Серия «Математика»
2023. Т. 44. С. 31—43

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.946
MSC 35P25, 35P30, 35Q51, 35Q53, 37K15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31

Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с источником специального вида

Г. У. Уразбоев[1], **М. М. Хасанов**[1✉], **И. И. Балтаева**[1]

[1] Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан
✉ hmuzaffar@mail.ru

Аннотация. Рассматривается уравнение Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником, соответствующим собственным значениям соответствующей спектральной задачи. Показано, что рассматриваемое уравнение может быть проинтегрировано методом обратной спектральной задачи. Определена эволюция спектральных данных оператора Штурма – Лиувилля с периодическим потенциалом, связанного с решением рассматриваемого уравнения. Полученные результаты позволяют применить метод обратной задачи для решения уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником, соответствующим собственным значениям соответствующей спектральной задачи.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Фриза отрицательного порядка, самосогласованный источник, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина – Трубовица, формулы следов

Ссылка для цитирования: Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Балтаева И. И. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного
порядка с источником специального вида // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 44. С. 31–43.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31

Research article

Integration of the Negative Order Korteweg-de Vries Equation with a Special Source

Gayrat U. Urazboev[1], **Muzaffar M. Khasanov**[1✉],
Iroda I. Baltaeva[1]

[1] Urgench State Univeresity, Urgench, Uzbekistan
✉ hmuzaffar@mail.ru

Abstract. In this paper, we consider the negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source corresponding to the eigenvalues of the corresponding spectral problem. It is shown that the considered equation can be integrated by the method of the inverse spectral problem. The evolution of the spectral data of the Sturm-Liouville operator with a periodic potential associated with the solution of the considered equation is determined. The results obtained make it possible to apply the inverse problem method for solving the negative order Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source corresponding to the eigenvalues of the corresponding spectral problem.

Keywords: negative order Korteweg-de Vries equation, self-consistent source, inverse spectral problem, system of Dubrovin-Trubovitz equations, trace formulas

For citation: Urazboev G. U., Khasanov M. M., Baltaeva I. I. Integration of the Negative Order Korteweg-de Vries Equation with a Special Source. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 44, pp. 31–43. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.31

1. Введение

Одним из представителей класса вполне интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, имеющих большое прикладное значение, является уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ). Полная интегрируемость этого уравнения методом обратной задачи в классе быстроубывающих функций впервые была установлена в работе [15]. Исследованию уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций посвящены работы [1; 2; 5; 8; 17; 18].

J. M. Verosky [25] при изучении симметрий и отрицательных степеней рекурсивного оператора получил следующее уравнение КдФ отрицательного порядка:

$$\left(\frac{p_{xx}}{p}\right)_t + 2pp_x = 0\,. \tag{1.1}$$

Изучению уравнения КдФ отрицательного порядка посвящены работы [19; 25]. S. Y. Lou [19] представил дополнительные симметрии, основанные на обратимости рекурсивного оператора системы КдФ, и, в частности, показал, что уравнение КдФ отрицательного порядка эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x, \\ p_{xx} + qp = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Изучение интегрируемых иерархий отрицательного порядка играет важную роль в теории остроконечных солитонов [14; 27]. В работе [21] изучена иерархия уравнения КдФ отрицательного порядка, в частности, уравнений (1.1) и (1.2).

В работах [13; 21–23; 26; 28] были изучены гамильтонова структура, бесконечное множество законов сохранения, N-солитонные, квазипериодические волновые решения для уравнения КдФ отрицательного порядка.

В работе [7] В. К. Мельникова с помощью метода обратной задачи рассеяния было проинтегрировано уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций, а в работе [12] изучено уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Огромное количество исследований, касающихся изучения интегрируемых уравнений с самосогласованным источником, связаны с нелинейными эволюционными уравнениями положительного порядка.

В работе [11] изучено уравнение КдФ отрицательного порядка с самосогласованным интегральным источником в классе периодических функций.

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения КдФ отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее уравнение Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в виде суммы:

$$\begin{cases} q_t = -2pp_x + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) s(\pi, \lambda_k, t) \left(\psi_+^2(x, \lambda_k, t)\right)_x \\ pq - p_{xx} = 0 \end{cases}, t > 0, \quad x \in R^1, \tag{1.3}$$

с условиями

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{1.4}$$

$$p(x,t)|_{x=0} = p_0(t),$$

где $q_0(x)$ и $p_0^2(t)$ — действительные функции, причём $q_0(x)$ — π-периодическая функция. Требуется найти действительные функции $q(x,t)$ и $p^2(x,t)$, которые π-периодические по переменной x:

$$p^2(x+\pi, t) \equiv p^2(x,t), q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), t \geq 0, \quad x \in R^1, \tag{1.5}$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{array}{l} q(x,t) \in C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0), \\ p(x,t) \in C_x^2(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{array} \tag{1.6}$$

Здесь $\alpha_k(t) \in C\left([0,\ \infty)\right)$ — заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\alpha_k(t) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{k^2}\right),\ \ k \to \infty$, $\psi_+(x, \lambda, t)$ —

решения Флоке уравнения Штурма – Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{1.7}$$

(нормированные условием $\psi_+(0,\lambda,t) = 1$), а $s(x,\lambda,t)$ — решение уравнения (1.7), удовлетворяющее начальным условиям
$s(0,\lambda,t) = 0,\ s'(0,\lambda,t) = 1$. Через $\lambda_k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ мы обозначим собственные значения, пронумерованные в порядке возрастания, либо периодической ($y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi)$), либо антипериодической ($y(0) = -y(\pi),\quad y'(0) = -y'(\pi)$) задачи для уравнения Штурма – Лиувилля (1.7). Будем считать, что $\lambda_0 > 0$, это обеспечивает положительность спектральных параметров $\xi_n,\ n = 1,\ 2,\ ...$.

Цель данной работы — дать процедуру построения решения
$(q(x,t),p(x,t),\psi_+(x,\lambda,t))$ задачи (1.3)–(1.6) в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма – Лиувилля с периодическим коэффициентом.

2. Необходимые сведения о прямой и обратной спектральной задаче для оператора Штурма – Лиувилля с периодическим коэффициентом

В этом пункте для полноты изложения приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма – Лиувилля с периодическим потенциалом (см. [4; 6; 9; 10; 16; 20; 24])

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{2.1}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π-периодическая функция.

Для рассматриваемого оператора функция Ляпунова имеет вид $\Delta(\lambda) = c(\pi,\,\lambda) + s(\pi,\,\lambda)$, где $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ — решения уравнения (2.1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = 1,\ c'(0,\lambda) = 0$ и $s(0,\lambda) = 0,\ s'(0,\lambda) = 1$. Уравнение (1.1) имеет два линейно независимых решения, которые имеют следующий вид:

$$\psi_\pm(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)} s(x,\lambda). \tag{2.2}$$

Решения (2.2) называются решениями Флоке.

Из этого равенства следует, что функция $\psi_\pm(x,\lambda)$ имеет полюсы первого порядка в нулях $\lambda = \xi_n,\ n = 1,\ 2,\ ...$ функции $s(\pi,\lambda)$. Используя выражение (2.2), нетрудно доказать равенство

$$s(\pi,\lambda)\psi_+(x,\lambda)\psi_-(x,\lambda) = s(\pi,\lambda)c^2(x,\lambda) + (s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda))s(x,\lambda)c(x,\lambda) -$$
$$-c'(\pi,\lambda)s^2(x,\lambda).$$

Отсюда, в частности, получим конечность следующего предела:

$$\lim_{\lambda\to\xi_n} s(\pi,\lambda)\psi_+(x,\lambda)\psi_-(x,\lambda).$$

Выражение $s(\pi,\xi_n)\psi_+(x,\xi_n)\psi_-(x,\xi_n)$ понимается в следующем смысле:

$$s(\pi,\xi_n)\psi_+(x,\xi_n)\psi_-(x,\xi_n) = \lim_{\lambda\to\xi_n} s(\pi,\lambda)\psi_+(x,\lambda)\psi_-(x,\lambda).$$

Спектр оператора (2.1) имеет вид

$$E = \{\lambda \in R^1 : \ -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\ \} = [\lambda_0,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\ \lambda_3]\cup\ldots\cup[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]\cup\ldots$$

, где интервалы $(-\infty,\ \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ называются лакунами. Здесь λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} — собственные значения периодической задачи ($y(0) = y(\pi)$,$y'(0) = y'(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} — собственные значения антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$) для уравнения (2.1).

Функция $s(\pi,\lambda)$ имеет счетное число нулей ξ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, которые совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y(0) = y(\pi) = 0$) для уравнения (2.1), кроме того, выполняются следующие включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Набор ξ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ вместе со знаками $\sigma_n = sign\,\{s'(\pi,\xi_n) - c(\pi,\xi_n)\}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ называется спектральными параметрами задачи (2.1). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ и границы λ_n, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ спектра называются спектральными данными оператора (2.1). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (2.1).

Спектр оператора Штурма – Лиувилля с коэффициентом $q(x+\tau)$ не зависит от действительного параметра τ, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}} \tag{2.3}$$

Система уравнений Дубровина и следующая формула следов

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t))$$

дают метод решения обратной задачи.

3. Эволюция спектральных параметров

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $((q(x,t), p^2(x,t),\ \psi_+(x,\lambda,t))$ *— решение задачи* (1.3)–(1.6). *Тогда спектр оператора* (1.7) *не зависит от параметра* t, *а спектральные параметры* $\xi_n(t)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, *удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n+1}\sigma_n(t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p^2(0,t) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda_k,t)\alpha_k(t)}{\xi_n-\lambda_k}\right\}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}, n\geq 1, \tag{3.1}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n\geq 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n\geq 1$ — спектральные параметры оператора Штурма – Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. В работе [11] показано, что если $q(x,t)$ — решение системы

$$\begin{cases} q_t = -2pp_x + G(x,t) \\ pq - p_{xx} = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

то справедливы следующие равенства

$$\dot{\xi}_n = -\frac{1}{2\xi_n}[y_n^2(\pi,t) - y_n^2(0,t)]p^2(0,t) + \int_0^{\pi} y_n^2(x,t)G(x,t)dx, \tag{3.3}$$

где $y_n(x,t)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ — ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0)=0,\ \ y(\pi)=0$) для уравнения (1.7), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$.

Полагая

$$G(x,t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\big(\psi_+^2(x,\lambda_k,t)\big)_x,$$

получим

$$\int_0^{\pi} G\cdot y_n^2 dx = 2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\left\{2\int_0^{\pi} y_n^2\cdot(\psi_+^2)'dx\right\}.$$

Нетрудно заметить, что

$$2\int_0^\pi y_n^2\cdot(\psi_+^2)'dx=\frac{1}{\xi_n-\lambda_k}\cdot[y_n^2(\pi,t)-y_n^2(0,t)],$$

таким образом,

$$\int_0^\pi G{\cdot}y_n^2dx=[y_n^2(\pi,t)-y_n^2(0,t)]\cdot\sum_{k=1}^\infty\frac{s(\pi,\lambda_k,t)\alpha_k(t)}{\xi_n-\lambda_k}. \tag{3.4}$$

Подставляя выражение (3.4) в (3.3), имеем

$$\dot{\xi}_n=[y_n^2(\pi,t)-y_n^2(0,t)]\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2\xi_n}p^2(0,t)+\sum_{k=1}^\infty\frac{s(\pi,\lambda_k,t)\alpha_k(t)}{\xi_n-\lambda_k}\right\}. \tag{3.5}$$

Используя равенства

$$y_n(x,t)=\frac{1}{c_n(t)}s(x,\xi_n(t),t),$$

$$c_n^2(t)\equiv\int_0^\pi s^2(x,\xi_n(t),t)dx=s'(\pi,\xi_n(t),t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}$$

, имеем

$$y_n^2(\pi,t)-y_n^2(0,t)=\frac{1}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}\left(s'(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\right)$$

. Подставляя сюда выражение

$$s'(\pi,\xi_n,t)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n,t)}=\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2\left(\xi_n(t)\right)-4}$$

, получим

$$y_n^2(\pi,t)-y_n^2(0,t)=\frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2\left(\xi_n(t)\right)-4}}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}.$$

Здесь $\sigma_n(t)=sign\left\{s'(\pi,\xi_n(t),t)-c(\pi,\xi_n(t),t)\right\}$.

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda)-4=4\pi^2(\lambda_0-\lambda)\prod_{k=1}^\infty\frac{(\lambda_{2k-1}-\lambda)(\lambda_{2k}-\lambda)}{k^4},$$

$$s(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\lambda}{k^2}$$

следует, что

$$y_n^2(\pi,t)-y_n^2(0,t)=2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) получим (3.1).

Теперь докажем независимость от t собственных значений λ_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ периодической и антипериодической задач для уравнения Штурма – Лиувилля (1.7). Согласно [11]

$$\dot{\lambda}_n(t)=\int_0^{\pi}G(x,t)v_n^2(x,t)dx$$

, где $v_n(x,t)$ — нормированная собственная функция периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма – Лиувилля (1.7). Учитывая вид функции $G(x,t)$ и действуя, как прежде, получим $\dot{\lambda}_n(t)=0$. □

Следствие 1. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ и t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t: $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n=\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$, $n\geq 1$. В этом случае система (3.1) примет вид

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^{n+1}\sigma_n(\tau,t)\left\{\frac{1}{2\xi_n}p^2(\tau,t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda_k,t,\tau)\alpha_k(t)}{\xi_n-\lambda_k}\right\}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}. \tag{3.7}$$

Здесь

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t,\tau)-\lambda}{k^2}. \tag{3.8}$$

Учитывая формулы следов

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)), \tag{3.9}$$

$$p^2(\tau,t) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\tau}\frac{\partial\xi_k(s,t)}{\partial t}ds + 2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t) -$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\psi_+^2(\tau,\lambda_k,t) + p_0^2(t). \qquad (3.10)$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1.3)–(1.6). Действительно, обозначим через λ_n, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n = 1,\ 2,\ \dots$, спектральные данные задачи

$$-y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1.$$

Найдём спектральные данные λ_n, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n = 1,\ 2,\ \dots$ для уравнения

$$-y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau,t)\,|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau,t)\,\Big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\ , n = 1,\ 2,\ \dots$$

для системы уравнений Дубровина (3.7). По формуле следов (3.9) находим решение $q(x,t)$ задачи (1.3)–(1.6), после что из (2.2) определяем решения Флоке $\psi_+(x,\lambda,t)$ и затем из формулы (3.10) определяем $p^2(x,t)$.

Список источников

1. Дубровин Б. А. Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функциональный анализ и его приложения. 1975. Т. 9, вып. 3. С. 41–51. http://mi.mathnet.ru/faa2261
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега – де Фриза // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1974. Т. 67, № 6. С. 2131–2143.
3. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриса // Теоретическая и математическая физика. 1975. Т. 23, № 1. С. 51–68. http://mi.mathnet.ru/tmf3750
4. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М. :Наука, 1988.
5. Марченко В. А. Периодическая задача Кортевега – де Фриса // Математический сборник (новая серия). 1974. Т. 95 (135), № 3(11). С. 331–356. http://mi.mathnet.ru/msb3757
6. Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла // Математический сборник (новая серия). 1975. Т. 97 (139), № 4 (8). С. 540–606. http://mi.mathnet.ru/msb3807

7. Мельников В. К. Метод интегрирования уравнения Кортевега – де Вриса с самосогласованным источником. Препринт № 2-88-11/798. Дубна :ОИЯИ, 1988. https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-d/d3b9e5b61499cfe7675c6be753aeca7c
8. Новиков С. П. Периодическая задача Кортевега – де Фриза. I // Функциональный анализ и его приложения. 1974. Т. 8, вып. 3. С. 54–66. http://mi.mathnet.ru/faa2358
9. Станкевич И. В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37. http://mi.mathnet.ru/dan35384
10. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 2 т.
11. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М. Интегрирование уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, вып. 2. С. 228-239. https://doi.org/10.35634/vm220205
12. Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б. Об уравнении Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 164, № 2. С. 214–221.
13. Chen J. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2018. Vol. 15, Iss. 3. 1850040. https://doi.org/10.1142/S0219887818500408
14. Degasperis A., Procesi M. Asymptotic integrability // Symmetry and perturbation theory. Singapore : World Scientific, 1999. P. 23–37.
15. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, Iss. 19. P. 1095–1097. http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
16. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm – Liouville operators with frozen argument // Applied Mathematics Letters. 2022. Vol. 131. 108035. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108035
17. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1975. Vol. 28, Iss. 1. P. 141–188. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280105
18. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equations // Nonlinear wave motion. Providence : AMS, 1974. P. 85–96. https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0344645
19. Lou S. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations // Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 35, Iss. 5. P. 2390–2396. http://doi.org/10.1063/1.530509
20. Magnus W., Winkler W. Hill's equation. New York : Interscience Publishers, 1966.
21. Qiao Z., Fan E. Negative-order Korteweg – de Vries equations // Physical Review E. 2012. Vol. 86, Iss. 1. 016601. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016601
22. Qiao Z., Li J. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions // Europhysics Letters. 2011. Vol. 94, N 5. 50003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/50003
23. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative order KdV equation with no solitary traveling waves // Mathematics. 2022. Vol. 10, N 1. P. 48. https://doi.org/10.3390/math10010048

24. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1977. Vol. 30, Iss. 3. P. 321–337. https://doi.org/10.1002/cpa.3160300305
25. Verosky J. M. Negative powers of Olver recursion operators // Journal of Mathematical Physics. 1991. Vol. 32, Iss. 7. P. 1733–1736. https://doi.org/10.1063/1.529234
26. Wazwaz A.-M. Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator // Waves in Random and Complex Media. 2017. Vol. 27, Iss. 4. P. 768–778. https://doi.org/10.1080/17455030.2017.1317115
27. Zhang G., Qiao Z. Cuspons and smooth solitons of the Degasperis–Procesi equation under inhomogeneous boundary condition // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2007. Vol. 10, Iss. 3. P. 205–225. https://doi.org/10.1007/s11040-007-9027-2
28. Zhao S., Sun Y. A discrete negative order potential Korteweg–de Vries equation // Zeitschrift furNaturforschung A. 2016. Vol. 71, Iss. 12. P. 1151–1158. https://doi.org/10.1515/zna-2016-0324

References

1. Dubrovin B.A. Periodic problems for the Korteweg-de Vries equation in the class of finite band potentials. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1975, vol. 9, pp. 215–223. https://doi.org/10.1007/BF01075598
2. Dubrovin B.A., Novikov S.P. Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1975, vol. 67, pp. 1058-1063.
3. Its A.R., Matveev V.B. Schrodinger operators with finite-gap spectrum and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Theor. Math. Phys.*, 1975, vol. 23, pp. 343–355. https://doi.org/10.1007/BF01038218
4. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka (Sturm-Liouville and Dirac operators)*. Moscow, Nauka Publ., 1988.
5. Marchenko V. A The periodic Korteweg-de Vries problem. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1974, vol. 24, pp. 319–344. http://mi.mathnet.ru/msb3757
6. Marchenko V.A., Ostrovskii I.V. A characterization of the spectrum of Hill's operator. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1975, vol. 26, pp. 493–554. http://doi.org/10.1070/SM1975v026n04ABEH002493
7. Mel'nikov V. K. *A method for integrating the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source. Preprint no. 2-88-11/798.* Dubna, Joint Institute for Nuclear Research, 1988. https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-d/d3b9e5b61499cfe7675c6be753aeca7c
8. Novikov S.P. The periodic problem for the Korteweg—de vries equation. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1974, vol 8, pp. 236–246.
9. Stankevich I.V. A certain inverse spectral analysis problem for Hill's equation. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970. Vol. 192, pp. 34–37. http://mi.mathnet.ru/eng/dan35384
10. Titchmarsh E.C. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part 2.* London, Oxford University Press, 1958.
11. Urazboev G.U., Hasanov M.M. Integration of the negative order Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022. vol. 32, pp. 228–239.

12. Khasanov A.B., Yakhshimuratov A.B. The Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2010, vol. 164, pp. 1008-1015. https://doi.org/10.1007/s11232-010-0081-8
13. Chen J. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2018, vol. 15, 1850040. https://doi.org/10.1142/S0219887818500408
14. Degasperis A., Procesi M. Asymptotic integrability. *Symmetry and perturbation theory.* Singapore, World Scientific, 1999, pp. 23–37.
15. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. *Physical Review Letters*, 1967, vol. 19, iss. 19, pp. 1095–1097. http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
16. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm–Liouville operators with frozen argument. *Applied Mathematics Letters*, 2022, vol. 131, 108035. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108035
17. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics,* 1975, vol. 28, iss. 1, pp. 141–188. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280105
18. Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equations. *Nonlinear wave motion.* Providence, AMS, 1974, pp. 85–96. https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0344645
19. Lou S. Symmetries of the KdV equation and four hierarchies of the integrodifferential KdV equations. *Journal of Mathematical Physics*, 1994, vol. 35, pp. 2390–2396. http://doi.org/10.1063/1.530509
20. Magnus W., Winkler W. *Hill's equation.* New York, Interscience Publishers, 1966.
21. Qiao Z., Fan E. Negative-order Korteweg–de Vries equations. *Physical Review E*, 2012, vol. 86, 016601. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016601
22. Qiao Z., Li J. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions. *Europhysics Letters*, 2011, vol. 94, 50003. https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/50003
23. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative order KdV equation with no solitary traveling waves. *Mathematics*, 2022. vol. 10, 48. https://doi.org/10.3390/math10010048
24. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1977, vol. 30, pp. 321–337. https://doi.org/10.1002/cpa.3160300305
25. Verosky J.M. Negative powers of Olver recursion operators. *Journal of Mathematical Physics*, 1991, vol. 32, iss. 7, pp. 1733–1736. https://doi.org/10.1063/1.529234
26. Wazwaz A.-M. Negative-order KdV equations in (3+1) dimensions by using the KdV recursion operator. *Waves in Random and Complex Media*, 2017, vol. 27, pp. 768–778. https://doi.org/10.1080/17455030.2017.1317115
27. Zhang G., Qiao Z. Cuspons and smooth solitons of the Degasperis–Procesi equation under inhomogeneous boundary condition. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2007, vol. 10, pp. 205–225. https://doi.org/10.1007/s11040-007-9027-2
28. Zhao S., Sun Y. A discrete negative order potential Korteweg–de Vries equation. *Zeitschrift furNaturforschung A*, 2016, vol. 71, pp. 1151–1158. https://doi.org/10.1515/zna-2016-0324

Об авторах

Уразбоев Гайрат Уразалиевич, д-р физ.-мат. наук, Ургенчский государственный университет, Ургенч, 220100, Узбекистан, email: gayrat71@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7420-2516

Хасанов Музаффар Машрипович, канд. физ.-мат. наук, Ургенчский государственный университет, Ургенч, 220100, Узбекистан, hmuzaffar@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2347-1484

Балтаева Ирода Исмаиловна, канд. физ.-мат. наук, Ургенчский государственный университет, Ургенч, 220100, Узбекистан, iroda-b@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-5624-7529

About the authors

Gayrat U. Urazboev, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Urgench State University, Urgench, 220100, Uzbekistan, gayrat71@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7420-2516

Muzaffar M. Khasanov, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc., Urgench State University, Urgench, 220100, Uzbekistan, hmuzaffar@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2347-1484

Iroda I. Baltaeva, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc., Urgench State University, Urgench, 220100, Uzbekistan, iroda-b@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-5624-7529

Поступила в редакцию / Received 22.10.2022
Поступила после рецензирования / Revised 28.02.2023
Принята к публикации / Accepted 06.03.2023