторое внешнее воздействие, связанное с динамикой процесса управления и формирующее целевую установку последовательного принятия решений в рамках функции $\varphi(y,z)$.

Поставим соответствующую задачу оптимального управления с альтернативной направленностью

$$\varphi(y,z)\to\mathrm{extr},\ y\in Y, \tag{4.6}$$

где $z=(z^0,z^1,\ldots,z^{m-1}),\ \mathrm{extr}=\min\vee\max.$

Динамика последовательной реализации блочного вектора z описана ранее. При этом задача на минимум соответствует «дружественному» воздействию z, задача на максимум отвечает на «недружественную» информацию.

Процедура решения задачи (4.6) имеет пошаговый характер, связанный с реализацией внешнего воздействия z^{k-1}, $k=1,2,\ldots,m$.

Первый шаг: $k=1$, значение z^0 известно.
Вспомогательная задача

$$\varphi_1(y^1,z^0)\to\mathrm{extr},\ y^1\in U. \tag{4.7}$$

Решение y^1_*.

Общий шаг: $k=2,3,\ldots,m$, значение z^{k-1} известно вместе с набором решений $y^1_*,\ldots,y^{k-1}_*$.
Вспомогательная задача

$$\varphi_k(y^1_*,\ldots,y^{k-1}_*,y^k,z^{k-1})\to\mathrm{extr},\ y^k\in U. \tag{4.8}$$

Решение y_*^k.

В результате получаем полный набор значений $y_* = (y_*^1, \ldots, y_*^m)$, формирующих кусочно-оптимальное управление $u(t, y_*)$, $t \in [t_0, T)$.

Проведем характеризацию вспомогательных задач описанной процедуры.

Прежде всего конкретизируем множество U стандартным образом через двусторонние ограничения на управление:

$$u(t) \in [u^-, u^+],\ t \in [t_0, T] \ \Leftrightarrow\ u_i(t) \in [u_i^-, u_i^+],\ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Это приводит к аналогичным условиям на y-переменные: $y^j \in [u^-, u^+]$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Целевая функция φ_k в задачах (4.7), (4.8) определяется формулой (4.5) и является квадратичной выпуклой функцией переменной y^k с градиентом

$$\frac{\partial \varphi_1(y^1, z^0)}{\partial y^1} = X_1^{\mathrm{T}}(t_1)(x(t_1, y^1) - z^0),$$

$$\frac{\partial \varphi_k(y_*^1, \ldots, y_*^{k-1}, y^k, z^{k-1})}{\partial y^k} =$$

$$= X_k^{\mathrm{T}}(t_k)(x(t_k, y_*^1, \ldots, y_*^{k-1}, y^k) - z^{k-1}),\ k = 2, 3, \ldots, m.$$

Выделим частный случай, когда управление $u(t, y)$ является скалярной функцией ($r = 1$). Это значит, что для $j = 1, 2, \ldots, m$ y^j — скалярная переменная, $X_j(t)$ – $(n \times 1)$ — вектор-функция, $\varphi_k(y^1, \ldots, y^k, z^{k-1})$ — выпуклая парабола относительно переменной y^k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Следовательно, вспомогательные задачи (4.7), (4.8) (минимума или максимума параболы на отрезке) решаются аналитически.

В общем случае ($r > 1$) вспомогательные задачи (4.7), (4.8) на экстремум выпуклой квадратичной функции при двусторонних ограничениях на переменные решаются за конечное число итераций:
задача на минимум (квадратичное программирование) – метод особых точек [3; 5];
задача на максимум (выпуклая максимизация) – метод угловых точек [1; 8].

Замечание 2. Представленная задача экстремальных квадратов в части технологии последовательного решения в зависимости от режима поступающей информации имеет аналогии с известными разработками [6; 7; 9]: задача моделирования управления с методом динамической регуляризации и задача динамической реконструкции управления с методом минимизации квадратичной невязки.

5. Заключение

Отметим основные характеристики представленного подхода:
– задача формулируется в классе кусочно-постоянных воздействий (управление, возмущение) относительно заданной сетки узлов дискретизации;
– целевой функционал содержит параметры (весовые коэффициенты) при квадратичных формах, его образующих;
– явное выражение для функционала в конечномерном формате;
– условия на параметры, обеспечивающие целевой функции приемлемые свойства (выпуклость, вогнутость) в плане возможности эффективного численного решения соответствующей задачи.

Дальнейшие исследования в этом направлении могут быть связаны с расширением класса рассматриваемых задач (например, системы с распределенными параметрами и соответствующие квадратичные функционалы).

Список источников

1. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Решение линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-постоянных управлений с параметризацией функционала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 3. С. 5–16. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16
2. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011. 620 с.
4. Дмитрук Н. М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 66–82. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-66-82
5. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. М. : Физматлит, 2005. 304 с.
6. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Серия: Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
7. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. М. : Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
8. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г. Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 37. С. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3
9. Субботина Н. Н., Крупенников Е. А. Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208–220. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-208-220

References

1. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Solution of a linear–quadratic problem on a set of piecewise constant controls with parametrization of the functional. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 5–16. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16 (in Russian)
2. Balashevich N.V., Gabasov R., Kirillova F.M. Construction of optimal feedback on mathematical models with uncertainty. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 265–286. (in Russian)
3. Vasiliev F.P. *Optimization methods*, Moscow, ICNMO Publ., 2011, 620 p. (in Russian)
4. Dmitruk N.M. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 3. pp. 66–82. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-66-82 (in Russian)
5. Izmailov A.F., Solodov M.V. *Numerical optimization methods*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 304 p. (in Russian)
6. Kryajimsky A.V., Osipov Yu.S. On modeling of control in a dynamic system. *Engineering Cybernetics*, 1983, no. 2. pp. 51–60. (in Russian)
7. Osipov Yu.S., Vasiliev F.P., Potapov M.M. *Elements of the dynamic regularization method*. Moscow, MSU Publ., 1999, 237 p. (in Russian)
8. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V., Antonik V.G. Resolution of a linear-quadratic optimal control problem based on finite-dimensional Models. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 33, pp. 3-–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3 (in Russian)
9. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. Weak* approximations for the solution of a dynamic reconstruction problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2. pp. 208–220. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-208-220 (in Russian)

Об авторах

Срочко Владимир Андреевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, srochko@math.isu.ru

Антоник Владимир Георгиевич, канд. физ.-мат. наук, доц., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, vga@math.isu.ru

About the authors

Vladimir A. Srochko, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, srochko@math.isu.ru

Vladimir G. Antonik, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, vga@math.isu.ru

Поступила в редакцию / Received 30.05.2023
Поступила после рецензирования / Revised 05.07.2023
Принята к публикации / Accepted 12.07.2023