ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Серия «Математика»
2023. Т. 44. С. 3—18

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.956: 532.5.032
MSC 31B20, 76D05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.3

Решение обратной задачи, описывающей медленную тепловую конвекцию во вращающемся слое

В. К. Андреев[1✉], Л. И. Латонова[2]

[1] Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Российская Федерация
[2] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ andr@icm.krasn.ru

Аннотация. Решена линейная обратная начально-краевая задача, возникающая при моделировании вращательного движения вязкой теплопроводной жидкости в плоском слое. Показано, что поставленная задача имеет два различных интегральных тождества, которые позволяют получить априорные оценки решения в равномерной метрике; доказать его единственность; определить условия на входные данные, при которых это решение выходит с ростом времени на стационарный режим по экспоненциальному закону. В заключительной части доказывается существование единственного классического решения обратной задачи. Для этого задача путём дифференцирования по пространственной переменной сведена к прямой неклассической задаче с двумя интегральными условиями вместо обычных краевых. Новая задача решена методом разделения переменных, позволяющим найти решение в виде быстро сходящихся рядов по специальному базису.

Ключевые слова: тепловая конвекция, движение жидкости, обратная задача, стационарное решение

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2021-1280).

Ссылка для цитирования: Андреев В. К., Латонова Л. И. Решение обратной задачи, описывающей медленную тепловую конвекцию во вращающемся слое // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 44. С. 3–18.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.3

Research article

Solution of the Inverse Problem Describing Slow Thermal Convection in a Rotating Layer

Viktor K. Andreev[1✉], **Liliya I. Latonova**[2]

[1] Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation
[2] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ andr@icm.krasn.ru

Abstract. The linear inverse initial-boundary value problem arising when modeling the rotational motion of a viscous heat-conducting liquid in a flat layer is solved. It is shown that the problem has two different integral identities. Based on these identities, a priori estimates of the solution in a uniform metric are obtained and its uniqueness is proved. The conditions for the input data are also determined, under which this solution goes to the stationary mode with increasing time according to the exponential law. In the final part, the existence of a unique classical solution of the inverse problem is proved. To do this, differentiating the problem by a spatial variable, we come to a direct non-classical problem with two integral conditions instead of the usual boundary conditions. The new problem is solved by the method of separation of variables, which makes it possible to find a solution in the form of rapidly converging series on a special basis.

Keywords: thermal convection, liquid motion, inverse problem, stationary solution

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2021-1384).

For citation: Andreev V. K., Latonova L. I. Solution of the inverse problem describing slow thermal convection in a rotating layer. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 44, pp. 3–18. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.44.3

1. Введение

Решение уравнений тепловой конвекции [3] ищется в виде [8]

$$u = rf(z,t), \quad v = rg(z,t), \quad w = w(z,t),$$
$$p = \frac{1}{2}K(t)r^2 + \frac{A\rho\beta\omega^2}{2}r^2\left(\ln\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\right) + h(z,t), \tag{1.1}$$
$$\Theta = A\ln\frac{r}{a} + T(z,t),$$

где u, v — радиальная и осевая компоненты вектора скорости, v — отклонение азимутальной компоненты скорости твердотельного вращения ωr, $\omega = \mathrm{const}$; величина p есть отклонение давления от равновесного $\rho\omega^2 r^2/2$, $\rho = \mathrm{const}$ — плотность жидкости; A и a — положительные постоянные, имеющие размерность температуры и длины соответственно; $\beta > 0$ — коэффициент теплового расширения жидкости.

Заметим, что в стационарном случае поле скоростей в (1.1) известно как поле скоростей Кармана [4]. Оно применялось им для описания увлечения чисто вязкой жидкости вращающимся твёрдым диском. Теоретико-групповая природа решения (1.1) была объяснена в работе [8], см. также [9].

Подстановка вида решения (1.1) в уравнения конвекции приводит к системе

$$f_t + wf_z - 2\omega g + f^2 - g^2 = -\frac{1}{\rho}K(t) + \nu f_{zz} - \omega^2\beta T,$$
$$g_t + wg_z + 2\omega f + 2fg = \nu g_{zz}, \quad 2f + w_z = 0, \tag{1.2}$$
$$T_t + wT_z + Af = \chi T_{zz}, \quad w_t + ww_z = -\frac{1}{\rho}h_z + \nu w_{zz}.$$

Здесь решению (1.1) можно дать следующую интерпретацию. Вязкая теплопроводная жидкость заполняет слой между плоскими твёрдыми стенками $z = \pm a$, вращающимися с угловой скоростью ω вокруг оси z. На них выполнены условия прилипания $u(r, \pm a, t) = v(r, \pm a, t) = w(r, \pm a, t) = 0$. На оси вращения распределены стоки или источники с линейной плотностью — $2\pi Ak$, где k — коэффициент теплопроводности. Ограничивающие жидкость плоскости идеально проводят тепло. Все эти условия индуцируют следующую постановку начально-краевой задачи для системы (1.2):

$$f = -\frac{1}{2}w_{0z}(z), \quad g = g_0(z), \quad w = w_0(z), \quad T = T_0(z), \quad |z| \leqslant a, \quad t = 0. \tag{1.3}$$

$$f = g = 0, \quad w = 0, \quad T = T_{1,2}(t), \quad z - \pm a, \quad t > 0. \tag{1.4}$$

Для гладких решений необходимо добавить условия согласования

$$w_0(\pm a) = 0, \quad w_{0z}(\pm a) = 0, \quad g_0(\pm a) = 0, \quad T_0(\pm a) = T_{1,2}(0). \tag{1.5}$$

Поставленная задача (1.2)-(1.5) будет обратной, так как функция $K(t)$ является искомой.

Введём безразмерные перемнные

$$t = \frac{a^2}{\nu}\bar{t}, \quad z = a\bar{z}, \quad f = \omega R^2 \bar{f}, \quad g = \omega R\bar{g}, \quad w = a\omega R^2 \bar{w}, \quad T = RA\bar{T},$$
$$K = \rho\omega^2 R\bar{T}, \quad h = \rho\omega^2 a^2 R\bar{h}, \quad R = \frac{a^2\omega}{\nu}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad \varepsilon = \beta A, \tag{1.6}$$

где R, P, ε суть числа Рейнольдса, Прандтля и Буссинеска соответственно. В результате, вместо (1.2) получим систему (черта сверху опущена)

$$\begin{gathered} f_t + R^3 w f_z - 2g + R^3 f^2 - Rg^2 = f_{zz} - K(t) - \varepsilon T, \\ g_t + R^3 w g_z + 2R^2 f + 2fg = g_{zz}, \quad 2f + w_z = 0, \\ T_t + R^2 w T_z + R^2 f = \frac{1}{P} T_{zz}, \quad w_t + R^3 w w_z = -h_z + w_{zz}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Условия (1.3)–(1.5) остаются прежними и для новых функций, надо только учесть замену (1.6) и то, что $z \in [-1, 1]$.

Предположим, что $R \ll 1$. Такие течения в гидродинамике называются ползущими [4]. На практике они имеют место быть при большой кинематической вязкости ν, малой толщине слоя $2a$ или малой угловой скорости ω. Будем искать решение в виде $f = f_0 + Rf_1 + ..., g = g_0 + Rg_1 + ..., w = w_0 + Rw_1 + ..., T = T_0 + RT_1 + ..., K = K_0 + RK_1 + ...$. В нулевом приближении получим начально-краевую задачу (индекс 0 опущен)

$$\begin{gathered} f_t - 2g = f_{zz} - K(t) - \varepsilon T, \\ g_t = g_{zz}, \quad 2f + w_z = 0, \\ T_t = \frac{1}{P} T_{zz}, \quad w_t = w_{zz} - h_z, \quad |z| < 1, t \geqslant 0, \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} f(z,0) = -\frac{1}{2} w_{0z}(z), \quad g(z,0) = g_0(z), \quad T(z,0) = T_0(z), \\ w(z,0) = w_0(z), \quad |z| \leqslant 1, \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$f(\pm 1, t) = 0, \quad g(\pm 1, t) = 0, \quad T(\pm 1, t) = T_{1,2}(t), \quad w(\pm 1, t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Из третьего уравнения (1.8) и условий прилипания (1.10) $w(\pm 1, t) = 0$ следует

$$\int\limits_{-1}^{1} f(z,t)\, dz = 0. \tag{1.11}$$

Для гладкого решения задачи (1.1)–(1.4) должны быть выполнены условия согласования $w_0(\pm 1) = 0, w_{0z}(\pm 1) = 0, g_0(\pm 1) = 0, T_0(\pm 1) = 0, T_{1,2}(0) = 0$.

Заметим, что функции $g(z,t)$, $T(z,t)$ суть решения классических первых начально-краевых задач для одномерных уравнений теплопроводности. Считая их известными и вводя обозначения

$$A(z,t) = 2g(z,t) - \varepsilon T(z,t) \tag{1.12}$$

для функций $f(z,t)$, $K(t)$, получим обратную задачу

$$f_t = f_{zz} - K(t) + A(z,t), \quad |z| < 1, \quad t \in [0,t_0]; \tag{1.13}$$

$$f(z,0) = f_0(z) = -\frac{1}{2} w_{0z}(z), \ |z| < 1; \tag{1.14}$$

$$f(\pm 1,t) = 0, \ \int\limits_{-1}^{1} f(z,t)\ dz = 0; \tag{1.15}$$

$$w_0(\pm 1) = 0, \ w_{0z}(\pm 1) = 0. \tag{1.16}$$

По известной $f(z,t)$ функции $w(z,t)$, $h(z,t)$ находятся квадратурами

$$\begin{gathered} w(z,t) = -2\int\limits_{-1}^{z} f(z,t)\ dz; \\ h(z,t) = h_1(t) + w_z(z,t) - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-1}^{z} w(z,t)\ dz \end{gathered} \tag{1.17}$$

с произвольной функцией $h_1(t)$.

Задача (1.1)–(1.4) имеет стационарное решение

$$\begin{gathered} f^c(z) = \frac{\varepsilon}{12}(T_2^c - T_1^c)(z^3 - z), \quad K^c = -\frac{\varepsilon}{2}(T_2^c + T_1^c), \\ g^c(z) = 0, \quad T^c(z) = \frac{1}{2}[(T_2^c - T_1^s)z + T_1^c + T_2^c], \\ w^c(z) = \frac{\varepsilon}{24}(T_1^c - T_2^c)(z^2-1)^2, \quad h^s(z) = h_1^c + \frac{\varepsilon}{6}(T_1^c - T_2^c)(z^3 - z), \end{gathered} \tag{1.18}$$

где T_j^c, $j = 1,2$, h_1^c — заданные постоянные. Для вычисления w^c, h^s использованы выражения (1.17).

Следует отметить, что обратные задачи для параболических уравнений с интегральным условием переопределения более общего вида, чем (1.11), например

$$\int\limits_{-1}^{1} \phi(z) f(z,t)\, dz = 0,$$

рассматривались в большом количестве работ, см. обзор [13], а также монографию [14]. Во всех этих работах требовалось, чтобы $\phi(\pm 1) = 0$, чему не удовлетворяет наше условие переопределения (1.11). Кроме того, неизвестная функция $K(t)$ входила в правую часть уравнения мультипликативным образом. Были доказаны теоремы существования и единственности решения, обоснованы методы построения приближённых решений и для неодномерных обратных задач.

В данной статье неизвестная $K(t)$ входит в правую часть уравнения аддитивным слагаемым. Целью работы является получение на основе априорных оценок достаточных условий сходимости её решения к стационарному режиму (1.18) в равномерной метрике (в интегральной метрике подобный результат был получен в [15]), построение классического решения в виде рядов по специальному базису, связанному с собствеными функциями неклассической задачи Штурма – Лиувилля.

2. Оценки функций $g(z,t)$ и $T(z,t)$

Как уже отмечалось, эти функции суть решения классических начально-краевых задач для параболических уравнений. В частности, для них справедлив принцип максимума [2]:

$$|g(z,t)| \le \max_{z\in[-1,1]} |g_0(z)|,$$

$$|T(z,t)| \le \max\big[\max_{z\in[-1,1]} |T_0(z)|, \max_{t\in[0,t_0]} |T_1(t)|, \max_{t\in[0,t_0]} |T_2(t)|\big].$$

Приведенные оценки позволяют установить единственность гладких решений, но для исследования обратной задачи (1.12)–(1.16) их недостаточно. Хорошо известны решения этих задач в виде рядов Фурье [7]:

$$g(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} \sin\Big[\frac{n\pi}{2}(z+1)\Big], \tag{2.1}$$

$$T(z,t) = T_1(t) + \frac{(z+1)}{2}[T_2(t) - T_1(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) e^{-\lambda_n t/P} \sin\Big[\frac{n\pi}{2}(z+1)\Big], \tag{2.2}$$

где

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad b_n = \int\limits_{-1}^{1} g_0(z) \sin\Big[\frac{n\pi}{2}(z+1)\Big]\ dz,$$

$$M_n(t) = \int\limits_{-1}^{1} T_0(z)\ \sin\Big[\frac{n\pi}{2}(z+1)\Big]\ dz - \frac{2}{n\pi} e^{\lambda_n t/P}[T_1(t) - \tag{2.3}$$

$$-(-1)^n T_2(t)] + \frac{n\pi}{2P} \int\limits_{0}^{t}\ e^{\lambda_n \tau/P}[T_1(\tau) - (-1)^n\ T_2(\tau)]\ d\tau.$$

Рассмотрим ряд (2.1) при $g_0(z) \in C[-1,1]$, $g_0(\pm 1) = 0$, $g_0' \in L_2(-1,1)$. Тогда этот ряд абсолютно и равномерно сходится и представляет собой непрерывную функцию при $z \in [-1,1]$, $\quad t \geq 0$, см. [5, с. 380]. Более того (нам это не понадобится), при любом $\bar{t} > 0$, $\quad t \geq \bar{t}$, $z \in [-1,1]$ ряд (2.1) имеет производные по z и t всех порядков.

Из (2.1) при $t \geq 0$ и всех $z \in [-1,1]$ получим известную оценку [10]

$$|g(z,t)| \leq d_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}. \tag{2.4}$$

Здесь и далее $d_1, d_2, ...$ — некоторые положительные постоянные. Нам потребуется ещё оценка производной

$$|g_t(z,t)| \leqslant d_2 e^{-\lambda_1 t}, \quad z =\in [-1,1]. \tag{2.5}$$

Она получается путём дифференцирования ряда (2.1) по t и предположения, что $g_0(z) \in C^2[-1,1]$, $\ g_0(\pm 1) = 0$, $\ g_0''(\pm 1) = 0$, $g_0''' \in L_2(-1,1)$.

Замечание 1. При указанных выше условиях на $g_0(z)$ из оценок (2.4) и (2.5) следует экспоненциальное стремление к нулю с ростом t как функции $g(z,t)$, так и её производных $g_t(z,t)$, $g_{zz}(z,t)$.

Предположим, что функции $T_j(t)$ имеют производные $T_j'(t)$, $t \in [0, t_0]$, $j = 1,2$. Тогда с учётом условия совместности $T_1(0) = T_2(0) = 0$ формулу (2.3) для $M_n(t)$ можно упростить до следующей формулы:

$$M_n(t) = \int\limits_{-1}^{1} T_0(z) \sin\left[\frac{n\pi}{2}(z+1)\right]\, dz - \frac{2}{n\pi}\int\limits_{0}^{t} e^{\lambda_n \tau/P}[T_1'(\tau) - (-1)^n\, T_2'(\tau)]\, d\tau. \tag{2.6}$$

Поэтому, если $T_0 \in C[-1,1]$, $\ T_0(\pm 1) = 0$, $\ T_0' \in L_2(-1,1)$, из (2.2), (2.6) получаем оценку

$$\begin{gathered}|T(z,t)| \leqslant d_3 \max\left[e^{-\lambda_1 t/P} + \max_j \left(||T_j(t)||\ , ||T_j'(t)||\right)\right] \equiv \\ \equiv d_3\ H_1(t),\ z \in [-1,1], t \in [0, t_0], ||u|| = \max_{t \in [0,t_0]} ||u(t)||.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь в пояснении нуждается лишь оценка выражения

$$I \equiv \frac{1}{n}\left| e^{-\lambda_n t/P} \int\limits_{0}^{t} e^{\lambda_n \tau/P}\left[T_1'(\tau) - (-1)^n\ T_2'(\tau)\right]\ d\tau\right|.$$

Имеем
$$I \leqslant \frac{1}{n}\max\left(||T_1'(t)||, ||T_2'(t)||\right)\frac{P}{\lambda_n}\left(1-e^{-\lambda_n t/P}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{P}{n\lambda_n}\max\left(||T_1'||, ||T_2'||\right)$$
для всех $t \in [0, t_0]$. Значит, соответствующий ряд будет сходиться так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-3}$, откуда и следует оценка (2.7).

Что касается оценки $|T_t(z,t)|$, $z \in [-1,1]$, $t \in [0,t_0]$, достаточно потребовать, чтобы дополнительно выполнялись условия $T_0 \in C^1[-1,1]$, $T_1'(0) = 0$, $T_2'(0) = 0$, $T_0'' \in L_2[-1,1]$.

В результате получили оценку типа (2.7), где $T_j(t)$ заменено на $T_j'(t)$:

$$|T_t(z,t)| \leqslant d_4 \max\left[e^{-\lambda_1 t/P} + \max_j\left(||T_j'||, ||T_j''||\right)\right] \equiv d_4 H_2(t) \qquad (2.8)$$

для всех $z \in [-1,1]$.

3. Оценки решения основной обратной задачи

Перейдём к оценкам решений задачи (1.13)–(1.16). Будем использовать метод, предложенный в [1]. Умножая уравнение (2.7) на $f(z,t)$ и интегрируя по z от -1 до 1 с использованием граничных условий (1.15), (1.16), получим тождество

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-1}^{1} f^2(z,t)\ dz + \int\limits_{-1}^{1} f_z^2(z,t)\ dz = \int\limits_{-1}^{1} A(z,t)f(z,t)\ dz. \qquad (3.1)$$

Поскольку $f(\pm 1, t) = 0$, то по неравенству Стеклова [5]

$$\int\limits_{-1}^{1} f_z^2\ dz \geqslant \frac{\pi^2}{4}\int\limits_{-1}^{1} f^2\ dz$$

и из (3.1) выводим неравенство

$$\int\limits_{-1}^{1} f^2(z,t)\ dz \leqslant \left[\int\limits_{-1}^{1} f_0^2(z)\ dz + \int\limits_{0}^{t} e^{\pi^2\tau/4}\Big(\int\limits_{-1}^{1} A^2(z,\tau)\ dz\Big)^{1/2} d\tau\right]^2 e^{-\pi^2 t/2}. \qquad (3.2)$$

С другой стороны, для решения задачи (1.13)–(1.16) имеет место другое тождество

$$\int_{-1}^{1} f_t^2\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-1}^{1} f_z^2\,dz = \int_{-1}^{1} A f_t\,dz. \tag{3.3}$$

Из тождества (3.3) следует оценка

$$\int_{-1}^{1} f_z^2\,dz \leqslant \int_{-1}^{1} f_{0z}^2(z)\,dz + \int_{0}^{t}\Big(\int_{-1}^{1} A^2\,dz\Big)\,d\tau, \quad t\in[0,t_0]. \tag{3.4}$$

Далее,

$$f^2 = 2\int_{-1}^{z} f f_z\,dz \leqslant 2\left(\int_{-1}^{1} f^2\,dz\right)^{1/2}\left(\int_{-1}^{1} f_z^2\,dz\right)^{1/2}.$$

Откуда, используя неравенства (3.2), (3.4), приходим к оценке

$$|f(z,t)| \leqslant \sqrt{2}\Bigg[\Big(\int_{-1}^{1} f_0^2\,dz\Big)^{1/2} + \int_{0}^{t} e^{\pi^2\tau/4}\Big(\int_{-1}^{1} A^2\,dz\Big)^{1/2}\,d\tau\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[\int_{0}^{t}\Big(\int_{-1}^{1} A^2\,dz\Big)\,d\tau + \int_{-1}^{1} f_{0z}^2(z)\,dz\Bigg]^{1/2} e^{-\pi^2 t/4},\ z\in[-1,1],\ t\in[0,t_0]. \tag{3.5}$$

Производная f_t есть решение обратной начально-краевой задачи, аналогичной задаче для f, с заменой K на K_t, A на A_t и f_0 на $f_{0zz} + A(z,0) \equiv f_t(z,0)$, $A(z,0) = 2g_0(z) - \epsilon T_0(z)$. Предположим, что $f_0 \in C^2[-1,1]$, $f_{0zz}(\pm 1) = 0$. Следовательно, имеем оценку, подобную (3.5):

$$|f_t(z,t)| \leqslant \sqrt{2}\Bigg[\Big(\int_{-1}^{1} f_t^2(z,0)\,dz\Big)^{1/2} + \int_{0}^{t} e^{\pi^2\tau/4}\Big(\int_{-1}^{1} A_\tau^2(z,\tau)\,dz\Big)^{1/2}\,d\tau\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[\int_{0}^{t}\Big(\int_{-1}^{1} A_t^2(z,\tau)\,dz\Big)\,d\tau + \int_{-1}^{1} f_{tz}^2(z,0)dz\Bigg]^{1/2} e^{-\pi^2 t/4}, z\in[-1,1], t\in[0,t_0]. \tag{3.6}$$

Перейдём к оценке $|K(t)|$. Для этого умножим уравнение (1.13) на $1 - z^2$ и проинтегрируем по отрезку $[-1,1]$. Для функции $K(t)$ получим представление

$$K(t) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} (1-z^2)\,(A(z,t) - f_t(z,t))\,dz,$$

откуда

$$|K(t)| \leqslant \frac{3}{4}\left[\int\limits_{-1}^{1} |A(z,t)|\,dz + \int\limits_{-1}^{1} |f_t(z,t)|\,dz\right], \quad t \in [0,t_0] \tag{3.7}$$

с известными оценками $|A(z,t)|$, $|f_t(z,t)|$ для $z \in [-1,1]$, $t \in [0,t_0]$, см. оценки (2.4), (2.7), (3.6).

Функции $w(z,t)$, $h(z,t)$ можно оценить из формул (1.17):

$$|w(z,t)| \leqslant 2\int\limits_{-1}^{1} |f(z,t)|\,dz, \quad |w_t(z,t)| \leqslant 2\int\limits_{-1}^{1} |f_t(z,t)|\,dz,$$
$$|w_z(z,t)| \leqslant 2|f(z,t)|, \quad |h(z,t)| \leqslant |h_1(t)| + 2|f_z(z,t)| + 2\int\limits_{-1}^{1} |f_t(z,t)|\,dz \tag{3.8}$$

для всех $z \in [-1,1]$, $t \in [0,t_0]$. В правых частях неравенств (3.8) присутствуют величины, которые оцениваются с помощью (3.5), (3.6) и (3.4).

Все приведённые оценки содержат величину $|A(z,t)|$ или $|A_t(z,t)|$. Согласно (1.12) имеем

$$\begin{gathered} |A(z,t)| \leqslant 2|g(z,t)| + \varepsilon|T(z,t)| \leqslant 2d_1e^{-\lambda_1 t} + \varepsilon d_3 H_1(t), \\ |A_t(z,t)| \leqslant 2d_2e^{-\lambda_1 t} + \varepsilon d_4 H_2(t), \quad t \in [0,t_0] \end{gathered} \tag{3.9}$$

в силу неравенств (2.4), (2.5), (2.7), (2.8). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть справедливо* $g_0(z) \in C^2[-1,1]$, $g_0'''(z) \in L_2(-1,1])$, $T_j(t) \in C^1[0,t_0]$, $w_0(z) \in C^3[-1,1]$ *и выполнены условия согласования* $g_0(\pm 1) = 0$, $g_0''(\pm 1) = 0$, $T_j(0) = 0$, $T_j'(0) = 0$, $T_j''(0) = 0$, $w_0(\pm 1) = 0$, $w_{0z}(\pm 1) = 0$, $w_0^{'''}(\pm 1) = 0$, $T_0 \in C^1[-1,1]$, $T_0(\pm 1) = 0$, $T_0^{'}(\pm 1) = 0$, $T_0^{''} \in L_2(-1,1)$, *тогда решение обратной задачи (1.13)–(1.16) единственно и выполнимы оценки (3.4)–(3.7) при всех* $z \in [-1,1]$, $t \in [0,t_0]$.

Замечание 2. Решение основной задачи при указанных условиях является классическим. Это следует из полученных оценок (3.6), (3.7), (3.9) и уравнения (1.16).

4. Достаточные условия выхода решения обратной задачи с ростом времени на стационарный режим

Ясно, что $\lim\limits_{t\to\infty} g(z,t) = 0 = g^c$ равномерно для $z \in [-1,1]$. Это следует из оценки (2.4).

Пусть функции $T_j(t),\ j = 1,2$ определены при всех $t \geq 0$. Тогда справедливы следующие результаты для решения $T(z,t)$ [10]:

a) Если $\lim\limits_{t\to\infty} T_j(t) = T_j^c$, то $\lim\limits_{t\to\infty} T(z,t) = T^c(z)$ равномерно для всех $z \in [-1,1]$, где $T^c(z)$ — стационарное решение из (1.18).

b) Если $|T_j(t) - T_j^c| \leqslant d_5(1+t)^{-\mu}$ с положительными постоянными d_5 и μ, тогда $|T(z,t) - T^c(z)| \leqslant d_6(1+t)^{-\mu}$.

c) При выполнении неравенства $|T_j(t) - T_j^c| \leqslant d_7 e^{-\mu t}, \quad d_7 > 0, \quad \mu > 0$ — постоянные, имеем оценку $|T(z,t) - T^c(z)| \leqslant d_8 e^{-\mu_1 t},\ d_8,\ \mu_1$ — положительные постоянные $0 < \mu_1 \leqslant \mu$. Эти оценки можно трактовать как устойчивость стационарного решения $T^c(z),\ g^c(z) = 0$.

Введём разности $\overline{f}(z,t) = f(z,t) - f^c(z), \overline{K}(t) = K(t) - K^c, \overline{T}(z,t) = T(z,t) - T^c(z)$. В силу линейности они удовлетворяют тем же самым задачам, что и f, K, T. Изменятся начальные условия: $\overline{f}(z,0) = f_0(z) - f^c,\ \overline{T}(z,0) = T_0(z) - T^c(z)$. Кроме того, $A(z,t)$ следует заменить на $\overline{A}(z,t) = 2g(z,t) - \varepsilon\overline{T}(z,t)$ (напомним, что $g^c(z) = 0$). Поэтому для $\overline{T}, \overline{T_t}, \overline{f}, \overline{f_t}, \overline{K}$ с соответствующими заменами имеют место оценки (2.7), (2.8), (3.5)–(3.7), $z \in [-1,1],\ t \geqslant 0$.

Предположим, что

$$
\begin{gathered}
|T_j(t) - T^c| = |\overline{T_j}(t)| \leqslant d_9 e^{-\gamma t}, \quad |\overline{T_j'}(t)| \leqslant d_9 e^{-\gamma t}, \\
|\overline{T_j''}(t)| \leqslant d_9 e^{-\gamma t}
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

с некоторой постоянной $\gamma > 0$. Из (3.9) с помощью (4.1) имеем

$$
\begin{gathered}
|\overline{A}(z,t)| \leqslant 2d_1 e^{-\pi^2 t/4} + \varepsilon d_{10} \max\left(e^{-\pi^2 t/4P}, e^{-\gamma t}\right) \leqslant d_{11}\, e^{-\gamma_1 t}, \\
\gamma_1 = \min\left(\frac{\pi^2}{4}, \frac{\pi^2}{4P}, \gamma\right), \quad z \in [-1,1],\ t \geqslant 0,
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Такая же оценка справедлива и для $\overline{A_t}(z,t)$:

$$
|\overline{A_t}\,(z,t)| \leqslant d_{12}\, e^{-\gamma_1 t}. \tag{4.3}
$$

Теперь из (3.5), учитывая неравенство (4.2), выводим оценку

$$
\begin{aligned}
|\overline{f}\,(z,t)| \leqslant d_{13}\left[1+\int\limits_0^t e^{(\pi^2-4\gamma_1)\frac{\tau}{4}}\ d\tau\right]\ e^{-\pi^2 t/4} = \\
= d_{13}\begin{cases} e^{-\pi^2 t/4}, & \gamma_1 \neq \pi^2/4 \\ te^{-\pi^2 t/4}, & \gamma_1 = \pi^2/4 \end{cases} \equiv d_{13} b(t),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

так как из (4.2) $\gamma_1 \geqslant \pi^2/4$. Аналогичная оценка с другой постоянной имеет место и для $|\overline{f_t}\,(z,t)|$, $z \in [-1,1]$, надо учесть неравенство (4.3).

Из неравенств (3.7), (4.2) и (4.4) (последнее надо взять для $|\overline{f_t}\,(z,t)|$) получим оценку

$$
|\overline{K}(z,t)| \leqslant d_{14}\ \left[e^{-\gamma_1 t} + b(t)\right]. \tag{4.5}
$$

Ясно, что правые части неравенств (4.4), (4.5) стремятся к нулю при $t \to \infty$ по экспонециальному закону. Поэтому справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1, предположений (4.1) решение обратной задачи (1.13)–(1.16) с ростом времени стремится к решению стационарной задачи (1.18) $f^c(z)$, K^c.*

Замечание 3. Аналогичная сходимость имеет место и для функций $w(z,t)$, $h(z,t)$ к их стационарным решениям $w^c(z)$, $h^c(z)$. В последнем случае надо предположить, что $\lim\limits_{t\to\infty} h_1(t) = h_1^c = const$.

5. Существование решения основной задачи (1.13)–(1.16)

Существование решения проводится путём явного построения решения в виде ряда по специальному базису. Сначала заметим, что для функции $K(t)$ имеет место другое представление

$$
K(t) = \frac{1}{2}\left[f_z(1,t) - f_z(-1,t) + \int\limits_{-1}^{1} A(z,t)\ dz\right]. \tag{5.1}
$$

откуда, кстати, находится и начальное условие

$$
K(0) = \frac{1}{4}[w_{0zz}(-1) - w_{0zz}(1)] + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} A_0(z)\ dz.
$$

Равенство (5.1) получается путем интегрирования уравнения (1.13) с учётом граничных условий. Постановка (5.1) в (1.13) приводит к *нагруженному* [14] уравнению на $f(z,t)$ и первой начально-краевой задаче для него (производные $f_z(\pm 1,t)$ в нашем случае неизвестные).

Далее мы следуем методу работы [1], который позволяет не решать нагруженное уравнение на $f(z,t)$. Именно: введём новую неизвестную функцию $W(z,t) = f_z(z,t), z \in [-1,1], t \in [0,t_0]$. Она будет решением начально-краевой задачи

$$W_t = W_{zz} + A_z(z,t), \quad z \in [-1,1], \quad t \in [0,t_0]; \tag{5.2}$$

$$W(z,0) = f_z(z,0) = -\frac{1}{2} w_{0zz}(z), \quad z \in [-1,1]; \tag{5.3}$$

$$\int_{-1}^{1} W(z,t)\, dz = 0, \quad \int_{-1}^{1} zW(z,t)\, dz = 0. \tag{5.4}$$

Первое условие (5.4) следует из (1.15), так как

$$f(z,t) = \int\limits_{-1}^{z} W(\xi,t)\, d\xi, \tag{5.5}$$

а второе — из интегрирования по частям равенства (1.4).

Неклассическая начально-краевая задача (5.2)–(5.5) решается методом разделения переменных:

$$W(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) \sin(\mu_k z), \tag{5.6}$$

$$W_k(t) = W_{0k}\, e^{-\mu_k^2 t} + \int_0^t A_k(\tau) e^{-\mu_k^2 (t-\tau)}\, d\tau, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} W_{0k} &= \frac{1+\mu_k^2}{\mu_k^2} \int_{-1}^{1} W_0(z) \sin(\mu_k z)\, dz, \\ A_k(t) &= \frac{1+\mu_k^2}{\mu_k^2} \int_{-1}^{1} A_z(z,t) \sin(\mu_k z)\, dz, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$, причем [6] $\mu_k = \xi - \xi^{-1} - 2\xi^{-\frac{2}{3}} + O(\xi^{-5}),\ \xi = \pi(k+\frac{1}{2}),\ k = 1,2,...$ Следуя [5, с. 381], легко доказывается, что ряд (5.6) представляет собой классическое решение задачи (5.2)–(5.5) при $t \geqslant \bar{t} > 0$ и $w_0(z) \in C^3[-1,1]$, $A_z \in C\left([-1,1] \times [0,t_0]\right)$.

Замечание 4. Система $\{\sin(\mu_k z)\}$ является ортогональной в $L_2(-1,1)$ с нормой $\mu_k(1+\mu_k^2)^{-\frac{1}{2}}$ и образует там базис. Эти функции являются решением неклассической задачи Штурма – Лиувилля

$$Z_{zz} + \lambda Z = 0, \quad z \in (-1,1), \quad \int_{-1}^{1} Z(z)\, dz = \int_{-1}^{1} zZ(z)\, dz = 0$$

с $\lambda = \lambda_k = \mu_k^2$.

Из (5.1), (5.6)–(5.8) находим

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) \sin \mu_k + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} A(z,t)\, dz, \tag{5.9}$$

а из (5.5) восстанавливается $f(z,t)$:

$$f(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} W_k(t)\ (\cos \mu_k - \cos(\mu_k z)). \tag{5.10}$$

Формулы (5.9), (5.10) и дают единственное классическое решение задачи (1.13)–(1.16). Функции $w(z,t)$, $h(z,t)$ находятся из представлений (1.17) и ряда (5.10).

Замечание 5. В условиях теорем 1, 2 ряды (5.9), (5.10) при $t \to \infty$ стремятся к стационарным значениям K^s и $f^s(z)$ по экспоненциальному закону равномерно при $z \in [-1,1]$. То же самое имеет место и для функций $w(z,t)$, $h(z,t)$.

6. Заключение

Изучены качественные свойства решения обратной начально-краевой задачи, моделирующей медленную конвекцию во вращающемся трёхмерном слое. Найден стационарный режим конвекции. Получены априорные оценки решения в равномерной метрике. На их основе указаны достаточные условия сходимости решения при больших временах к найденному стационарному режиму. Для построения решения обратная задача сведена к прямой задаче для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями. Окончательно решение находится в виде рядов Фурье по специальному базису. Приведены условия на входные данные, при которых эти ряды представляют собой единственное классическое решение.

Полученные результаты представляют практический интерес, например, для оценки интенсивности конвекции во вращающихся тонких микрослоях. Кроме того, они могут служить тестом при численном решении общей нелинейной задачи (1.2)–(1.5), поскольку интегральное условие переопределения (1.11) имеет место и в этом случае.

Список источников

1. Андреев В. К. О решении одной обратной задачи, моделирующей двумерное движение вязкой жидкости // Вестник ЮУРГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2016. Т. 9, № 4. С. 5–16. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-3-273-280
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1972. 392 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 736 с.
5. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1977. 431 с.
6. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М. : Наука, 1978. 375 с.
7. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
8. Пухначёв В. В. Точные решения уравнений гидродинамики, построенные на основе частично инвариантных // Прикладная математика и теоретическая физика. 2003. Т. 44, № 3. С. 18-25.
9. Пухначёв В. В. Симметрии в уравнениях Навье – Стокса. Новосибирск :ИПЦ НГУ, 2022. 214 с.
10. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М. : МИР, 1968. 427 с.
11. Mathematical models of convection / V. K. Andreev, Y. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. Berlin ; Boston : Walter de Gruyter Gmb H, 2020. 432 p.
12. Andreev V. K., Latonova L. I. Solution of the linear problem of thermal convection in liquid rotating layer // J. Siber. Fed. Univ. Math. & Phys. 2022. Vol. 15, N 6. P. 1–12. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-3-273-280
13. Pyatkov S. G., Safonov E. I. On Some Classes of Linear Inverse Problem for Parabolic Equations // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 777–799.
14. Prilepko A. L., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problem in Mathematical Physics. New York ; Basel : Marsel Dekker, 1999.
15. Vasin I. A., Kamynin V. L. On the Asymptotic Behavior of the Solutions of Inverse Problems for Parabolic Equations // Siberian Mathematical Journal. 1997. Vol. 38, N 4. P. 647–662.

References

1. Andreev V.K. On the solution of an inverse problem simulating two-dimensional motion of a viscous fluid. *Bulletin SUSU MMCS*, 2016. vol. 9, no. 4, pp. 5-16. (in Russian) https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-3-273-280
2. Vladimirov V.S. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1976. (in Russian)
3. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M. *Convective stability of an incompressible fluid*. Moscow, Nauka Publ., 1972, 392 p.
4. Landau L.D., Lipshits E.M. *Hydrodynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.
5. Mikhlin S.G. *Linear Partial Differential Equations*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1977, 431 p. (in Russian)

6. Olver F. *Introduction to asymptotic methods and special functions*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 375 p.
7. Polyanin A.D. *Handbook. Linear equations of mathematical physics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (in Russian)
8. Pukhnachev V.V. Exact Solutions of the Hydrodynamics Equations Derived from Partially Invariant Solutions. *Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 3, pp. 317-323. (in Russian)
9. Pukhnachev V.V. *Symmetries in Navier-Stokes equations*. Novosibirsk, CPI NSU Publ., 2022. 214 p.
10. Fridman A. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1964.
11. Andreev V.K., Gaponenko Y.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical models of convection*. Walter de Gruyter Gmb H, Berlin, Boston, 2020, 432 p.
12. Andreev V.K., Latonova L.I. Solution of the linear problem of thermal convection in liquid rotating layer. *J. Siber. Fed. Univ. Math. & Phys*, 2022. vol. 15, no. 6. pp. 1-12. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-3-273-280
13. Pyatkov S.G., Safonov E.I. On Some Classes of Linear Inverse Problem for Parabolic Equations. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 777-799.
14. Prilepko A.L., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problem in Mathematical Physics. New York, Basel, Marsel Dekker, 1999.
15. Vasin I.A., Kamynin V.L. On the Asymptotic Behavior of the Solutions of Inverse Problems for Parabolic Equations. *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no 4, pp. 647-662.

Об авторах

Андреев Виктор Константинович, д-р физ.-мат. наук, проф., отдел дифференциальных уравнений механики, Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, 660036, Российская Федерация, andr@icm.krasn.ru

Латонова Лилия Игоревна, аспирант, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, 660041, Российская Федерация, liliyalatonova@gmail.com

About the authors

Victor K. Andreev, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Department of Differential Equations of Mechanics, Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation, andr@icm.krasn.ru

Liliya I. Latonova, Postgraduate, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, liliyalatonova@gmail.com

Поступила в редакцию / Received 30.11.2022
Поступила после рецензирования / Revised 06.04.2023
Принята к публикации / Accepted 14.04.2023