Серия «Математика»
2022. Т. 42. С. 103—120

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.958
MSC 35M33, 35Q35
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.103

Колебания системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства

К. В. Фордук[1]

[1] Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Российская Федерация
✉ forduk_kv@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется линеаризованная двумерная задача о малых движениях системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими несжимаемыми жидкостями и последовательно соединённых пружинами. Первое и последнее тела прикреплены пружинами к двум опорам с заданным законом движения. Траектория движения системы перпендикулярна направлению силы тяжести, а демпфирующие силы, действующие на гидромеханическую систему, порождаются трением тел о неподвижную горизонтальную опору. Для описанной системы сформулирован закон баланса полной энергии. С использованием метода ортогонального проектирования и ряда вспомогательных краевых задач исходная начально-краевая задача сведена к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме некоторых гильбертовых пространств. Изучены свойства операторных матриц, являющихся коэффициентами полученного дифференциального уравнения. Доказана теорема об однозначной разрешимости полученной задачи Коши на положительной полуоси. На основе доказанной теоремы найдены достаточные условия существования сильного по времени решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию гидросистемы. С математической точки зрения рассматриваемая система является конечномерным возмущением известной задачи С.Г. Крейна о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде.

Ключевые слова: система тел, вязкая жидкость, задача Коши, операторное уравнение, сильно непрерывная полугруппа

Благодарности: Автор выражает благодарность научному руководителю доценту Д. А. Закоре за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ссылка для цитирования: Фордук К. В. Колебания системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 103–120.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.103

Research article

Oscillations of a System of Rigid Bodies Partially Filled with Viscous Fluids Under the Action of an Elastic Damping Device

Karina V. Forduk[1]

[1] V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation
✉ forduk_kv@mail.ru

Abstract. In this paper, we investigate the linearized two-dimensional problem on small motions of a system of rigid bodies partially filled with viscous incompressible fluids and connected in series by springs. The first and last bodies are attached by springs to two supports with a given law of motion. The trajectory of the system is perpendicular to the direction of gravity, and the damping forces acting on the hydrodynamical system are generated by the friction of bodies against a stationary horizontal support. For the described system, the law of total energy balance is formulated. Using the orthogonal projection method and a number of auxiliary boundary problems, the original initial-boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for a first-order differential-operator equation in the orthogonal sum of some Hilbert spaces. The properties of operator matrices, which are coefficients of the obtained differential equation, are investigated. A theorem on the unique solvability of the resulting Cauchy problem on the positive semi-axis is proved. On the basis of the proved theorem, sufficient conditions for the existence of a strong with respect to time solution of an initial-boundary value problem describing the evolution of a hydrodynamical system, are found. From a mathematical point of view, the system under consideration is a finite-dimensional perturbation of the well-known S.G. Krein's problem on small motions of a viscous fluid in an open vessel.

Keywords: system of bodies, viscous fluid, Cauchy problem, operator equation, strongly continuous semigroup

Acknowledgements: The author is grateful to his scientific supervisor associate professor D. A. Zakora for posing the problem and constant attention to the work.

For citation: Forduk K. V. Oscillations of a System of Rigid Bodies Partially Filled with Viscous Fluids Under the Action of an Elastic Damping Device. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 103–120. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.103

1. Введение

Одними из первых, кто применил методы функционального анализа для исследования задачи о малых движениях тела, частично заполненного вязкой жидкостью, были С. Г. Крейн, Н. Н. Моисеев, О. Б. Иевлева, П. С. Краснощёков, Ф. Л. Черноусько и Н. Д. Копачевский. В дальнейшем различные вопросы, связанные с близкими задачами гидромеханики, исследовались многими авторами (см. монографии Н. Д. Копачевского [11; 12] и ссылки в них). Из недавних работ по данной тематике можно отметить статьи Д. О. Цветкова [5; 6], в которых рассмотрены малые колебания системы идеальных жидкостей и вязкой жидкости с эффектом стратификации, частично заполняющих произвольный сосуд.

Данная статья является продолжением цикла работ автора, посвящённых исследованию двумерных линеаризованных задач о малых движениях и нормальных колебаниях системы тел, частично заполненных жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства. В работе [7] доказана теорема о разрешимости задачи о малых движениях системы тел в случае, когда твёрдые тела системы заполнены однородными идеальными жидкостями, работа [8] посвящена исследованию спектральных свойств этой задачи. В представленной работе рассматривается новая задача, исследуется случай заполнения тел вязкими жидкостями. Применяя операторный подход, изложенный в монографии Н. Д. Копачевского [3], и метод операторных матриц, исследование начально-краевой задачи о движениях системы тел автор сводит к исследованию задачи Коши для дифференциального операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{C}\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_0 z = \mathcal{F}, \quad z(0) = z^0.$$

Основным результатом данной работы является теорема 1 о разрешимости начально-краевой задачи, описывающей эволюцию изучаемой гидросистемы.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим гидромеханическую систему, состоящую из n тел, которые закреплены между двумя опорами так, что l-е тело соединено с соседними $(l-1)$-м и $(l+1)$-м телами пружинами с жёсткостями k_{l-1}^2, k_l^2 соответственно, а первое и последнее тела прикреплены к пружинам с жёсткостями k_0^2, k_n^2, концы которых неподвижно закреплены на опорах, $l = \overline{1,n}$.

Каждое l-е тело представляет собой открытый сосуд, частично заполненный вязкой несжимаемой жидкостью плотности $\rho_l > 0$ с динамическим коэффициентом вязкости $\mu_l > 0$. В состоянии покоя жидкость занимает область $\Omega_l \subset \mathbb{R}^2$ со свободной границей Γ_l и твёрдой стенкой S_l. Пусть $m_l := m_{\mathrm{b},l} + m_{\mathrm{f},l}$, где $m_{\mathrm{b},l}$ — масса тела, $m_{\mathrm{f},l}$ — масса жидкости. В состоянии покоя границы Γ_l считаем горизонтальными прямыми. Под упругодемпфирующим устройством будем понимать наличие пружин, прикреплённых к твёрдым стенкам сосудов, как показано на рис. 1, и трение днищ сосудов о неподвижную горизонтальную опору. Через $\alpha_l > 0$ обозначим коэффициент трения дна l-го тела об опору.

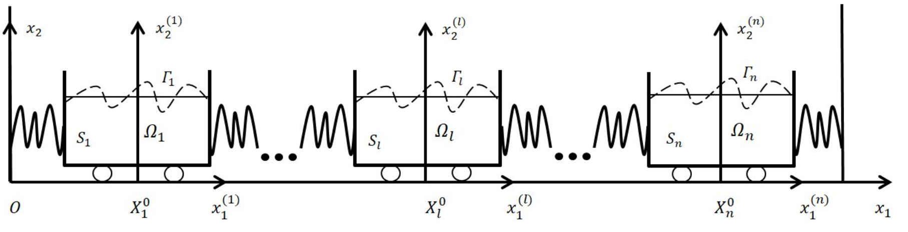

Рис. 1. Схема гидромеханической системы.

Введём неподвижную декартову систему координат Ox_1x_2 с ортами $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2$, так, чтобы тела совершали движения вдоль оси Ox_1. Кроме того, введём подвижные системы координат $X_l^0 x_1^{(l)} x_2^{(l)}$, жёстко связанные с l-ми телами. Орты подвижных систем обозначим через $\mathbf{e}_j^{(l)}$, $j = 1, 2$. При этом $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^{(l)}$.

В процессе малых движений тела рассмотрим перемещение l-го тела вдоль оси Ox_1 и обозначим через $x_l(t)$ малое смещение этого тела относительно равновесного состояния.

Обозначим через $\mathbf{u}_l(t, x^{(l)}) = \big(u_{l,1}(t, x_1^{(l)}); u_{l,2}(t, x_2^{(l)})\big)$ поле относительных скоростей l-й жидкости в l-й подвижной системе координат. Тогда полная скорость l-й жидкости в неподвижной системе будет выражаться формулой $\dot{x}_l(t)\mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_l(t, x^{(l)})$.

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнения движения тел с жидкостями в неподвижной системе координат Ox_1x_2. Более подробно вывод этих уравнений описан в [7]. Будем иметь:

$$m_1\ddot{x}_1\mathbf{e}_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}\, d\Omega_1 = -k_0^2 x_1 \mathbf{e}_1 + k_1^2(x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 + k_0^2 x_0 \mathbf{e}_1 - \\ - \alpha_1 \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 - g m_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_{\mathrm{b},1} + N_1 \mathbf{e}_2, \qquad (2.1)$$

$$m_l\ddot{x}_l\mathbf{e}_1 + \rho_l \int\limits_{\Omega_l} \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t}\, d\Omega_l = -k_{l-1}^2 (x_l - x_{l-1}) \mathbf{e}_1 + k_l^2(x_{l+1} - x_l)\mathbf{e}_1 - \\ - \alpha_l \dot{x}_l \mathbf{e}_1 - g m_l \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_{\mathrm{b},l} + N_l \mathbf{e}_2, \quad l = \overline{2, n-1}, \qquad (2.2)$$

$$m_n\ddot{x}_n\mathbf{e}_1 + \rho_n \int\limits_{\Omega_n} \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}\, d\Omega_n = -k_{n-1}^2(x_n - x_{n-1})\mathbf{e}_1 - k_n^2 x_n \mathbf{e}_1 + k_n^2 x_{n+1}\mathbf{e}_1 - \\ - \alpha_n \dot{x}_n \mathbf{e}_1 - g m_n \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_{\mathrm{b},n} + N_n \mathbf{e}_2, \quad (2.3)$$

где $x_0 = x_0(t)$ — заданный закон движения левой стенки, $N_l = N_l(t)$ — реакция опоры, $\mathbf{f}_{\mathrm{b},l} = \mathbf{f}_{\mathrm{b},l}(t)$ — малая внешняя сила, действующая на l-е тело, $l = \overline{1,n}$, g — гравитационное ускорение, $x_{n+1} = x_{n+1}(t)$ — заданный закон движения правой стенки.

Малые движения вязкой жидкости в области Ω_l описываются линеаризованным уравнением Навье – Стокса (см. [3, гл. 6, § 1, п. 1]):

$$\rho_l\left(\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \ddot{x}_l \mathbf{e}_1^{(l)}\right) + \nabla p_l = \mu_l \Delta \mathbf{u}_l + \rho_l \mathbf{f}_{\mathrm{f},l}(t, x^{(l)}), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0 \,(\text{в } \Omega_l), \quad (2.4)$$

где $p_l = p_l(t, x^{(l)})$ — отклонение давления в жидкости в процессе движения от равновесного давления, а $\mathbf{f}_{\mathrm{f},l} = \mathbf{f}_{\mathrm{f},l}(t, x^{(l)})$ — малая сила, действующая на жидкость в области Ω_l, $l = \overline{1,n}$.

Через $\zeta_l(t, x_1^{(l)})\,(x_1^{(l)} \in \Gamma_l)$ обозначим функцию, описывающую малые отклонения свободной границы $\Gamma_l(t)$ вдоль $\mathbf{e}_2^{(l)}$ относительно Γ_l.

Граничными условиями в рассматриваемой задаче являются условие прилипания вязкой жидкости на твёрдой стенке:

$$\mathbf{u}_l = 0 \quad (\text{на } S_l), \quad l = \overline{1,n}, \quad (2.5)$$

линеаризованные кинематические и динамические условия на свободной поверхности соответственно

$$\frac{\partial \zeta_l}{\partial t} = \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{e}_2^{(l)} \quad (\text{на } \Gamma_l), \quad l = \overline{1,n}, \quad (2.6)$$

$$-p_l + 2\rho_l \nu_l \frac{\partial u_{l,2}}{\partial x_2^{(l)}} = -\rho_l g \zeta_l \quad (\text{на } \Gamma_l), \quad l = \overline{1,n}, \quad (2.7)$$

$$\rho_l \nu_l \left(\frac{\partial u_{l,1}}{\partial x_2^{(l)}} + \frac{\partial u_{l,2}}{\partial x_1^{(l)}}\right) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_l), \quad l = \overline{1,n}, \quad (2.8)$$

а также условие сохранения объёма каждой жидкости

$$\int\limits_{\Gamma_l} \zeta_l \, d\Gamma_l = 0, \quad l = \overline{1,n}. \quad (2.9)$$

Здесь через $\nu_l := \mu_l/\rho_l$ обозначен коэффициент кинематической вязкости жидкости, а через $\mathbf{n}_l$ далее будем обозначать единичный вектор, направленный вне области Ω_l и перпендикулярный к границе $\partial\Omega_l = \Gamma_l \cup S_l$, $l = \overline{1,n}$. На границе Γ_l, очевидно, будет выполнено $\mathbf{n}_l = \mathbf{e}_2^{(l)}$.

Для полноты формулировки задачи зададим начальные условия:

$$
\begin{gathered}
x_l(0)=x_l^0, \quad \dot{x}_l(0)=x_l^1, \\
\mathbf{u}_l(0,x^{(l)})=\mathbf{u}_l^0(x^{(l)}), \quad \zeta_l(0,x_1^{(l)})=\zeta_l^0(x_1^{(l)}), \quad l=\overline{1,n}.
\end{gathered} \tag{2.10}
$$

Таким образом, задача о малых движениях системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими несжимаемыми жидкостями, под действием упругих и демпфирующих сил сводится к решению уравнений (2.1)-(2.4) при краевых и начальных условиях (2.5)-(2.10).

Лемма 1. *Будем считать, что поставленная задача (2.1)–(2.10) имеет классическое решение, т. е. такое решение, что все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны по всем своим переменным. Тогда тождество*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\sum_{l=1}^{n}\Bigg(m_{b,l}|\dot{x}_l|^2+\rho_l\int\limits_{\Omega_l}\left|\mathbf{u}_l+\dot{x}_l\mathbf{e}_1^{(l)}\right|^2 d\Omega_l+\rho_l g\int\limits_{\Gamma_l}|\zeta_l|^2 d\Gamma_l\Bigg)+ \\
+k_0^2x_1^2+k_n^2x_n^2+\sum_{l=1}^{n-1}k_l^2|x_{l+1}-x_l|^2\Bigg\}=k_0^2x_0\dot{x}_1+k_n^2x_{n+1}\dot{x}_n+ \\
+\sum_{l=1}^{n}\Bigg(-\alpha_l|\dot{x}_l|^2+(\mathbf{f}_{b,l}\cdot\mathbf{e}_1)\dot{x}_l+\rho_l\int\limits_{\Omega_l}\mathbf{f}_{f,l}\cdot\mathbf{u}_l\,d\Omega_l+\mu_l E(\mathbf{u}_l,\mathbf{u}_l)\Bigg),
\end{aligned}
$$

где

$$
E(\mathbf{u}_l,\mathbf{v}_l):=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_l}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial u_{l,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{l,j}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_{l,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial v_{l,j}}{\partial x_i}\right)d\Omega_l,
$$

представляет собой закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме.

3. Функциональные пространства

Введём гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega):=\bigoplus\limits_{l=1}^{n}\mathbf{L}_2(\Omega_l)$, где $\mathbf{L}_2(\Omega_l)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой

$$
(\mathbf{u}_l,\mathbf{v}_l)_{\mathbf{L}_2(\Omega_l)}:=\int\limits_{\Omega_l}\mathbf{u}_l(x^{(l)})\cdot\overline{\mathbf{v}_l(x^{(l)})}\,d\Omega_l, \quad \|\mathbf{u}_l\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega_l)}=\int\limits_{\Omega_l}|\mathbf{u}_l(x^{(l)})|^2\,d\Omega_l.
$$

Как известно, пространство $\mathbf{L}_2(\Omega_l)$ имеет ортогональное разложение (см., например, [3, гл. 2, § 1, формула (1.24)])

$$
\mathbf{L}_2(\Omega_l)=\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)\oplus\mathbf{G}_{0,\Gamma_l}(\Omega_l), \quad \mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)=\mathbf{J}_0(\Omega_l)\oplus\mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l), \tag{3.1}
$$

где

$$\mathbf{J}_0(\Omega_l) := \big\{\mathbf{u}_l \in \mathbf{L}_2(\Omega_l) : \operatorname{div}\mathbf{u}_l = 0 \ (\text{в } \Omega_l), \quad \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n}_l = 0 \ (\text{на } \partial\Omega_l)\big\},$$

$$\mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l) := \big\{\mathbf{u}_l = \nabla\Phi_l \in \mathbf{L}_2(\Omega_l) : \Delta\Phi_l = 0 \ (\text{в } \Omega_l), \quad \frac{\partial\Phi_l}{\partial n_l} = 0 \ (\text{на } S_l), \quad \int\limits_{\Gamma_l} \Phi_l d\Gamma_l = 0\big\},$$

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma_l}(\Omega_l) := \big\{\mathbf{u}_l = \nabla\Psi_l \in \mathbf{L}_2(\Omega_l) : \Psi_l = 0 \ (\text{на } \Gamma_l)\big\}.$$

Введём пространство $\mathbf{J}^1_{0,S_l}(\Omega_l)$, плотно вложенное в $\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)$:

$$\mathbf{J}^1_{0,S_l}(\Omega_l) := \big\{\mathbf{u}_l \in \mathbf{L}_2(\Omega_l) \colon E(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_l) < \infty, \ \operatorname{div}\mathbf{u}_l = 0 \ (\text{в } \Omega_l), \ \mathbf{u}_l = 0 \ (\text{на } S_l)\big\},$$

и определим гильбертово пространство L_{2,Γ_l}, являющееся подпространством $L_2(\Gamma_l)$, ортогональным единичной функции $1_{\Gamma_l} := 1|_{\Gamma_l}$:

$$L_{2,\Gamma} := \bigoplus_{l=1}^{n} L_{2,\Gamma_l}, \quad L_{2,\Gamma_l} := \Big\{\zeta_l \in L_2(\Gamma_l) : \int\limits_{\Gamma_l} \zeta_l \, d\Gamma_l = 0\Big\}.$$

Далее в исследуемой проблеме искомые векторные и скалярные поля будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующих введённых выше пространствах и подпространствах.

Введём ортопроекторы P_{0,S_l} и P_{0,Γ_l} пространства $\mathbf{L}_2(\Omega_l)$ на подпространства $\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)$ и $\mathbf{G}_{0,\Gamma_l}(\Omega_l)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_l для $\mathbf{u}_l$ считаем, что поле $\mathbf{u}_l$ принадлежит подпространству $\mathbf{J}^1_{0,S_l}(\Omega_l)$. Подействуем введёнными ортопроекторами на уравнение из (2.4), получим

$$\rho_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \rho_l \ddot{x}_l P_{0,S_l}\mathbf{e}_1^{(l)} + \nabla\widetilde{p}_l = \mu_l P_{0,S_l}\Delta\mathbf{u}_l + \rho_l P_{0,S_l}\mathbf{f}_{\mathrm{f},l}(t, x^{(l)}), \tag{3.2}$$

$$\rho_l \ddot{x}_l P_{0,\Gamma_l}\mathbf{e}_1^{(l)} + P_{0,\Gamma_l}\nabla p_l = \mu_l P_{0,\Gamma_l}\Delta\mathbf{u}_l + \rho_l P_{0,\Gamma_l}\mathbf{f}_{\mathrm{f},l}(t, x^{(l)}). \tag{3.3}$$

Здесь через $\nabla\widetilde{p}_l$ обозначено поле $\nabla\widetilde{p}_l := P_{0,S_l}\nabla p_l$, $\nabla\widetilde{p}_l \in \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l)$ в силу разложения пространства $\mathbf{L}_2(\Omega_l)$. Из уравнения (3.3) при известных $\mathbf{u}_l$ и x_l найдём составляющую градиента давления в подпространстве $\mathbf{G}_{0,\Gamma_l}(\Omega_l)$. Поэтому далее рассматриваем только уравнение (3.2).

Далее, представим $\nabla\widetilde{p}_l$ в виде суммы $\nabla\widetilde{p}_l = \nabla\widetilde{p}_{l,1} + \nabla\widetilde{p}_{l,2}$ и подберём поле $\nabla\widetilde{p}_{l,1}$ таким образом, чтобы поле $\mathbf{u}_l$ являлось решением следующей краевой задачи:

$$-P_{0,S_l}\Delta\mathbf{u}_l + \mu_l^{-1}\nabla\widetilde{p}_{l,1} = \mu_l^{-1}\left(\rho_l P_{0,S_l}\mathbf{f}_{\mathrm{f},l} - \rho_l \frac{\partial\mathbf{u}_l}{\partial t} - \rho_l \ddot{x}_l P_{0,S_l}\mathbf{e}_1^{(l)} - \nabla\widetilde{p}_{l,2}\right),$$

$$\mu_l\left(\frac{\partial u_{l,1}}{\partial x_2^{(l)}} + \frac{\partial u_{l,2}}{\partial x_1^{(l)}}\right) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_l), \quad -\widetilde{p}_{l,1} + 2\mu_l \frac{\partial u_{l,2}}{\partial x_2^{(l)}} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_l),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \qquad \mathbf{u}_l = 0 \quad (\text{на } S_l).$$

Эта задача — первая вспомогательная задача С. Г. Крейна, которая, как известно (см., например, [3, гл. 2, § 2, п. 7]), имеет единственное обобщённое решение

$$\mathbf{u}_l = \mu_l^{-1} A_l^{-1} \left(\rho_l P_{0,S_l} \mathbf{f}_{\mathrm{f},l} - \rho_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} - \rho_l \ddot{x}_l P_{0,S_l} \mathbf{e}_1^{(l)} - \nabla \widetilde{p}_{l,2} \right), \tag{3.4}$$

когда выражение в правой части в скобках из $\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)$. Оператор A_l из (3.4) самосопряжённый и положительно определённый в $\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)$, область определения оператора $\mathcal{D}(A_l)$ плотна в пространстве $\mathbf{J}^1_{0,S_l}(\Omega_l)$, а $\mathcal{D}\big(A_l^{1/2}\big) = \mathbf{J}^1_{0,S_l}(\Omega_l)$. Оператор A_l^{-1} является положительным и компактным в $\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)$.

Итак, можно переписать (3.4) в виде

$$\rho_l \frac{d\mathbf{u}_l}{dt} + \mu_l A_l \mathbf{u}_l + \nabla \widetilde{p}_{l,2} = -\rho_l \ddot{x}_l P_{0,S_l} \mathbf{e}_1^{(l)} + \rho_l P_{0,S_l} \mathbf{f}_{\mathrm{f},l}. \tag{3.5}$$

Учитывая принадлежность $\nabla \widetilde{p}_{l,2} \in \mathbf{G}_{h,S_l}(\Omega_l)$, найдём, что $\widetilde{p}_{l,2}$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} &\Delta \widetilde{p}_{l,2} = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), &&\widetilde{p}_{l,2} = \rho_l g \zeta_l \quad (\text{на } \Gamma_l), \\ &\frac{\partial \widetilde{p}_{l,2}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_l), &&\int\limits_{\Gamma_l} \widetilde{p}_{l,2}\, d\Gamma_l = 0. \end{aligned}$$

Это известная задача Зарембы для оператора Лапласа, которая имеет единственное решение $\widetilde{p}_{l,2} \in H^1_{\Gamma_l}(\Omega_l)$ при $\zeta_l \in H^{1/2}_{\Gamma_l}$ (см. [3, гл. 1, § 3, п. 6]) и липшицевости границы области Ω_l. Здесь $H^{1/2}_{\Gamma_l} := H^{1/2}(\Gamma_l) \cap L_{2,\Gamma_l}$, где $H^{1/2}(\Gamma_l)$ — это пространство Соболева – Слободецкого с дробным индексом. Поэтому можно считать, что $\nabla \widetilde{p}_{l,2} = \rho_l g G_l \zeta_l$.

Таким образом, уравнение (3.5) окончательно можно записать в следующем виде:

$$\rho_l \frac{d\mathbf{u}_l}{dt} + \mu_l A_l \mathbf{u}_l + \rho_l g G_l \zeta_l = \rho_l P_{0,S_l} \mathbf{f}_{\mathrm{f},l} - \rho_l \ddot{x}_l P_{0,S_l} \mathbf{e}_1^{(l)}. \tag{3.6}$$

Введём операторы P_{ρ_l} и $\gamma_{n,l}$, действующие по формулам

$$P_{\rho_l} \mathbf{u}_l := \rho_l \int\limits_{\Omega_l} \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{e}_1^{(l)} d\Omega_l, \quad \gamma_{n,l} \mathbf{u}_l := \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n_l} = \left. \frac{\partial \zeta_l}{\partial t} \right|_{\Gamma_l}. \tag{3.7}$$

С учётом операторов (3.7) перепишем уравнения (3.6) и уравнения движения тел с жидкостями (2.1)–(2.3), спроектированные на орт $\mathbf{e}_1$, следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_l \dfrac{d\mathbf{u}_l}{dt} + \rho_l \ddot{x}_l P_{0,S_l}\mathbf{e}_1^{(l)} + \mu_l A_l \mathbf{u}_l + \rho_l g G_l \zeta_l = \rho_l P_{0,S_l}\mathbf{f}_{\mathrm{f},l}, \quad l=\overline{1,n}, \\ \dfrac{d}{dt}P_{\rho_1}\mathbf{u}_1 + m_1\ddot{x}_1 + k_0^2 x_1 - k_1^2(x_2-x_1) + \alpha_1\dot{x}_1 = k_0^2 x_0 + \mathbf{f}_{\mathrm{b},1}\cdot\mathbf{e}_1, \\ \dfrac{d}{dt}P_{\rho_l}\mathbf{u}_l + m_l\ddot{x}_l + k_{l-1}^2(x_l-x_{l-1}) - k_l^2(x_{l+1}-x_l) + \alpha_l\dot{x}_l = \mathbf{f}_{\mathrm{b},l}\cdot\mathbf{e}_1, \\ \hfill l=\overline{2,n-1}, \\ \dfrac{d}{dt}P_{\rho_n}\mathbf{u}_n + m_n\ddot{x}_n + k_{n-1}^2(x_n-x_{n-1}) + k_n^2 x_n + \alpha_n\dot{x}_n = k_n^2 x_{n+1} + \mathbf{f}_{\mathrm{b},n}\cdot\mathbf{e}_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Систему (3.8) запишем в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1 := \mathbf{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\mathbb{C}^n$:

$$\begin{pmatrix} I_\rho & E \\ P_\rho & I_m \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{x}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_\mu A & 0 \\ 0 & I_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{x}\end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} gI_\rho G & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\rho P_{0,S}\mathbf{f}_{\mathrm{f}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{b},\mathbf{e}_1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ k\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{gathered} E := \mathrm{diag}(\rho_1 P_{0,S_1}\mathbf{e}_1^{(1)},\ldots,\rho_n P_{0,S_n}\mathbf{e}_1^{(n)}), \;\; P_{0,S} := \mathrm{diag}(P_{0,S_1},\ldots,P_{0,S_n}), \\ I_\rho := \mathrm{diag}(\rho_1 I,\ldots,\rho_n I), \;\; I_m := \mathrm{diag}(m_1 I,\ldots,m_n I), \\ I_\alpha := \mathrm{diag}(\alpha_1 I,\ldots,\alpha_n I), \;\; I_\mu := \mathrm{diag}(\mu_1 I,\ldots,\mu_n I), \\ \gamma_n := \mathrm{diag}(\gamma_{n,1},\ldots,\gamma_{n,n}), \;\; G := \mathrm{diag}(G_1,\ldots,G_n), \\ P_\rho := \mathrm{diag}(P_{\rho_1},\ldots,P_{\rho_n}), \;\; A := \mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_n), \\ \mathbf{u} := (\mathbf{u}_1;\ldots;\mathbf{u}_n)^\tau, \;\; x := (x_1;\ldots;x_n)^\tau, \;\; \dot{x} := (\dot{x}_1;\ldots;\dot{x}_n)^\tau, \\ \mathbf{f}_{\mathrm{f}} := (\mathbf{f}_{\mathrm{f},1};\ldots;\mathbf{f}_{\mathrm{f},n})^\tau, \;\; \mathbf{f}_{\mathrm{b},\mathbf{e}_1} := (\mathbf{f}_{\mathrm{b},1}\cdot\mathbf{e}_1;\ldots;\mathbf{f}_{\mathrm{b},n}\cdot\mathbf{e}_1)^\tau, \\ \zeta := (\zeta_1;\ldots;\zeta_n)^\tau, \;\; k := (k_0^2 x_0;0;\ldots;0;k_n^2 x_{n+1})^\tau, \end{gathered}$$

где символом τ обозначена операция транспонирования. Оператор K определён по формуле

$$K := \begin{pmatrix} k_0^2+k_1^2 & -k_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1^2 & k_1^2+k_2^2 & -k_2^2 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_2^2 & k_2^2+k_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{n-1}^2 & k_{n-1}^2+k_n^2 \end{pmatrix}.$$

С учётом следующих обозначений:

$$B_{12} := \begin{pmatrix} gI_\rho G & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{12}) = \mathcal{D}(G) \oplus \mathbb{C}^n,$$

$$C_1 := \begin{pmatrix} I_\rho & E \\ P_\rho & I_m \end{pmatrix}, \quad A_{11} := \begin{pmatrix} I_\mu A & 0 \\ 0 & I_\alpha \end{pmatrix},$$

$$f_1 := \begin{pmatrix} I_\rho P_{0,S}\mathbf{f}_{\mathrm{f}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{b},\mathbf{e}_1} \end{pmatrix}, \quad f_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad z_1 := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad z_2 := \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix},$$

уравнение (3.9) примет вид

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_{11} z_1 + B_{12} z_2 = f_1 + f_2. \tag{3.10}$$

Рассмотрим систему из двух очевидных связей

$$\begin{cases} \rho_l g \dfrac{\partial \zeta_l}{\partial t} - \rho_l g \gamma_{n,l} \mathbf{u}_l = 0, \quad l = \overline{1,n}, \\ K \dfrac{dx}{dt} = K\dot{x}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Запишем систему (3.11) в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2 := L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^n$:

$$\begin{pmatrix} gI_\rho & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -gI_\rho\gamma_n & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое с учётом введённых выше обозначений и обозначений

$$C_2 := \begin{pmatrix} gI_\rho & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad B_{21} := \begin{pmatrix} -gI_\rho\gamma_n & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{21}) = \mathcal{D}(\gamma_n) \oplus \mathbb{C}^n$$

примет вид

$$C_2 \frac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0. \tag{3.12}$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача (2.1)–(2.10) приводится к дифференциально-операторным уравнениям (3.10), (3.12) с соответствующими начальными условиями. Итак, имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dz_1}{dt} + A_{11} z_1 + B_{12} z_2 = f_1 + f_2, \\ C_2 \dfrac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$z_1(0) = (P_{0,S}\mathbf{u}^0; x^1)^\tau, \quad z_2(0) = (\zeta^0; x^0)^\tau. \tag{3.14}$$

Систему дифференциальных уравнений (3.13) и начальные условия (3.14) можно коротко записать в виде задачи Коши для дифференциального операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$\mathcal{C}\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_0 z = \mathcal{F}, \quad z(0) = (z_1(0); z_2(0))^\tau, \tag{3.15}$$

где

$$z := (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H} = \big(\mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^n\big) \oplus \big(L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^n\big), \quad \mathcal{F} := (f_1 + f_2; 0)^\tau,$$

$$\mathcal{C} := \operatorname{diag}\big(C_1, C_2\big), \quad \mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Всюду далее будем считать, что $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$.

Определение 1. *Поля $\mathbf{u}_l$ и функции p_l, ζ_l, x_l $(l = \overline{1,n})$ называются сильным решением начально-краевой задачи (2.1)–(2.10), если функция $z = \big((\mathbf{u}; \dot{x})^\tau; (\zeta; x)^\tau\big)^\tau$ является решением задачи Коши (3.15).*

Функция z называется решением задачи Коши (3.15), если

$$z \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}), z(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$$

при $t \geqslant 0$ и $\mathcal{A}_0 z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено уравнение при всех $t \geqslant 0$ и начальное условие.

4. Свойства операторных коэффициентов уравнения (3.15). Теорема о разрешимости

Лемма 2. *Операторы $I_\rho, I_m, I_\mu, I_\alpha, K$ являются ограниченными, самосопряжёнными и положительно определёнными.*

Доказательство. Утверждение леммы для операторов $I_\rho, I_m, I_\mu, I_\alpha$ очевидно. Утверждение для оператора K доказывается с использованием представления [4, § 1, формула (1.7)]. □

Обозначим через $\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_l}$ сопряжённое к $H^{1/2}_{\Gamma_l}$ пространство (см. [1, гл. 1, теорема 5.1.12]). Известно (см. [1, гл. 1, раздел 5.1]), что

$$H^{1/2}_{\Gamma_l} \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma_l} \hookrightarrow\hookrightarrow \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_l}.$$

Лемма 3. *1) Справедливы следующие формулы:*

$$G_l \in \mathcal{L}\big(H^{1/2}_{\Gamma_l}; \mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)\big), \quad \gamma_{n,l} \in \mathcal{L}\big(\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l); \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_l}\big),$$

и оператор G_l является сопряжённым к оператору $\gamma_{n,l}$ относительно скалярного произведения в L_{2,Γ_l}.

Если рассматривать оператор G_l как отображение из L_{2,Γ_l} в $\mathbf{J}_{0,S_l}(\Omega_l)$, определённое на $\mathcal{D}(G_l) = H^{1/2}_{\Gamma_l}$, то он является замкнутым неограниченным оператором, а сопряжённый к нему оператор является соответствующим сужением оператора $\gamma_{n,l}$.

2) Справедливо включение $\gamma_{n,l} \in \mathcal{L}\big(\mathbf{J}^1_{0,S_l}(\Omega_l); H^{1/2}_{\Gamma_l}\big)$.

Доказательство первого утверждения леммы приводится в [12, гл. 10, п. 10.2.2-10.2.3]. Второе утверждение следует из теоремы Гальярдо [9, с. 290, теорема 1.II].

Следствием леммы 3 является следующее утверждение.

Лемма 4. *Операторы B_{21} и B_{12} являются взаимносопряжёнными,*

$$B_{12}C_2^{-1}B_{21}A_{11}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty\big(\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)\big), \quad B_{21}A_{11}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty\big(\mathbf{J}_{0,S}(\Omega); L_{2,\Gamma}\big).$$

Лемма 5. *Операторная матрица $\mathcal{C}$ является ограниченным положительно определённым оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Доказательство аналогичной леммы см. в [7, с. 897, лемма 3]. □

Перепишем задачу Коши (3.15) в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}_0 z + \mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}, \quad z(0) = (z_1(0); z_2(0))^\tau. \tag{4.1}$$

Лемма 6. *1) Оператор $\mathcal{A}_0$ допускает замкнутое расширение $\mathcal{A}$, представимое в одной из следующих эквивалентных форм:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (B_{21}A_{11}^{-1/2})A_{11}^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -(B_{21}A_{11}^{-1/2})(B_{21}A_{11}^{-1/2})^* \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1/2}(B_{21}A_{11}^{-1/2})^* \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\big(B_{21}A_{11}^{-1/2}\big)^* \\ B_{21}A_{11}^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H} : \ \ z_1 - A_{11}^{-1/2}\big(B_{21}A_{11}^{-1/2}\big)^* z_2 \in \mathcal{D}(A_{11}) \Big\}.$$

2) Оператор $-\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ генерирует голоморфную полугруппу в энергетическом пространстве оператора $\mathcal{C}$.

Доказательство. Факторизуем оператор $\mathcal{A}_0$ ([13, с. 747, лемма A.4.2])

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ (B_{21}A_{11}^{-1/2})A_{11}^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -(B_{21}A_{11}^{-1/2})A_{11}^{-1/2}B_{12} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1/2}(A_{11}^{-1/2}B_{12}) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

и расширим его до оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ (B_{21}A_{11}^{-1/2})A_{11}^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -(B_{21}A_{11}^{-1/2})(B_{21}A_{11}^{-1/2})^* \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1/2}(B_{21}A_{11}^{-1/2})^* \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

естественной областью определения которого является множество

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H} : \; z_1 - A_{11}^{-1/2} \big(B_{21} A_{11}^{-1/2}\big)^* z_2 \in \mathcal{D}(A_{11}) \Big\}.$$

Замкнутость оператора $\mathcal{A}$ следует из замкнутости среднего блока в (4.2) на своей естественной области определения и непрерывной обратимости крайних сомножителей. Несложно проверить, что для оператора $\mathcal{A}$ верна и вторая из указанных факторизаций с симметричными крайними множителями.

Докажем, что оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ секториален в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{C}$. Пусть $z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$, тогда $z_1 \in \mathcal{D}(A_{11}^{1/2})$ и из факторизации оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме получим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}} &= \left(\begin{pmatrix} I & -\big(B_{21} A_{11}^{-1/2}\big)^* \\ B_{21} A_{11}^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \\ &= \| A_{11}^{1/2} z_1 \|^2_{\mathcal{H}_1}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}}| &= |\mathrm{Im}\,[(z_2, B_{21} z_1)_{\mathcal{H}_2} - (B_{21} z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2}]\,| = \\ &= |2\mathrm{Im}(B_{21} z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2}| \leqslant 2\|B_{21} A_{11}^{-1/2}\| \cdot \|A_{11}^{1/2} z_1\|_{\mathcal{H}_1} \cdot \|z_2\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Из этих оценок при любом $\delta > 0$ получим, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}} - \delta |\mathrm{Im}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}}| = \\ &= \big(\|A_{11}^{1/2} z_1\|^2_{\mathcal{H}_1} - \delta \|B_{21} A_{11}^{-1/2}\| \cdot \|z_2\|_{\mathcal{H}_2} \big)^2 - \delta^2 \|B_{21} A_{11}^{-1/2}\|^2 \cdot \|z_2\|^2_{\mathcal{H}_2} \geqslant \\ &\geqslant -\delta^2 \|B_{21} A_{11}^{-1/2}\|^2 \cdot \|z\|^2_{\mathcal{H}} \geqslant -\delta^2 \|B_{21} A_{11}^{-1/2}\|^2 \cdot \|\mathcal{C}^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot \|z\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Отсюда $\mathrm{Re}([\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\delta)]z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}} - \delta |\mathrm{Im}([\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\delta)]z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}}| \geqslant 0$ при $\gamma(\delta) := -\delta^2 \|B_{21} A_{11}^{-1/2}\|^2 \cdot \|\mathcal{C}^{-1}\|^2$. Таким образом, для любого $z \in \mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A})$

$$\big|\mathrm{Im}([\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\delta)]z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}}\big| \leqslant \delta^{-1} \mathrm{Re}([\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} + \gamma(\delta)]z, z)_{\mathcal{H}_\mathcal{C}},$$

т. е. оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ секториальный с вершиной в точке $\gamma(\delta)$ и полураствором сектора $\mathrm{arctg}\,\delta^{-1}$.

Докажем максимальность оператора $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$. Для этого достаточно установить, что $\rho(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \varnothing$. Из факторизации оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме найдём, что

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda I &= \begin{pmatrix} C_1^{-1} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & C_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A_{11}^{-1/2} C_1 A_{11}^{-1/2} & -\big(B_{21} A_{11}^{-1/2}\big)^* \\ B_{21} A_{11}^{-1/2} & -\lambda C_2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{-1} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & C_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \lambda^{-1} \big(B_{21} A_{11}^{-1/2}\big)^* C_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\lambda^{-1} C_2^{-1} B_{21} A_{11}^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $L(\lambda) := I - \lambda A_{11}^{-1/2} C_1 A_{11}^{-1/2} - \lambda^{-1} \big(B_{21} A_{11}^{-1/2}\big)^* C_2^{-1} B_{21} A_{11}^{-1/2}$. Из положительной определённости оператора $L(\lambda)$ при $\lambda < 0$ следует, что $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Отсюда и из разложения (4.4) следует, что при $\lambda < 0$ существует $(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Таким образом, оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ является замкнутым максимальным секториальным оператором. По теореме [2, гл. 5, § 3, теорема 1.24] оператор $-\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось. □

Сформулируем и докажем теорему о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи (2.1)-(2.10) или, что эквивалентно (см. определение 1), теорему о разрешимости задачи Коши (4.1) (или (3.15)).

Теорема 1. *Пусть в задаче (4.1) $z_1^0 \in \mathcal{D}(A_{11})$, $z_2^0 \in \mathcal{D}(B_{12})$, а функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ удовлетворяют локальному условию Гёльдера. Тогда задача (4.1) (или (3.15)) имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши с замкнутым оператором

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}z + \mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}(t), \quad z(0) = (z_1(0); z_2(0))^\tau. \tag{4.5}$$

Пусть выполнены условия теоремы на начальные данные, тогда

$$z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}).$$

Из условия на функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ следует, что функция $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{F}(t)$ из (4.5) также локально гёльдерова.

По лемме 6 оператор уравнения из (4.5) порождает голоморфную полугруппу. Отсюда следует, что задача Коши (4.5) имеет единственное решение $z \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\mathcal{C}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ (см., например, [10, гл. 2, § 1, теорема 1.4]).

Уравнение (4.5) равносильно системе

$$\begin{cases} z_1' = -C_1^{-1} A_{11} \big(z_1 - A_{11}^{-1/2} (B_{21} A_{11}^{-1/2})^* z_2\big) + C_1^{-1}(f_1 + f_2), \\ z_2' = -C_2^{-1} B_{21} z_1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Наша цель — доказать, что z_1 принимает значения из $\mathcal{D}(A_{11})$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и $A_{11} z_1 \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_1)$. Отсюда, из леммы 4 и второго уравнения системы (4.6), записанного в виде $z_2' = -C_2^{-1} B_{21} A_{11}^{-1} (A_{11} z_1)$, будет следовать, что z_2' принимает значения из $\mathcal{D}(B_{12})$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и $B_{12} z_2' \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_2)$. Отсюда и из [10, гл. 1, § 1, лемма 1.5] будет следовать, что $B_{12} z_2 \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_2)$. Следовательно,

$$A_{11}\big(z_1 - A_{11}^{-1/2}(B_{21}A_{11}^{-1/2})^* z_2\big) = A_{11}\big(z_1 - A_{11}^{-1/2}(B_{21}A_{11}^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(B_{12})} z_2\big) = \\ = A_{11}\big(z_1 - A_{11}^{-1} B_{12} z_2\big) = A_{11} z_1 - B_{12} z_2,$$

и в первом уравнении системы (4.6) можно раскрыть скобки. Это будет означать, что функция z — решение задачи Коши (4.1) (или (3.15)) в смысле определения 1.

Проинтегрируем второе уравнение системы (4.6) по s в пределах от 0 до t, получим

$$z_2(t) = -z_2(0) - \int_0^t C_2^{-1} B_{21} z_1(s)\, ds. \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в первое уравнение системы, будем иметь

$$\begin{aligned} z_1'(s) = C_1^{-1} A_{11} \biggl\{ z_1(t) - A_{11}^{-1/2} \bigl(B_{21} A_{11}^{-1/2}\bigr)^* \biggl(z_2(0) + \\ + \int_0^t C_2^{-1} B_{21} z_1(s)\, ds \biggr) \biggr\} + C_1^{-1}(f_1 + f_2), \end{aligned} \tag{4.8}$$

откуда получаем, что выражение в фигурных скобках непрерывно со значениями в $\mathcal{D}(A_{11})$. Учитывая, что $z_2(0) \in \mathcal{D}(B_{12})$, преобразуем выражение в фигурных скобках из (4.8), имеем

$$\begin{aligned} z_1(t) - A_{11}^{-1/2} \bigl(B_{21} A_{11}^{-1/2}\bigr)^* \biggl\{ z_2(0) + \int_0^t C_2^{-1} B_{21} z_1(s)\, ds \biggr\} = z_1(t) - \\ - A_{11}^{-1/2} \bigl(B_{21} A_{11}^{-1/2}\bigr)^* \big|_{\mathcal{D}(B_{12})} z_2(0) - A_{11}^{-1/2} \bigl(B_{21} A_{11}^{-1/2}\bigr)^* \int_0^t C_2^{-1} B_{21} z_1(s)\, ds = \\ = z_1(t) + A_{11}^{-1} B_{12} z_2(0) - \int_0^t A_{11}^{-1/2} \bigl(B_{21} A_{11}^{-1/2}\bigr)^* C_2^{-1} B_{21} z_1(s)\, ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$z_1(t) - \int_0^t A_{11}^{-1/2} \bigl(B_{21} A_{11}^{-1/2}\bigr)^* C_2^{-1} B_{21} z_1(s)\, ds =: g(t), \tag{4.9}$$

$$g \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A_{11})).$$

Определим на $\mathcal{D}(A_{11})$ норму $\|z_1\|_{E_{A_{11}}} := \|A_{11} z_1\|_{\mathcal{H}_1}$ и превратим его таким образом в банахово пространство $E_{A_{11}}$. Будем рассматривать уравнение (4.9) как уравнение Вольтерра второго рода в $E_{A_{11}}$. Покажем, что ядро $K(t,s) := A_{11}^{-1/2} \bigl(B_{21} A_{11}^{-1/2}\bigr)^* C_2^{-1} B_{21}$ интегрального оператора в (4.9) есть сильно непрерывная оператор-функция. Поскольку ядро интегрального оператора есть постоянный оператор, достаточно установить, что он ограничен в $E_{A_{11}}$. Действительно, для любого

$z_1 \in E_{A_{11}} = \mathcal{D}(A_{11})$ с учётом леммы 4 имеем

$$\|A_{11}^{-1/2}\big(B_{21}A_{11}^{-1/2}\big)^* C_2^{-1} B_{21} z_1\|_{E_{A_{11}}} = \|A_{11}^{1/2}\big(B_{21}A_{11}^{-1/2}\big)^* C_2^{-1} B_{21} z_1\|_{\mathcal{H}_1} =$$
$$= \|A_{11}^{1/2}\big(B_{21}A_{11}^{-1/2}\big)^*\big|_{\mathcal{D}(B_{12})} C_2^{-1}\big(B_{21}A_{11}^{-1/2}\big) A_{11}^{-1/2}(A_{11}z_1)\|_{\mathcal{H}_1} =$$
$$= \|B_{12}C_2^{-1}B_{21}A_{11}^{-1}(A_{11}z_1)\|_{\mathcal{H}_1} \leqslant \|B_{12}C_2^{-1}B_{21}A_{11}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \cdot \|A_{11}z_1\|_{\mathcal{H}_1} =$$
$$= \|B_{12}C_2^{-1}B_{21}A_{11}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \cdot \|z_1\|_{E_{A_{11}}}.$$

Таким образом, $A_{11}^{-1/2}\big(B_{21}A_{11}^{-1/2}\big)^* C_2^{-1} B_{21} \in \mathcal{L}(E_{A_{11}})$ и уравнение (4.9) имеет единственное решение $z_1 \in C(\mathbb{R}_+; E_{A_{11}} = \mathcal{D}(A_{11}))$. Отсюда следует, что система (4.6), эквивалентная уравнению из (4.1), имеет единственное решение (в смысле определения 1). □

Заключение

В работе исследована линеаризованная двумерная задача о малых движениях системы твёрдых тел, частично заполненных вязкими жидкостями, под действием упругих и демпфирующих сил. С помощью метода ортогонального проектирования и ряда вспомогательных краевых задач осуществлён переход от исходной начально-краевой задачи к задаче Коши для дифференциального операторного уравнения первого порядка в некоторой сумме гильбертовых пространств. С учётом изученных свойств операторных матриц, являющихся коэффициентами дифференциального уравнения, доказана теорема об однозначной разрешимости полученной задачи Коши на положительной полуоси. На основе доказанной теоремы найдены достаточные условия существования сильного по времени решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию гидросистемы.

В следующей работе предполагается исследовать задачу о нормальных колебаниях изучаемой системы. Будет исследована структура спектра операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{C}$ и система его корневых элементов.

Список источников

1. Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М. : МЦНМО, 2013. 379 с.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972. 740 с.
3. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. М. : Наука, 1989. 416 с.
4. Марченко В. А. Введение в теорию обратных задач спектрального анализа. Харьков : АКТА, 2005. 143 с.

5. Цветков Д. О. Малые движения системы идеальных стратифицированных жидкостей, полностью покрытой крошеным льдом // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2018. Т. 26. С. 105–120. http://mathizv.isu.ru/en/article?id=1285
6. Цветков Д.О. Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике вязкой стратифицированной жидкости // Известия вузов. Математика. 2020. № 8. С. 59–73. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-59-73
7. Forduk K. V., Zakora D. A. Problem on Small Motions of a System of Bodies Filled with Ideal Fluids under the Action of an Elastic Damping Device // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. N 5. P. 889–900. https://doi.org/10.1134/S199508022105005X
8. Forduk K. V., Zakora D. A. A Problem on Normal Oscillations of a System of Bodies Partially Filled with Ideal Fluids Under the Action of an Elastic Damping Device // Сибирские электронные математические известия. 2021. Vol. 18, N. 2, P. 997–1014. https://doi.org/10.1134/S199508022105005X
9. Gagliardo E. Caratterizazioni Delle Trace Sullo Frontiera Relative ad Alcune Classi de Funzioni in n Variabili // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. 1957. Vol. 27. P. 284–305.
10. Goldstein J. A. *Semigroups of Linear Operators and Applications*. New York ; Oxford : Oxford University Press, 1985. 254 p.
11. Kopachevsky N. D., Krein S. G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1. Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid*. Basel ; Boston ; Berlin : Birkhëauser Basel Publ., 2001. 406 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8342-9
12. Kopachevsky N. D., Krein S. G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluid*. Basel ; Boston ; Berlin : Birkhëauser Basel Publ., 2003. 444 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8063-3
13. Staffans O. J. *Well-Posed Linear Systems*. New York : Cambridge University Press, 2005. 776 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543197

References

1. Agranovich M.S. *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains]. Moscow, MCCME Publ., 2013, 379 p. (in Russian)
2. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators]. Moscow, Mir Publ., 1972. 740 p. (in Russian)
3. Kopachevsky N.D., Krein S.G., Ngo Zuy Kan. *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 416 p. (in Russian)
4. Marchenko V.A. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach spektral'nogo analiza* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Analysis Problems]. Harkov, AKTA Publ., 2005, 143 p. (in Russian)
5. Tsvetkov D.O. Small Movements of a System of Ideal Stratified Fluids Completely Covered with Crumbled Ice. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2018, vol. 26, pp. 105–120. http://mathizv.isu.ru/en/article?id=1285
6. Tsvetkov D.O. On an Initial-Boundary Value Problem Which Arises in the Dynamics of a Viscous Stratified Fluid. *Russ Math. (Iz. VUZ)*, 2020, vol. 64, no. 8, pp. 50–63. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-59-73

7. Forduk K.V., Zakora D.A. Problem on Small Motions of a System of Bodies Filled with Ideal Fluids under the Action of an Elastic Damping Device. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 5, pp. 889–900. https://doi.org/10.1134/S199508022105005X
8. Forduk K.V., Zakora D.A. A Problem on Normal Oscillations of a System of Bodies Partially Filled with Ideal Fluids Under the Action of an Elastic Damping Device. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 997–1014. https://doi.org/10.1134/S199508022105005X
9. Gagliardo E. Caratterizazioni Delle Trace Sullo Frontiera Relative ad Alcune Classi de Funzioni in n Variabili. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 1957, vol. 27, pp. 284–305.
10. Goldstein J.A. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* New York, Oxford, Oxford University Press Publ., 1985, 254 p.
11. Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics: Volume 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid.* Basel, Boston, Berlin, Birkhëauser Basel Publ., 2001, 406 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8342-9
12. Kopachevsky N.D., Krein S.G. *Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluid.* Basel, Boston, Berlin, Birkhëauser Basel Publ., 2003, 444 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8063-3
13. Staffans O.J. *Well-Posed Linear Systems.* New York, Cambridge University Press Publ., 2005, 776 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543197

Об авторах

Фордук Карина Викторовна, ассистент, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Российская Федерация, 295007, Симферополь, forduk_kv@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7596-3870

About the authors

Karina V. Forduk, Assistant, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007, Russian Federation, forduk_kv@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7596-3870

Поступила в редакцию / Received 06.07.2022
Поступила после рецензирования / Revised 31.10.2022
Принята к публикации / Accepted 02.11.2022