Серия «Математика»
2022. Т. 42. С. 138—160

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 510.643; 517.11
MSC 03F25, 03B35
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138

Глобально допустимые правила вывода

В. В. Римацкий[1]✉

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ Gemmeny@rambler.ru

Аннотация. Задание базовых правил вывода имеет фундаментальное значение для логики. Наиболее общим вариантом возможных правил вывода являются допустимые правила вывода: в логике L правило вывода допустимо, если множество теорем L замкнуто относительно данного правила. Изучение допустимых правил вывода было стимулировано проблемой Фридмана: существует ли алгоритм распознавания допустимости правила вывода в интуиционистской логике? Для широкого класса неклассических логик проблема разрешимости по допустимости правил вывода была решена в сер. 1980-х. К проблеме А. Кузнецова (1975) восходит другой способ описания всех допустимых в логике правил: задание некоторого (конечного) набора допустимых правил, из которого все остальные допустимые в логике правила будут выводиться как следствия, т. е. задание (конечного) базиса. Большинство базовых неклассических логик не имеют конечного базиса для допустимых правил вывода. В начале 2000-х гг. для большинства базовых неклассических логик и некоторых табличных логик проблема Фридмана – Кузнецова была решена с помощью описания явного базиса для допустимых правил.

Следующим этапом изучения допустимых правил вывода неклассических логик можно считать понятие глобально допустимого правила вывода. *Глобально допустимыми правилами в логике L называем те правила вывода, которые допустимы сразу во всех (финитно аппроксимируемых) расширениях данной логики.* Представленная работа посвящена изучению глобально допустимых правил логики $S4$. Были получены условия глобальной допустимости в логике $S4$, построена характеристическая (универсальная) модель (проверка глобальной допустимости сводится к проверке истинности правила на ее подмоделях), описаны базис (из него выводятся все глобально допустимые правила) и антибазис (из него выводятся все правила, недопустимые глобально в $S4$).

Ключевые слова: модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, глобально допустимые правила вывода

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-41-240005).

Ссылка для цитирования: Римацкий В. В. Глобально допустимые правила вывода // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 138–160.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138

Research article

Globally Admissible Inference Rules

Vitaliy V. Rimatskiy[1✉]

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ Gemmeny@rambler.ru

Abstract. Setting the basic rules of inference is fundamental to logic. The most general variant of possible inference rules are admissible inference rules: in logic L, a rule of inference is admissible if the set of theorems L is closed with respect to this rule. The study of admissible inference rules was stimulated by Friedman's problem: Is there an algorithm for recognizing the admissibility of an inference rule in intuitionistic logic? For a wide class of non-classical logics the problem of recognizing with respect to the admissibility of inference rules was solved in 1980s. Another way of describing all admissible rules in logic goes back to the problem of A. Kuznetsov (1975): specifying a certain (finite) set of admissible rules, from which all other admissible rules in logic will be derived as consequences, i.e. setting a (finite) basis. It turned out that most basic non-classical logics do not have a finite basis for admissible inference rules. In the early 2000s, for most basic non-classical logics and some tabular logics, the Fridman-Kuznetsov problem was solved by describing an explicit basis for admissible rules.
The next stage in the study of admissible inference rules for non-classical logics can be considered the concept of a globally admissible inference rule. *Globally admissible rules in the logic L are those inference rules that are admissible simultaneously in all (with finite model property) extensions of the given logic.* Such rules develop and generalize the concept of an admissible inference rule. The present work is devoted to the study of globally admissible rules of logic $S4$. Conditions for global admissibility in the logic $S4$ were obtained, a characteristic (universal) model was constructed (checking global admissibility is reduced to checking the truth of a rule on its submodels), a basis was described (all globally admissible rules are derived from it) and an anti-basis (from which all rules not available globally in $S4$).

Keywords: modal logic, frame and model Kripke, admissible and globally admissible inference rule

Acknowledgements: The research was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No.18-41-240005).

For citation: Rimatskiy V. V. Globally Admissible Inference Rules. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 138–160. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138

1. Введение

Задание базовых правил вывода имеет фундаментальное значение для логики. Наиболее общим вариантом возможных правил вывода являются допустимые правила вывода, введенные Лоренценом в 1955 г. [10]. В логике L правило вывода допустимо, если множество теорем L замкнуто относительно данного правила. Прямо из определения следует, что совокупность всех допустимых правил — наиболее общий концепт правил, совместимых с логикой L, которые можно добавить к логике, не изменяя множество доказуемых в L теорем.

Изучение допустимых правил вывода было стимулировано проблемой Фридмана [8]: существует ли алгоритм распознавания допустимости правила вывода в интуиционистской логике? Для широкого класса неклассических логик ($Int, KC, K4, S4, S5, S4.3$ и др.) проблема разрешимости по допустимости правил вывода была решена В. В. Рыбаковым в середине 1980-х гг. (см., например, [1; 11]).

К проблеме А. Кузнецова (1975) восходит другой способ описания всех допустимых в логике правил: задание некоторого (конечного, явного) набора допустимых правил, из которого все остальные допустимые в логике правила будут выводиться как следствия, т. е. задание (конечного) базиса. Оказалось, что большинство базовых логик не имеют конечного базиса для допустимых правил вывода (см. [11]). Для широкого класса логик (включая большинство базовых и некоторые табличные логики (см. [2–4])) явный базис допустимых правил был получен в нач. 2000-х.

Помимо использования допустимых правил вывода для описания нетривиальных семантических свойств неклассических логик (см. [5; 9]), можно также предложить следующий подход. Следующим этапом изучения допустимых правил вывода неклассических логик стало глобально допустимое правило вывода. Понятие глобально допустимого правила вывода было введено в 2005 г. в [12]. *Глобально допустимыми правилами в логике L называем те правила вывода, которые допустимы сразу во всех (финитно аппроксимируемых) расширениях данной логики.* Такие правила развивают и обобщают понятие допустимого правила вывода.

На сегодняшний день автору известно относительно немного результатов, посвященных изучению глобально допустимых правил вывода. В короткой заметке [12] была доказана редукция глобальной допустимости к табличной допустимости: правило глобально допустимо в логике L, если и только если оно допустимо во всех табличных расширениях логики L. В статье [7] был описан базис глобально допустимых правил логики Int в полуредуцированной форме. В [6] получен явный (бесконечный) базис правил вывода, глобально допустимых в модальных предтабличных логиках $PT2, PT3$. Представленная работа посвящена изучению глобально допустимых правил логики $S4$.

2. Определения, предварительные результаты

Вначале напомним кратко необходимые определения и результаты (для детального знакомства рекомендуем [11] или [5]). Далее мы рассматриваем только логики, расширяющие $S4$, поэтому все фреймы рефлексивны и транзитивны.

Фрейм $F := \langle W, R\rangle$ есть пара, где W — непустое множество и R – бинарное отношение на множестве W. Базисное множество и сам фрейм далее часто будем обозначать одной и той же буквой. Если $\langle W, R\rangle$ — некоторый фрейм, то непустое множество $C \subseteq W$ называется *сгустком*, если: 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in W \quad (xRy\&yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным,* если $|C| > 1$; в противном случае – *одноэлементным или вырожденным.* Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a. Фрейм $\mathcal{F} = \langle W_1, R_1\rangle$ называется *открытым подфреймом* фрейма $\mathcal{G} = \langle W_2, R_2\rangle$ (обозначаем $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{G}$), если выполняется

$$W_1 \subseteq W_2,\ R_2 \cap W_1^2 = R_1 \text{ и } \forall a \in W_1\, \forall b \in W_2\, (aR_2b \Longrightarrow b \in W_1).$$

Моделью Крипке или просто моделью будем называть тройку $\mathcal{M} = \langle W,\ R,\ V\rangle$, где $\mathcal{F} := \langle W, R\rangle$ — фрейм и V — означивание множества пропозициональных переменных P на фрейме $\mathcal{F}$, т. е. $V : P \to 2^W$. Если $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ — модели, то модель $\mathcal{M}_1$ называется *открытой подмоделью модели* $\mathcal{M}_2$ (обозначаем $\mathcal{M}_1 \sqsubseteq \mathcal{M}_2$), если: 1) фрейм $\langle W_1,\ R_1\rangle$ — открытый подфрейм фрейма $\langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) $Dom(V_1) = Dom(V_2)$ и $\forall p \in Dom(V_1)\ V_1(p) = V_2(p) \cap W_1$.

Отображение фреймов $f : \langle F,\ R\rangle \to \langle G,\ S\rangle$ называется *p-морфизмом,* если выполняется: 1) $aRb \Longrightarrow f(a)Sf(b)$; 2) $f(x)Sz \Longrightarrow \exists y \in F : f(y) = z \,\&\, xRy$. Отображение $f : \mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle \to \mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ называем также *p-морфизмом модели* $\mathcal{M}_1$ в модель $\mathcal{M}_2$, если: 1) f есть p-морфизм фрейма $\mathcal{F}_1 = \langle W_1,\ R_1\rangle$ во фрейм $\mathcal{F}_2 = \langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) означивания $V_1,\ V_2$ определены для одного и того же множества переменных; 3) $\forall\, p \in Dom(V_1),\ \forall a \in W_1(a \models_{V_1} p \iff f(a) \models_{V_2} p)$.

Утверждение 1. *[11] 1) Если $\mathcal{M}_1$ — открытая подмодель модели $\mathcal{M}_2$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из множества $Dom(V_1)$, $\mathcal{M}_2 \models \alpha$ влечет $\mathcal{M}_1 \models \alpha$; 2) если отображение f есть p-морфизм модели $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$ на модель $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из множества $Dom(V_1)$, справедливо $\forall a \in W_1(a \models_{V_1} \alpha \iff f(a) \models_{V_2} \alpha)$.*

Пусть $\mathcal{F}_i = \langle W_i,\ R_i\rangle,\ i \in I$ – семейство попарно не пересекающихся фреймов, т. е. $W_i \cap W_j = \emptyset$ для $i \neq j \in I$. *Прямым объединением* этого семейства называется фрейм $\sqcup_{i\in I}\mathcal{F}_i = \langle W,\ R\rangle$, где $W = \cup_{i\in I}W_i,\ R = \cup_{i\in I}R_i$. Прямое объединение моделей определяется аналогично.

Говорим, что фрейм $\mathcal{F}$ является λ-*фреймом*, если все теоремы логики λ истинны на $\mathcal{F}$ при любом означивании переменных. Соответственно, $\lambda(\mathcal{F})$ – множество формул, истинных на $\mathcal{F}$ – есть логика, порожденная фреймом $\mathcal{F}$.

Будем говорить, что сгустки $C_1, C_2, \ldots, C_n$ некоторого фрейма F *попарно не сравнимы по отношению* R, если справедливо: $\forall C_i, C_j, 1 \leq i, j \leq n,\ \forall x \in C_i, y \in C_j(\neg(xRy)\&\neg(yRx))$, т. е. из элементов одного сгустка данного множества сгустков недостижимы по отношению R элементы другого сгустка. Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма F называется *антицепью.* Антицепь $\mathcal{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathcal{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае — *тривиальной.*

Пусть $\mathcal{F} = \langle F,\, R\rangle$ — некоторый фрейм. Для любого элемента $a \in F$ обозначим $a^R = \{x|aRx\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент a (сгусток $C(a)$) *порождает как корень* подфрейм a^R $(C(a)^R$ соответственно) фрейма F. Аналогично, для множества $X \subseteq F$ определяем $X^R := \cup\{x^R|x \in X\}$ и $X^{<R} = X^R\setminus X$, и также будем говорить, что множество $X \subseteq F$ порождает подфрейм X^R или $X^{<R}$ соответственно. Далее помимо стандартного обозначения фреймов прописнымми латинскими буквами $(F,\ \mathcal{F}, G, \ldots)$, также будем использовать и обозначения $a^R,\ C^R,\ X^R, \ldots$ для подфреймов (фреймов), порожденных элементом $a \in F$, сгустком $C \in F$ или множеством $X \subseteq F$.

Фрейм $\mathcal{F}$ – *корневой*, если существует элемент $a \in \mathcal{F}$ такой, что $\forall b \in \mathcal{F}\ aRb$. Данный элемент a (и сгусток $C(a)$) называем также *корнем* $\mathcal{F}$. Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R\backslash C(a) = X^R := \cup\{x^R|x \in X\}$. Говорим, что *элемент* a *есть ко-накрытие* для $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. λ-*ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень λ-фрейм.

Глубиной элемента x фрейма (модели) $\mathcal{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего x. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathcal{F}$ глубины не более чем n будем обозначать $S_{\leq n}(\mathcal{F})$, а множество элементов глубины n обозначим $S_n(\mathcal{F})$.

Подмножество $\mathcal{X}$ заданной модели $\mathcal{M}$ называется *формульно определимым или формульным*, если существует формула α, такая, что $\forall x \in \mathcal{M}\big[x \Vdash_V \alpha \iff x \in \mathcal{X}\big]$. Соответственно, *элемент* $x \in \mathcal{M}$ *является формульным*, если множество $\{x\}$ формульное. Означивание V *определимо (формульное)* в модели $\mathcal{M}$, если для любой переменной p из области V множество $V(p)$ формульное.

Для заданного фрейма $\mathcal{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k/\beta\}$ говорим, что r *истинно на* $\mathcal{F}$ *при означивании* V (обозначаем $\mathcal{F} \models_V r$), если как только $\forall x \in \mathcal{F}\, \forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{F}\, (x \models_V \beta)$. *Правило* r *истинно на* $\mathcal{F}$, если r истинно на $\mathcal{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathcal{F} \models r$).

Правило вывода

$$r = \{\alpha_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \alpha_k(x_1, \ldots, x_n)/\beta(x_1, \ldots, x_n)\}$$

называется *допустимым* в логике λ [обозначаем $r \in Ad(\lambda)$], если для любых формул $\delta_1, \ldots, \delta_n$ из $(\forall j \alpha_j(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \lambda)$ следует $\beta(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \lambda$.

Модель $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики* λ тогда и только тогда, когда для любой формулы α от переменных $p_1, \ldots, p_n$ выполняется $\alpha \in \lambda \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$ (см. Опр. 3.3.2 [11]).

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику $S4$, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках. Следуя гл. 3 [11], опишем конструкцию и свойства этой модели.

Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$. И пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n, и все элементы каждого сгустка имеют попарно различные означивания. Предположим, что $S_{\leq m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m+1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathcal{X} \subset S_{\leq m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один элемент (сгусток) глубины m и добавим к этой антицепи снизу копию каждого сгустка C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathcal{X}$ при условии: 1) фрейм, порожденный сгустком C как корнем, является λ-фреймом: $C^R = \mathcal{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фрейм; 2) если $\mathcal{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1 как модель.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $C_n(\lambda)$. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 2 (Th. 3.3.6, 3.3.7 [11])**.** *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели – формульный.*

Утверждение 3 (Th. 3.3.3 [11])**.** *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4$, правило вывода r допустимо в λ, если* *и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных r.*

В данном исследовании нам также понадобится редуцированная форма модальных правил вывода. Говорим, что *правило r имеет редуцированную форму*, если $r := \{\bigvee_{1\leq j\leq m} \phi_j/x_0\}$, где

$$\phi_j := \bigwedge_{0\leq i\leq k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0\leq i\leq k} \Diamond x_i^{b_i},\ a_i, b_i \in \{0,1\};\ x^0 := x,\ x^1 := \neg x.$$

Для каждого члена ϕ_j посылки правила в редуцированной форме определим также множества
$\theta_1(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 0\}$; $\theta_2(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 0\}$.
$\theta_3(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 1\}$; $\theta_4(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 1\}$.
Для правила r в редуцированной форме множество всех формул ϕ_j в посылке обозначим как $Pr(r)$, а заключение правила – $Con(r)$.

Утверждение 4 (см. [11]). *Для любого модального правила вывода R существует правило $rf(R)$ в редуцированной форме, эквивалентное R относительно истинности на $S4$-алгебрах и $S4$-фреймах; R и $rf(R)$ одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей $S4$.*

Напомним определение глобально допустимого правила вывода, введенное в [12]. Правило *r глобально допустимо в логике L*, если r допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих логику L. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется *базисом глобально допустимых правил логики L*, если: 1) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в L; 2) любое глобально допустимое в L правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L. Набор правил вывода $\mathcal{AR}$ называется *антибазисом глобально недопустимых правил логики L*, если 1) каждое правило из $\mathcal{AR}$ недопустимо глобально в L; 2) любое глобально недопустимое в L правило выводится из $\mathcal{AR}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L.

Основным результатом [12] была редукция глобальной допустимости правила в логике $S4(Int)$ к допустимости во всех табличных расширениях этой логики:

Теорема 1 (см. Т.3 [12]). *Правило вывода r допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих $S4(Int)$ $\iff$ r допустимо во всех табличных логиках (в том числе порожденных конечными корневыми $S4$-фреймами), расширяющих $S4(Int)$.*

3. Условия глобальной допустимости в логике $S4$

Следуя Ch.3.9 [11] для правила в редуцированной форме, определим модель $\mathfrak{M}(r, X)$. Пусть задано правило вывода r в редуцированной форме. И пусть множество $X \subseteq Pr(r)$ состоит из всех членов посылки правила, таких, что $\forall \phi_j \in X(\theta_1(\phi_j) \subseteq \theta_2(\phi_j))$. Модель $\mathfrak{M}(r, X)$ построена на множестве X с отношением R и означиванием V: $\forall \phi_j, \phi_k \in X$ $(\phi_j R \phi_k \iff \theta_2(\phi_k) \subseteq \theta_2(\phi_j))$; $\forall \phi_j \in X, \forall p \in Var(r)$ $(\phi_j \in V(p) \iff p \in \theta_1(\phi_1))$. Понятно, что отношение R рефлексивно и транзитивно на множестве X.

Изучим свойства этой модели для глобально допустимых правил вывода.

Теорема 2. *Пусть r правило вывода является глобально допустимым в логике $S4$. Тогда модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для правила r не удовлетворяет хотя бы одному из свойств:*
(1) $\exists\, \phi \in X : \ x_0 \notin \theta_1(\phi)$ & $\operatorname{depth} d(\phi) = K$;
(2) $\forall\, \phi \in X$ $\phi \models_V \phi$ *в модели* $\mathfrak{M}(r, X)$;
(3) $\exists\, \phi_0 \in X : \theta_1(\phi_0) = \theta_2(\phi_0), \ \theta_3(\phi_0) = \theta_4(\phi_0)$;
(4) $\forall k > 1 \ \forall \phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_k \in S_{\leq K}(\mathfrak{M}(r, X)) \ \exists \phi \in X :$
$\theta_2(\phi) = \theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi_1) \cup \cdots \cup \theta_2(\phi_k)$, & $\theta_4(\phi) = \theta_3(\phi_1) \cap \theta_4(\phi_1) \cap \cdots \cap \theta_4(\phi_k)$.

Доказательство от противного. Предположим, что модель $\mathfrak{M}(r, X)$ имеет свойства (1)–(4). В этом случае *правило r опровергается на подмодели, которая насыщенна по ко-накрытиям (т. е. любая нетривиальная антицепь глубины не более K имеет ко-накрытие):* по свойствам (1)–(2) имеем $\forall\, \phi \in \mathfrak{M}(r, X)$ $\phi \models_V \phi$ & $\exists\, y \in \mathfrak{M}(r, X) : d(y) = K \& y \not\models_V x_0$.

Покажем, что в этом случае правило r недопустимо в некоторой табличной логике и, значит, не будет глобально допустимым. Ввиду громозкости доказательства разделим его на несколько этапов: (I) «сжимающий р-морфизм» этой модели (склеиваем дубли), чтобы она могла быть открытой подмоделью n-характеристической модели некоторой логики, (II) строим полный ко-последователь подфрейма y^R этой модели (ко всем нетривиальным антицепям добавляем одноэлементные рефлексивные ко-накрытия), (III) доопределяем означивание на ко-последователе так, чтобы правило r опроверглось на нем, (IV) фреймом ко-последователя порождаем табличную логику и показываем, что существует р-морфизм из фрейма некоторой n-характеристической модели на фрейм ко-последователя, затем с помощью этого р-морфизма переносим означивание на n-характеристическую модель, (V) при перенесенном означивании правило опровергнется на конечной характеристической модели, и значит, не будет допустимо в этой табличной логике.

I. **Сжатие модели** $\mathfrak{M}(r, X)$
Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве Т. 3.3.6 [11], преобразуем исходную модель $\mathfrak{M}(r, X)$ следующим образом (сжимающий р-морфизм). Сначала послойно, начиная со сгустков 1-го слоя, в каждом сгустке модели $\mathfrak{M}(r, X)$ склеим в один (друг с другом) элемент все элементы, которые имеют одинаковое означивание переменных. Затем все сгустки глубины 1, которые изоморфны как модели, склеиваем друг с другом. Данное преобразование есть р-морфизм модели $\mathfrak{M}(r, X)$ на модель $\mathfrak{M}_1(r, X)$. Так как истинность формул сохраняется при р-морфизме моделей, то на модели $\mathfrak{M}_1(r, X)$ правило r также будет опровергаться.

Теперь послойно (начиная с первого слоя) выполним преобразование f: а) если сгусток C имеет единственного последователя C_1 (т. е. $C^R = C \cup C_1^R$) и изоморфен подмодели сгустка C_1, то склеиваем его с соответствующей подмоделью (C сжимаем с C_1); б) склеиваем друг с другом сгустки, которые изоморфны как модели и имеют одинаковое множество достижимых элементов: $(if\ C_1 \cong C_2\ \&\ C_1^R \backslash C_1 = C_2^R \backslash C_2 \implies f(C_1) = C_2)$.

Обозначим полученную модель как $\mathfrak{M}_2(r, X)$. Так как исходная модель $\mathfrak{M}(r, X)$ конечна, то на некотором шаге (на глубине K) эта процедура сжатия модели прервется. В результате такого преобразования получим р-морфный образ $\mathfrak{M}_2(r, X)$ модели $\mathfrak{M}_1(r, X)$, на котором также будет опровергаться правило r. Полученную модель будем называть **конденсированной.**

II. **Построение полного ко-последователя** $Co(G \sqcup \{e\})$
Пусть подфрейм $G = y^R$ конечной модели $\mathfrak{M}_2(r, X)$ имеет конечную глубину K. Рассмотрим фрейм $G \sqcup \{e\}$, где $\{e\}$ — рефлексивный элемент, не сравнимый по отношению R с любым элементом фрейма G (т. е. берем прямое объединение фрейма G и одноэлементного сгустка $C(e) = \{e\}$).

Определим теперь **полный ко-последователь фрейма** $G \sqcup \{e\}$ следующим образом. Возьмем сначала фрейм $\mathcal{M}_0 = G \sqcup \{e\}$. Затем выберем все нетривиальные антицепи первого слоя $\{X_t \subseteq S_1(\mathcal{M}_0)\}$, которые не имеют в $\mathcal{M}_0$ одноэлементных ко-накрытий, и добавим к каждой такой антицепи снизу рефлексивный элемент t как ко-накрытие (считая отношение R транзитивным). Обозначим полученный фрейм как $\mathcal{M}_1$.

Предположим, что $\mathcal{M}_j$ уже построен и выполняется $G \sqcup \{e\} \sqsubseteq \mathcal{M}_j$. Получим фрейм $\mathcal{M}_{j+1}$ следующим образом. В подфрейме $S_{\leq(j+1)}(\mathcal{M}_j)$ (глубины не более $j+1$) выберем все нетривиальные антицепи сгустков $\{X_t \subseteq S_{\leq(j+1)}(\mathcal{M}_j)\}$, которые не имеют одноэлементных ко-накрытий в $\mathcal{M}_j$ и содержат хотя бы один элемент глубины $j+1$. Затем добавим к каждой такой антицепи снизу рефлексивный элемент t как ко-накрытие (считая отношение R транзитивным).

Продолжая описанный процесс построения до слоя глубины K (максимальная глубина элементов $G = y^R$), мы получим **полный ко-последователь** $Co(G \sqcup \{e\})$ фрейма $G \sqcup \{e\}$ – фрейм $\mathcal{M} = \cup_{j \leq K} \mathcal{M}_j$. Полученный фрейм также является конечным (глубины K).

Непосредственно по построению фрейм $\mathcal{M}$ имеет следующие свойства:

– первый слой фрейма $\mathcal{M}$ содержит по крайней мере один вырожденный сгусток $C(e) = \{e\}$;

– фрейм $G = y^R$ является открытым подфреймом фрейма $\mathcal{M}$;

– любая нетривиальная антицепь сгустков из $\mathcal{M}$, не содержащая элементов глубины K, имеет в $\mathcal{M}$ одноэлементное ко-накрытие.

Определим теперь табличную логику $\lambda = L(\mathcal{M})$ как множество модальных формул, истинных на полном ко-последователе $\mathcal{M}$. Понятно, что данная табличная логика расширяет логику $S4$ и является K-насыщенной по ко-накрытиям (см. [4]).

III. **Определение означивания на ко-последователе $\mathcal{M}$**
По построению ко-последователя $\mathcal{M}$ подфрейм G является его открытым подфреймом, и при исходном означивании V правило r опровергается на G. Доопределим (расширим) это означивание послойно (начиная с первого слоя) на весь фрейм $\mathcal{M}$ так, чтобы посылка правила r стала везде истинна на нем, а заключение правила опровергалось. Тем самым опровергнем данное правило на фрейме ко-последователя при некотором означивании.

1. По построению ко-последователя $S_1(\mathcal{M}) = S_1(G) \cup \{e\}$ и на фрейме G означивание уже определено. По свойству (3) модели $\mathfrak{M}(r, X)$ существует формула $\phi_0 \in Pr(r)$, которая может быть истинна на вырожденных (одноэлементных) сгустках первого слоя (проверяется непосредственно). Значит, на элементе $\{e\}$ определим: $e \models_V p \iff p \in \theta_1(\phi_0)$. Легко проверить, что при таком определении означивания переменных выполняется $e \models_V \phi_0$. Таким образом, доопредляем означивание на всем слое $S_1(\mathcal{M})$, и посылка правила r истинна на всех его элементах.

2. Предположим, что означивание V определено на $S_{\leq m}(\mathcal{M} \setminus G), m < K$ и посылка правила истинна при таком означивании на $S_{\leq m}(\mathcal{M})$. Возьмем произвольный элемент $t \in S_{m+1}(\mathcal{M} \setminus G)$. По построению ко-последователя $\mathcal{M}$ элемент t порождает одноэлементный сгусток и является ко-накрытием для нетривиальной антицепи сгустков $X_t \subseteq S_m(\mathcal{M})$. По индуктивной гипотезе на элементах X_t^R посылка правила истинна, и пусть $\{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_k\}$ – множество всех различных членов посылки, истинных на элементах нетривиальной антицепи X_t. Тогда по свойству (4) существует формула $\phi_t \in Pr(r)$ с указанными свойствами. Определим на элементе t означивание : $t \models_V p \iff p \in \theta_1(\phi_t)$ и покажем, что:

Утверждение 5. *Выполняется* $t \models_V \phi_t$.

Доказательство. Для немодальной части формулы ϕ_t утверждение очевидно верно по определению означивания:

$$t \models_V p \iff p \in \theta_1(\phi_t),\ t \models_V \ \neg\, p \iff p \ \in \ \theta_3(\phi_t).$$

Пусть $p \in \theta_2(\phi_t)$. Тогда по выбору ϕ_t выполняется $\theta_2(\phi_t) \subseteq \theta_1(\phi_t) \cup \theta_2(\phi_1) \cup \theta_2(\phi_2) \cup \dots \cup \theta_2(\phi_k)$. Если $p \in \theta_1(\phi_t)$, то по рефлексивности отношения верно $p \in \theta_2(\phi_t)$, и значит, выполняется $t \models_V \Diamond p$. Иначе $\exists j : p \in \theta_2(\phi_j)$ и формула ϕ_j истинна на некотором элементе $j \in X_t^R : j \models_V \phi_j$. Так как $p \in \theta_2(\phi_j)$, то верно $j \models_V \Diamond p$, и значит, выполняется $t \models_V \Diamond p$ по выбору элемента t (ко-накрытие для антицепи X_t и отношение транзитивно).

Пусть $p \in \theta_4(\phi_t)$. Тогда по выбору ϕ_t выполняется $\theta_4(\phi_t) \subseteq \theta_3(\phi_t) \cap \theta_4(\phi_1) \cap \theta_4(\phi_2) \cap \dots \cap \theta_4(\phi_k)$. Следовательно, $\forall j \leq k : p \in \theta_4(\phi_j)$ и по индуктивной гипотезе $\forall j \in X_t\ j \models_V \phi_j,\ j \leq k$. Следовательно, $\forall j \in X_t\ j \models_V \neg\Diamond p$. Так как по свойству (4) $\theta_4(\phi_t) \subseteq \theta_3(\phi_t)$, то выполняется $p \in \theta_3(\phi_t)$, т. е. $t \models_V \neg p$. Совместно это влечет $t \models_V \neg\Diamond p$.

Таким образом, получили $t \models_V \phi_t,\ \phi_t \in Pr(r)$, и посылка правила истинна на элементе t. В силу произвольности выбора элемента t доопределили означивание переменных так, что посылка правила выполнилась на всем слое $S_{m+1}(\mathcal{M} \setminus G)$. Утверждение доказано. □

Продолжая описанный процесс до элементов глубины K включительно, доопределяем означивание на всем ко-последователе $\mathcal{M}$ так, чтобы посылка правила была истинна на всем фрейме. Заключение правила опровергается на некотором элементе $y \in G$ открытого подфрейма $G \sqsubseteq \mathcal{M}$. Понятно, что $\{\phi \in \mathcal{M}\} \subseteq Pr(r)$, и если на некоторой модели опровергается правило вида $\{\bigvee\{\phi \in \mathcal{M}\}/x_0\}$, то правило r также опровергается на этой модели. В результате при означивании V, определеном таким образом, правило r опровергается на фрейме $\mathcal{M}$.

IV. **p-Морфизм фрейма характеристической модели** $Ch_k(\lambda)$ **на фрейм полного ко-последователя** $Co(G \sqcup \{e\})$
Выберем наименьшее число k так, чтобы выполнилось $\mathcal{M} \sqsubseteq Ch_k(\lambda)$ (несложно показать, что такое число существует), т. е. вполне очевидно:

Лемма 1. $\langle \mathcal{M}, V \rangle \sqsubseteq Ch_k(\lambda)$, *где k — число переменных правила r.*

Как было показано ранее, правило r опровергается на модели $\langle \mathcal{M}, V \rangle$. Необходимо доопределить означивание переменных на $Ch_k(\lambda)$ так, чтобы посылка правила стала истинной на всей k-характеристической модели, а заключение ложно. Для этого определим p-морфизм фрейма $Ch_k(\lambda)$ на фрейм $\mathcal{M}$ и с помощью этого p-морфизма перенесем означивание переменных правила с $\mathcal{M}$ на $Ch_k(\lambda)$. Точно так же, как при доказательстве Утверждения 6, [5], с. 114, доказывается утверждение:

Лемма 2. *Существует p-морфизм из f из фрейма $Ch_k(\lambda)$ на фрейм $\mathcal{M}$.*

Теперь остается заметить, что, перенося с помощью f^{-1} означивание V, при котором опровергается правило r, с фрейма $\mathcal{M}$ на фрейм k-характеристической модели $Ch_k(\lambda)$, получим p-морфизм моделей, сохраняющий истинность формул: $\langle Ch_k(\lambda),\ f^{-1}(V)\rangle \longrightarrow_f \langle \mathcal{M},\ V\rangle$. Следовательно, правило r опровергается на k-характеристической модели $Ch_k(\lambda)$ при формульном (в силу конечности модели $Ch_k(\lambda)$ и формульности всех ее элементов) означивании $f^{-1}(V)$, и значит, недопустимо в табличной логике λ. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2. □

Теорема 3. *Пусть правило вывода r не является глобально допустимым в $S4$ (т. е. недопустимо в некоторой табличной логике λ, расширяющей логику $S4$). Тогда модель $\mathfrak{M}(r,X)$ для правила r удовлетворяет следующим свойствам: (1) $\exists\,\phi \in X:\ x_0 \notin \theta_1(\phi)$; (2) $\forall\,\phi \in X\ \phi \models_V \phi$ в модели $\mathfrak{M}(r,X)$; (3) $\exists\,\phi_0 \in X : \theta_1(\phi_0) = \theta_2(\phi_0),\ \theta_3(\phi_0) = \theta_4(\phi_0)$; (4') $\exists k > 1\ \exists \mathcal{D} = \{\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_k \in X\}$, такие, что для всех $\phi \in X(\phi \neq \phi_i, 1 \leq i \leq k)$ выполняется :* 1) $\theta_2(\phi) \neq \theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi_1) \cup \dots \cup \theta_2(\phi_k), \&2)\ \theta_4(\phi) \neq \neq \theta_3(\phi_1) \cap \theta_4(\phi_1) \cap \dots \cap \theta_4(\phi_k)$.

Доказательство. Предположим, что правило вывода r недопустимо в некоторой табличной логике λ. Тогда по теореме 3.5.1 [11] правило r опровергается при некотором формульном означивании S на характеристической модели $Ch_m(\lambda)$ для некоторого m: $\forall\, a \in Ch_m(\lambda) a \models_S \phi_j$, $\phi_j \in Pr(r)$; $\exists\, b \in Ch_m(\lambda) : b \not\models_S x_0$. Пусть множество X — это множество членов посылки правила, имеющих непустое множество истинности на $Ch_m(\lambda)$, т. е. $X := \{\phi \in Pr(r) : S(\phi) \neq \emptyset\}$. Покажем, что модель $\mathfrak{M}(r,X)$ имеет указанные свойства.

1. Так как выполняется $b \not\models_S x_0$ и посылка правила истинна на данном элементе, существует $\phi_j \in Pr(r)$, такая, что $b \models_S \phi_j$. Тогда $x_0 \notin \theta_1(\phi_j)$ и (1) выполнено.

2. Возьмем произвольный $\phi \in X$ и покажем, что $\phi \models_V \phi$ в модели $\mathfrak{M}(r,X)$. Для немодальной части формулы ϕ утверждение очевидно выполняется по определению означивания V.

Пусть $p \in \theta_2(\phi)$. По определению множества X существует элемент $a \in Ch_m(\lambda)$, такой, что $a \models_S \phi$. Это влечет $a \models_S \Diamond p$. Тогда найдется элемент $y \in Ch_m(\lambda) : aRy \& y \models_S p$. Так как посылка правила истинна на $Ch_m(\lambda)$, выполняется $y \in S(\phi_k)$, $\phi_k \in X$ для некоторого k. Следовательно, $p \in \theta_1(\phi_k)$, и значит, $p \in \theta_2(\phi_k)$ в силу рефлексивности отношения. Отсюда следует: $(p \in \theta_2(\phi) \implies p \in \theta_2(\phi_k)) \implies \theta_2(\phi) \subseteq \theta_2(\phi_k)$, т. е. выполняется $\phi R \phi_k$. Отсюда и $p \in \theta_1(\phi_k)$ следует $\phi \models_V \Diamond p$ модели $\mathfrak{M}(r,X)$.

Обратно, пусть $\phi \models_V \Diamond p$ модели $\mathfrak{M}(r,X)$. Следовательно, существует $\phi_k \in X$, такой, что $\phi R \phi_k$ и $\phi_k \models_S p$ модели $\mathfrak{M}(r,X)$. Отсюда

$p \in \theta_1(\phi_k)$, и значит, $p \in \theta_2(\phi)$. Таким образом, $\Diamond p$ есть конъюктивный член формулы ϕ, и свойство (2) доказано.

3. Это свойство очевидно выполняется, так как по построению характеристической модели $Ch_m(\lambda)$ 1-й слой этой модели содержит одноэлементные сгустки. Непосредственно проверяется, что на произвольном элементе первого слоя, порождающего вырожденый сгусток, истинна некоторая формула ϕ_0 с указанными свойствами.

4. Для доказательства свойства (4) возьмем все R-минимальные сгустки $C_1, C_2, \dots, C_t \in Ch_m(\lambda)$ и определим множество $\mathcal{D} \subseteq X$ как множество *всех* членов посылки правила, истинных на элементах этих сгустков, плюс формула ϕ_0 :

$$\mathcal{D} = \{\phi_j \in Pr(r) : \exists x \in \{C_1, C_2, \dots, C_t\} \ \& \ x \models_S \phi_j\} \cup \phi_0.$$

Предположим, что найдется формула $\phi_c \in X$ из посылки правила с требуемыми свойствами:
(i) $\theta_2(\phi_c) = \theta_1(\phi_c) \cup \theta_2(\phi_1) \cup \dots \cup \theta_2(\phi_k)$,
(ii) $\theta_4(\phi_c) = \theta_3(\phi_c) \cap \theta_4(\phi_1) \cap \dots \cap \theta_4(\phi_k)$.

Тогда найдется элемент $e \in Ch_m(\lambda) : e \models_S \phi_c$. Тогда данный элемент достижим по отношению R из некоторого элемента R-минимального сгустка: $\exists j \exists x \in C_j : xRe$. И пусть $x \models_S \phi_x, \phi_x \in Pr(r)$. Значит, выполняется $\theta_2(\phi_c) \subseteq \theta_2(\phi_x)$.

С другой стороны, по определению формулы ϕ_c выполняется также $\theta_2(\phi_x) \subseteq \theta_2(\phi_c)$. Совместно это влечет $\theta_2(\phi_c) = \theta_2(\phi_x)$, т.е элементы x и e имееют одинаковое множество достижимых элементов. Так как x принадлежит одному из R-минимальных сгустков, то e также принадлежит такому сгустку. Но тогда по определению множества $\mathcal{D}$ формула ϕ_c также принадлежит этому множеству и совпадает с одной из формул, истинных на элементах R-минимальных сгустков характеристической модели. Противоречие. □

4. Семантическое описание

Вполне очевидны следующие два утверждения.

Лемма 3. *Если правило r истинно на любой конечной $S4$-модели $\mathcal{M}$ при любом означивании, то оно глобально допустимо в $S4$.*

Доказательство. Действительно, n-характеристическая модель произвольной табличной логики над $S4$ конечна. Следовательно, при произвольных формульных означиваниях правило будет истинно на всех n-характеристических моделях, т. е. допустимо во всех табличных логиках над $S4$. □

Лемма 4. *Если правило r глобально допустимо, то данное правило истинно на модели $\mathcal{E} = \langle \{e\}, R, S \rangle$, порожденной единственным рефлексивным элементом e при любом означивании.*

Доказательство от противного. Рассмотрим табличную логику λ_e, порожденную одноэлементным сгустком e. Для любого n фрейм n-характеристической модели этой логики является прямым объединением одноэлементных сгустков (конечного числа копий элемента e). При формульном означивании S правило r опровергается на этой n-характеристической модели (в силу конечности модели означивание является формульным). Отсюда заключаем, что правило r недопустимо в табличной логике λ_e, что противоречит исходному предположению. $\square$

4.1. Характеристическая модель $\mathfrak{M}h(k)$

Представленная в этой части модель является неким аналогом n-характеристической модели для модальных логик или «универсальной, обобщенной» моделью $\mathfrak{M}(r, X)$. Процесс проверки глобальной допустимости правила r в логике $S4$ сводится к проверке истинности (опровержимости) r на некоторых подмоделях описанной далее модели $\mathfrak{M}h(k)$.

Возьмем множество переменных $Var(k) = \{x_0, x_1, \dots x_k\}$ и построим все возможные формулы ϕ от этих переменных, для которых выполняется $\theta_1(\phi) \subseteq \theta_2(\phi)$. Множество всех таких формул обозначим $\Phi(k)$. Число всевозможных таких формул не превосходит 2^{2k+2}. Далее при построении модели будем использовать стандартное означивание: $\phi \models_V p \iff p \in \theta_1(\phi)$. Заметим, что для любого сгустка C, образованного элементами (формулами) $\phi \in Pr(r)$, по определению отношения между ними выполняется $(\phi_1, \phi_2 \in C \iff \theta_2(\phi_1) = \theta_2(\phi_2))$.

Построение модели $\mathfrak{M}h(k)$

I. Первый слой $S_1(\mathfrak{M}h(k))$ образует множество всех возможных сгустков $C_i^1, i \in I_1$, составленных из элементов $\phi^1 \in \Phi(k)$, таких, что: 1) каждый сгусток не содержит различных элементов с одинаковым означиванием; 2) различные сгустки неизоморфны между собой как модели; 3) выполняется $\forall \phi^1 \in C_i^1\ \phi^1 \models_V \phi^1$. Для сгустков первого слоя величина $\min_{\phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}h(k))} |\theta_2(\phi^1)|$ равна 0.

II. Для построения второго слоя $S_2(\mathfrak{M}h(k))$ берем произвольные антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $S_1(\mathfrak{M}h(k))$ и добавляем к ним снизу как ко-накрытия сгустки $C_i^2, i \in I_2$ следующим образом:

A. Для каждой тривиальной антицепи $\mathcal{X} = \{C(\phi^1)\}$ берем все возможные элементы ϕ^2 множества $\Phi(k)$, такие, что $\theta_2(\phi^1) \subseteq \theta_2(\phi^2)$, и добавляем снизу к антицепи $\mathcal{X}$ как ко-накрытия все возможные сгустки $C_i^2 = C(\phi^2)$, образованные элементами ϕ^2, такие, что: 1) C_i^2 неизоморфны подмодели сгустка $C(\phi^1)$, 2) выполняется $\forall \phi \in C_i^2\ \phi \models_V \phi$,

3) различные ко-накрытия C_i^2 для антицепи $\mathcal{X}$ неизоморфны между собой как модели.

B. Для каждой нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $S_1(\mathfrak{M}h(k))$ выбираем все элементы ϕ^2 множества $\Phi(k)$, такие, что $\bigcup_{\phi^1\in\mathcal{X}}\theta_2(\phi^1)\subseteq\theta_2(\phi^2)$, и добавляем снизу к антицепи $\mathcal{X}$ как ко-накрытия все возможные сгустки $C_i^2=C(\phi^2)$, образованные таким элементами ϕ^2, так, чтобы: 1) выполнялось $\forall\phi\in C_i^2\ \phi\models_V\phi)$ и 2) различные ко-накрытия C_i^2 для антицепи $\mathcal{X}$ неизоморфны между собой как модели.

Заметим, что для любой антицепи $\mathcal{X}$ существует элемент ϕ_c^2, такой, что $\bigcup_{\phi^1\in\mathcal{X}}\theta_2(\phi^1)=\theta_2(\phi_c^2)\ \&\ \theta_1(\phi_c^2)=\theta_2(\phi_c^2)$, т. е. любая нетривиальная антицепь имеет при таком построении ко-накрытие. Не сложно показать (как это было сделано при доказательстве утверждения 5), что верно $\phi_c^2\models_V\phi_c^2$. Величина $\min_{\phi^2\in S_2(\mathfrak{M}h(k))}|\theta_2(\phi^2)|$ для ко-накрытий нетривиальных антицепей равна 1.

III. Для построения третьего $S_3(\mathfrak{M}h(k))$ слоя берем произвольные антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $S_{\leq 2}(\mathfrak{M}h(k))$, содержащие хотя бы один сгусток второго слоя, и добавляем к ним снизу как ко-накрытия сгустки $C_i^3, i\in I_3$ следующим образом:

A. Для каждой тривиальной антицепи $\mathcal{X}=\{C(\phi^2)\}$ берем все возможные элементы ϕ^3 множества $\Phi(k)$, такие, что $\theta_2(\phi^2)\subseteq\theta_2(\phi^3)$, и добавляем снизу к антицепи $\mathcal{X}$ как ко-накрытия все возможные сгустки $C_i^3=C(\phi^3)$, образованные элементами ϕ^2, так, чтобы: 1) выполнялось $\forall\phi\in C_i^3\ \phi\models_V\phi)$, 2) C_i^3 неизоморфны подмодели сгустка $C(\phi^2)$, 3) различные ко-накрытия C_i^3 для антицепи $\mathcal{X}$ неизоморфны между собой как модели.

B. Для каждой нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $S_{\leq 2}(\mathfrak{M}h(k))$ выбираем все элементы ϕ^3 множества $\Phi(k)$, такие, что $\bigcup_{\phi\in\mathcal{X}}\theta_2(\phi)\subseteq\theta_2(\phi^3)$, и добавляем снизу к антицепи $\mathcal{X}$ как ко-накрытия все возможные сгустки $C_i^3=C(\phi^3)$, образованные элементами ϕ^3, так, чтобы: 1) выполнялось $\forall\phi\in C_i^3\ \phi\models_V\phi)$, 2) различные ко-накрытия C_i^3 для антицепи $\mathcal{X}$ неизоморфны между собой как модели.

Заметим, что для любой антицепи $\mathcal{X}$ существует элемент ϕ_c^3, такой, что $\bigcup_{\phi\in\mathcal{X}}\theta_2(\phi)=\theta_2(\phi_c^3)\ \&\ \theta_1(\phi_c^3)=\theta_2(\phi_c^3)$, т. е. любая нетривиальная антицепь имеет при таком построении ко-накрытие. Не сложно показать (как это было сделано при доказательстве утверждения 5), что верно $\phi_c^3\models_V\phi_c^2$. Величина $\min_{\phi^3\in S_3(\mathfrak{M}h(k))}|\theta_2(\phi^3)|$ для ко-накрытий нетривиальных антицепей равна 2.

IV. Продолжаем описанный процесс построения до глубины $k+2$, пока величина $\min_{\phi\in S_{k+2}(\mathfrak{M}h(k))}|\theta_2(\phi^3)|$ для ко-накрытий нетривиальных антицепей не станет равна $k+1$. Полученную в результате построения модель обозначим как $\mathfrak{M}h(k)$. По построению выполняется $\forall\phi\in\mathfrak{M}h(k)\ (\phi\models_V\phi)$, и модель не содержит дублей (в каждом сгустке элементы имеют попарно различные означивания и ко-накрытия произвольной антицепи не изоморфны как модели).

Понятно, что каждая открытая подмодель W модели $\mathfrak{M}h(k)$ определяет некоторое правило в редуцированной форме вида $r = \{\{\phi : \phi \in W\}/x_0\}$. Далее, на некоторых элементах ϕ_0 этой модели заключение x_0 правила в редуцированной форме ложно (т. е. $x_0 \notin \theta_1(\phi_0)$). Значит, открытая подмодель ϕ_0^R, порожденная как корнем этим элементом ϕ_0, опровергает правило вида $r = \{\{\phi : \phi \in \phi_0^R\}/x_0\}$.

Свойства полученной модели опишем далее в следующих утверждениях.

Теорема 4. *Если правило $r = r(x_0, x_1, \ldots x_k)$ от $k+1$ переменных в редуцированной форме истинно на каждой открытой подмодели W модели $\mathfrak{M}h(k)$, то правило r является глобально допустимым в логике $S4$.*

Доказательство от противного. Пусть правило r недопустимо в некоторой табличной логике λ над $S4$. Тогда при некотором формульном означивании S это правило опровергается на n-характеристической модели для этой логики: $\forall a \in Ch_n(\lambda)\ a \models_S \phi, \phi \in Pr(r)\ \&\ \exists b \in Ch_n(\lambda) : b \not\models_S x_0$. Точно так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем сжатую (конденсированную) модель $\mathfrak{M}_2(r, X)$ (без дублей), на которой опровергается данное правило r.

Почти очевидно, что модель $\mathfrak{M}_2(r, X)$ изоморфна некоторой открытой подмодели W модели $\mathfrak{M}h(k)$. Эта модель не содержит дублей, отношение на ней рефлексивно и транзитивно. Следовательно, послойно можем вложить ее как подмодель в модель $\mathfrak{M}h(k)$. По построению модели $\mathfrak{M}h(k)$ ($S_1(\mathfrak{M}h(k)$ образует множество всех возможных неизоморфных сгустков, не содержащих различных элементов с одинаковым означиванием, на которых посылка правила истинна), для каждого сгустка $C_i^1 \in S_1(\mathfrak{M}_2(r, X))$, $i \in I$, найдется сгусток $K_i^1 \in S_1(\mathfrak{M}h(k))$, изоморфный ему как модель. Следовательно, получаем $S_1(\mathfrak{M}_2(r, X)) = \bigcup_{i \in I} C_i^1 \cong \bigcup_{i \in I} K_i^1 = S_1(W) \sqsubseteq S_1(\mathfrak{M}h(k))$. Величина $\min_{\phi \in S_1(\mathfrak{M}_2(r,X)} |\theta_2(\phi)| \geq 0$

Рассмотрим теперь произвольный сгусток $C_i^2 \in S_2(\mathfrak{M}_2(r, X))$, являющийся ко-накрытием в модели $\mathfrak{M}_2(r, X)$ для некоторой произвольной антицепи $Y \subseteq S_1(\mathfrak{M}_2(r, X))$. Тогда найдется некоторая антицепь $Y' \subseteq S_2(\mathfrak{M}h_2(k))$, такая, что $Y \cong Y'$ (как модели). По построению модели $\mathfrak{M}h(k)$ эта антицепь Y' имеет все возможные ко-накрытия, на которых посылка правила истинна. Значит, найдется ко-накрытие $K_i^2 \in S_2(\mathfrak{M}h(k))$ для Y', такое, что $(C_i^2)^R \cong (K_i^2)^R$ как модели. Следовательно, в силу произвольности выбора сгустка $C_i^2 \in S_2(\mathfrak{M}_2(r, X))$ получаем $S_{\leq 2}(\mathfrak{M}_2(r, X)) = \bigcup_{i \in J}(C_i^2)^R \cong \bigcup_{i \in J}(K_i^2)R = S_{\leq 2}(W) \sqsubseteq S_{\leq 2}(\mathfrak{M}h(k))$. Заметим, что величина $\min_{\phi \in S_{\leq 2}(\mathfrak{M}_2(r,X)} |\theta_2(\phi)|$ больше либо равна 1, т. е при переходе на следующий слой она увеличивается по крайней мере на 1.

Продолжая эти рассуждения послойно до максимальной глубины (она не превышает $k+2$) сгустков в модели $\mathfrak{M}_2(r, X)$, получим требуемое вложение: $\mathfrak{M}_2(r, X) \cong W \sqsubseteq \mathfrak{M}h(k)$. $\square$

Определим теперь *K-насыщенную локальную компоненту (открытую подмодель)* $K_c(y)$ элемента $y \in \mathfrak{M}h(k)$ следующим образом. Выберем произвольный элемент $y \in \mathfrak{M}h(k)$ глубины $d(y) = D \leq k+2$, такой, что $x_0 \notin \theta_1(y)$ (т. е. на этом элементе опровергается заключение правила в редуцированной форме). Возьмем подмодель $\mathcal{G} = y^R$ (т. е. берем верхний конус элементов, достижимых из данного элемента y в модели $\mathfrak{M}h(k)$). Если все сгустки из $S_1(y^R)$ собственные, то далее рассматриваем подмодель $\mathcal{G} = y^R \cup \phi^0$, где
$\phi^0 = \bigwedge_{0 \leq i \leq k} \neg x_i \wedge \bigwedge_{0 \leq i \leq k} \neg\Diamond x_i$ & $\phi^0 \in S_1(\mathfrak{M}h(k))$ & $C(\phi_0) = \{\phi_0\}$.

Теперь послойно, начиная с первого слоя подмодели $\mathcal{G}$, к каждой нетривиальной антицепи сгустков Y (не содержащих сгустков глубины D) модели $\mathcal{G}$ добавляем одноэлементное ко-накрытие ϕ_c^Y, такое, что $\bigcup_{\phi \in Y} \theta_2(\phi) = \theta_2(\phi_c^Y)$ & $\theta_1(\phi_c^Y) = \theta_2(\phi_c^Y)$. По построению модели $\mathfrak{M}h(k)$ каждая нетривиальная антицепь имеет такое ко-накрытие ϕ_c^i. Продолжая этот процесс до глубины $d(y) = D$, получим в результате модель $K_c(y)$. Заметим, по построению каждая нетривиальная антицепь (не содержащая сгустков глубины $d(y) = D$) имеет в $K_c(y)$ одноэлементное ко-накрытие (т. е. полученная подмодель насыщенна ко-накрытиями для нетривиальных антицепей), и в первом слое существует хотя бы один одноэлементный сгусток $\{\phi^0\}$, для которого выполняется $\theta_1(\phi^0) = \theta_2(\phi^0)$ & $\theta_3(\phi^0) = \theta_4(\phi^0)$. Очевидно, что правило

$$r(K_c(y)) = \{\bigvee\{\phi : \phi \in K_c(y)\}/x_0\}$$

опровергается на модели $K_c(y)$.

Лемма 5. *Правило $r(K_c(y))$ недопустимо глобально в логике $S4$.*

Доказательство в данном случае воспроизводит доказательство теоремы 2 с упрощением. Поэтому очертим схему этого доказательства.

По построению модель $K_c(y)$ не содержит дублей, т. е. сжимающий р-морфизм в данном случае не нужен. Фреймом $\mathcal{F}$ модели $K_c(y)$ порождаем табличную логику $L = L(K_c(y))$ глубины D. Для некоторого n фрейм $\mathcal{F}$ является открытым подфреймом фрейма n-характеристической модели $Ch_n(L)$ (см. лемму 1). Также существует р-морфизм из фрейма n-характеристической модели $Ch_n(L)$ на фрейм $\mathcal{F}$ (см. лемму 2). С помощью этого р-морфизма переносим означивание переменных правила $r(K_c(y))$ с модели $K_c(y)$ на фрейм n-характеристической модели $Ch_n(L)$. При полученном формульном означивании (в силу конечности модели и формульности ее элементов) правило $r(K_c(y))$ опровергнется на n-характеристической модели $Ch_n(L)$, следовательно, не будет допустимым в табличной логике L. $\square$

Отсюда непосредственно следует утверждение:

Теорема 5. *Пусть правило* $r = r(x_0, x_1, \dots x_k)$ *в редуцированной форме опровергается на конденсированной (т. е. без дублей) модели* $\mathfrak{M}(r, X) \sqsubseteq \mathfrak{M}h(k)$, *т. е. выполняется*

$$\forall\, x \in \mathfrak{M}(r, X)\, x \models_V \phi, \phi \in Pr(r) \ \&\ \exists y \in \mathfrak{M}(r, X) : y \not\models x_0.$$

Если модель $K_c(y)$ *является (р-морфным образом) открытой подмоделью модели* W*, то правило* r *не будет глобально допустимым в логике* $S4$.

Доказательство. Пусть правило r опровергается на открытой подмодели $W\ :\ W \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X)$ и $K_c(y) \sqsubseteq W$ или $K_c(y) \sqsubseteq f(W)$ для некоторого р-морфизма моделей f. Ясно, что в данном случае множество формул $\{\phi \in K_c(y)\}$ является подмножеством множества $\{\phi \in Pr(r)\}$. Так как взятие открытых подмоделей и р-морфизмов сохраняет истинность формул, то данное правило r также опровергается на модели $K_c(y)$. Следовательно, по лемме 5 правило r опровергается на некоторой n-характеристической модели $Ch_n(L(K_c(y)))$, т. е. недопустимо в табличной логике $L = L(K_c(y))$, расширяющей $S4$. □

5. Базис глобально допустимых правил

Перейдем к исследованию базиса для глобально допустимых правил логики $S4$. В этой секции будет получен базис для глобально допустимых и антибазис для недопустимых глобально в логике $S4$ правил вывода.

Рассмотрим множество $\mathcal{B}$ глобально допустимых в логике $S4$ правил, для которых выполняется дополнительное условие:

$$\exists\, \phi_c \in X (x_0 \in \theta_1(\phi_c) \Longrightarrow \theta_1(\phi_c) \neq \theta_2(\phi_c)). \qquad (5)$$

Покажем, что множество правил $\mathcal{B}$ образует базис для глобально допустимых в $S4$ правил.

Теорема 6. *Множество* $\mathcal{B}$ *является базисом для глобально допустимых правил вывода в* $S4$.

Доказательство. По определению множества $\mathcal{B}$, все правила из $\mathcal{B}$ глобально допустимы в $S4$. Предположим теперь, что из множества $\mathcal{B}$ не выводится некоторое глобально допустимое в $S4$ правило r (в редуцированной форме), т. е. существует табличная логика λ_0 над $S4$, в которой $\mathcal{B} \not\vdash_{\lambda_0} r$. Следовательно, по теореме 1.4.11 [11] найдется λ_0-модель $\mathcal{M}$, разделяющая множество правил $\mathcal{B}$ и правило r при некотором означивании V, т. е. $\forall q \in \mathcal{B}\ (\mathcal{M} \models_V q,\ \&\ \mathcal{M} \not\models_V r)$.

Так как правило r опровергается на модели $\mathcal{M}$, посылка правила истинна на всех элементах этой модели, а заключение x_0 ложно на некотором элементе z: $\forall x \in \mathcal{M}\ x \models_V Pr(r),\ \exists z \in \mathcal{M}(z \not\models_V x_0)$. Следовательно, найдется формула $\phi_z \in Pr(r) : z \models_V \phi_z$. Но тогда выполняется $x_0 \notin \theta_1(\phi_z)$. Определим базовое множество X модели $\mathfrak{M}(r, X)$ для правила r как множество формул из посылки $Pr(r)$, имеющих непустое множество истинности на модели $\mathcal{M}$. Так как отношение на модели рефлексивно, то для всех $\phi \in X$ выполняется $\theta_1(\phi) \subseteq \theta_2(\phi)$.

В силу существования модели, разделяющей множество правил $\mathcal{B}$ и правило r, выполняется $r \notin \mathcal{B}$. Значит, условие (5) не выполняется для правила r. Отсюда и $x_0 \notin \theta_1(\phi_z)$ заключаем $\theta_1(\phi_z) = \theta_2(\phi_z)$. Покажем теперь, что отсюда следует недопустимость правила r в некоторой табличной логике, что противоречит его глобальной допустимости.

Определим модель $\mathcal{E} = \langle\{e\}, R, S\rangle$, порожденную единственным рефлексивным элементом e с означиванием: $e \models_S p \iff p \in \theta_1(\phi_z)$. В силу такого определения означивания и равенства $\theta_1(\phi_z) = \theta_2(\phi_z)$ легко убедиться (непосредственной проверкой), что справедливо $e \models_S \phi_z,\ e \not\models_S x_0$. В частности, отсюда следует $\mathcal{E} \not\models_S r$.

Определим также табличную логику λ_e, порожденную одноэлементным сгустком e. Для любого n фрейм n-характеристической модели этой логики является прямым объединением одноэлементных сгустков (конечного числа копий элемента e). При означивании S, определенном выше, правило r опровергается на этой n-характеристической модели при формульном означивании S (в силу конечности модели означивание является формульным). Отсюда заключаем, что правило r недопустимо в табличной логике λ_e, что противоречит исходному предположению. $\square$

Рассмотрим далее множество $\mathcal{AB}$ правил r в редуцированной форме, для которых модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет следующим свойствам: (1) $\exists \phi \in X :\ x_0 \notin \theta_1(\phi)\ \&\ \operatorname{depth} d(\phi) = K$; (2) $\forall \phi \in X\ \phi \models_V \phi$ в модели $\mathfrak{M}(r, X)$; (3) $\exists \phi_0 \in X : \theta_1(\phi_0) = \theta_2(\phi_0),\ \theta_3(\phi_0) = \theta_4(\phi_0)$; (4) $\forall k > 1\ \forall \phi_1, \phi_2 \dots, \phi_k \in S_{\leq K}(\mathfrak{M}(r, X))\ \exists \phi \in X :\ \theta_2(\phi) = \theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi_1) \cup \dots \cup \theta_2(\phi_k),\ \&\ \theta_4(\phi) = \theta_3(\phi_1) \cap \theta_4(\phi_1) \cap \dots \cap \theta_4(\phi_k)$.

По теореме 2 все эти правила недопустимы глобально в логике $S4$. Покажем, что это множество образует **антибазис для глобально допустимых правил**, т. е. любое правило (в редуцированной форме), недопустимое глобально в $S4$, выводится в логике $S4$ (следовательно, и в любом ее расширении) из данного набора правил $\mathcal{AB}$.

Нетривиальное множество $\{\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_N\}$ членов посылки правила r будем называть **насыщенным**, если оно удовлетворяет свойству (4). Неформально это означает, что в модели $\mathfrak{M}(r, X)$ каждая нетривиальная антицепь элементов глубины не более некоторого K имеет ко-накрытие. Понятно, что для любого нетривиального множества

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subseteq Pr(r)$$

от n переменных существует расширяющее его насыщенное множество $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ от данного множества n переменных.

Действительно, рассмотрим множество формул

$$A = \{\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_k\} \subseteq Pr(r), k > 1,$$

и выберем в нем произвольное нетривиальное подмножество X. Определим для него новую формулу ϕ_X следующим образом:

$$\forall p\ (p \in \bigcup_{\phi_i \in X} \theta_2(\phi_i) \implies p \in \theta_1(\phi_X)\ \&\ p \in \bigcap_{\phi_i \in X} \theta_4(\phi_i) \implies p \in \theta_3(\phi_X)).$$

Также ясно, что при таком определении формулы ϕ_X выполняется (по рефлексивности отношения)

$$\theta_2(\phi_X) = \theta_1(\phi_X) = \bigcup_{\phi_i \in X} \theta_2(\phi_i),\ \&\ \theta_4(\phi_X) = = \theta_3(\phi_X) = \bigcap_{\phi_i \in X} \theta_4(\phi_i),$$

т. е. для заданного подмножества X выполняется свойство (4).

Переходим теперь ко множеству $A_1 = A \cup \phi_X$ и повторяем описанный процесс и т. д. В силу конечности исходного множества A процесс построения новых формул закончится и полученное множество $\mathcal{A}$ будет насыщенным: для каждого его подмножества X найдется элемент $\phi_X \in \mathcal{A}$ с требуемыми свойствами.

Теорема 7. *Множество $\mathcal{AB}$ является антибазисом для глобально недопустимых в $S4$ правил вывода.*

Доказательство. По определению множества $\mathcal{AB}$, все правила в нем недопустимы глобально в $S4$. Предположим теперь, что из множества $\mathcal{AB}$ не выводится некоторое правило r (в редуцированной форме), недопустимое глобально в $S4$, т. е. $\mathcal{B} \not\vdash_{S4} r$.

Следовательно, по теореме 1.4.11 [11] найдется $S4$-модель $\mathcal{M}$, разделяющая множество правил $\mathcal{AB}$ и правило r при некотором означивании S: $\forall q \in \mathcal{AB}\ \mathcal{M} \models_S q,\ \mathcal{M} \not\models_S r$. Так как правило r опровергается на модели $\mathcal{M}$, посылка правила истинна на всех элементах этой модели, а заключение x_0 ложно на некотором элементе z: $\forall\, x \in \mathcal{M}\ x \models_S Pr(r),\ \exists\, z \in \mathcal{M}(z \not\models_S x_0)$.

Как уже отмечалось, множество членов посылки $\{\phi \mid \phi \in Pr(r)\}$ является подмножеством насыщенного множества посылок $\{\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_N\}$ некоторого правила $R = \{\{\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_N\}/x_0\}$ из множества $\mathcal{AB}$. Но тогда на модели $\mathcal{M}$ при заданном означивании S опровергается также правило $R = \{\{\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_N\}/x_0\} \in \mathcal{AB}$. Действительно, по предположению на каждом элементе $x \in \mathcal{M}$ истинна некоторая формула $\phi \in Pr(r) \subseteq Pr(R)$, а заключение опровергается : $\exists z \in \mathcal{M}(z \not\models_S x_0)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Напомним, при построении модели $\mathfrak{M}h(k)$ было определено конструктивное множество $\Phi(k)$ всех возможных формул вида

$$\phi = \bigwedge_{0 \le i \le k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0 \le i \le k} \Diamond x_i^{b_i}$$

от переменных $\{x_0, \ldots x_k\}$, для которых выполняется $\theta_1(\phi) \subseteq \theta_2(\phi)$. Легко убедиться, что для правила $\mathcal{R}_k = \{\bigvee\{\phi : \phi \in \Phi(k)\}/x_0\},\ k > 1$, модель $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}(\mathcal{R}_k, \Phi(k))$ удовлетворяет свойствам (1)–(4). Так как для любого правила $r(x_0, \ldots, x_k)$ в редуцированной форме выполняется $Pr(r) \subseteq \Phi(k)$, то из замеченного выше и теоремы 7 в совокупности следует *явное описание антибазиса.*

Следствие 1. *Множество правил* $Exp\mathcal{AB} = \{\mathcal{R}_k,\ k > 1\}$ *образует явный антибазис для глобально недопустимых в логике* $S4$ *правил вывода.*

6. Заключение

В статье исследуются правила вывода, глобально допустимые в логике $S4$ (т. е. допустимые сразу во всех финитно аппроксимируемых расширениях $S4$). Получены условия глобальной допустимости заданного правила, описана характеристическая (универсальная) модель для таких правил, а также описаны базис и антибазис для них. Однако вопросы о существовании критерия глобальной допустимости заданного правила, о конечности базисов или их явном описании остаются открытыми.

Список источников

1. Рыбаков В. В. Базис для допустимых правил логики $S4$ и интуиционистской логики H // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 55–68.
2. Римацкий В. В. О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2 // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 4. С. 436–455.
3. Римацкий В. В. Базисы допустимых правил K-насыщенных логик // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 6. С. 750–761.
4. Римацкий В. В. Явный базис для допустимых правил K-насыщенных табличных логик // Дискретная математика. 2022. Т. 34, № 1. С. 126- 140. https://doi.org/10.4213/dm1677

5. Римацкий В. В. Допустимые правила вывода и семантические свойства модальных логик // Известия Иркутского государственого университета. Серия Математика. 2021. Т. 37. С. 104–117. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.104.
6. Римацкий В. В., Кияткин В. Р. Независимый базис допустимых правил вывода предтабличных логик и их расширений // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 79–89.
7. Римацкий В. В. Таблично допустимые правила вывода // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 3. С. 400–414.
8. Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic // Journal of Symbolic Logic. 1975. Vol. 40, N 3. P. 113–130.
9. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 113, N 1-3. P. 161–173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
10. Lorenzen P. Einfung in Operative Logik und Mathematik. Berlin ; Gottingen ; Heidelberg, 1955.
11. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. New-York ; Amsterdam : Elsevier Sci. Publ., 1997. Vol. 136. 611 p.
12. Rybakov V. V., Rimatski V. V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics // Bulletin of the Section of Logic. 2005. Vol. 34, N 2. P. 1–7.

References

1. Rybakov V.V. Basis for admissible inference rules of logic $S4$ and Int. *Algebra and Logic*, 1985, vol. 24, no. 1, pp. 55–68.
2. Rimatskiy V.V. On finite basis of admissible rules for modal logics of width 2. *Algebra and Logic*, 1999, vol. 38, pp. 237–247. (in Russian) https://doi.org/10.1007/BF02671729
3. Rimatskiy V.V. Basis for admissible rules of K-sutureted logics. *Algebra and Logic*, 2008, vol. 47, no. 6, pp. 750–761. (in Russian)
4. Rimatskiy V. V. Explicit bases of admissible inference rules for K-satureted tabular logics. *Discrete mathematics*, 2022, vol. 34, no. 1, pp. 126–140. (in Russian) https://doi.org/10.4213/dm1677
5. Rimatskiy V.V. Admissible Inference Rules and Semantic Property of Modal Logics. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol.37, pp. 104–117. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.104
6. Rimatskiy V.V., Kiyatkin V.R. Independent bases for admissible rules of pretabular modal logic and its extensions. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 10, pp. 79–89.(in Russian) http://semr.math.nsc.ru.
7. Rimatskiy V.V. Table admissible inference rules. *Algebra and Logic*, 2009, vol. 48, no. 3, pp. 400–414.
8. Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1975, vol. 40, no. 3, pp. 113–130.
9. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2001, vol. 113, no. 1-3, pp. 161–173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
10. Lorenzen P. *Einfung in Operative Logik und Mathematik.* Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1955.

11. Rybakov V.V. Admissibility of logical inference rules, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* New-York, Amsterdam, Elsevier Sci. Publ., 1997, vol. 136, 611 p.
12. Rybakov V.V., Rimatski V.V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics. *Bulletin of the Section of Logic*, 2005, vol. 34, no. 2, pp. 1–7.

Римацкий Виталий Валентинович, канд. физ.-мат. наук, доц., Институт математики, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, Gemmeny@rambler.ru

Vitaliy V. Rimatskiy, Cand. Sci. (Phys.Math), Assoc. Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, Gemmeny@rambler.ru

Поступила в редакцию / Received 04.07.2022
Поступила после рецензирования / Revised 03.08.2022
Принята к публикации / Accepted 01.09.2022