Серия «Математика»
2022. Т. 39. С. 34—50

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.977.5
MSC 49M99, 49K99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.34

Дискретно-непрерывные системы с параметрами: метод улучшения управления и параметров

И. В. Расина[1,2], **И. С. Гусева**[3✉]

[1] Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский, Российская Федерация
[2] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Москва, Российская Федерация
[3] Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Улан-Удэ,
Российская Федерация
✉ gulina.ig@gmail.com

Аннотация. В работе представлен один из классов управляемых систем, способных к изменению своей структуры в течение времени. Общее название подобных систем — гибридные, в статье же рассматриваются так называемые дискретно-непрерывные системы, содержащие параметры. По своей сути это двухуровневая иерархическая модель. Верхний уровень модели представлен дискретной системой, а на нижнем в порядке очереди действуют непрерывные управляемые системы. Все указанные системы содержат параметры и связаны общей целью, роль которой выполняет функционал.

Гибридные системы в последние десятилетия — предмет активного исследования как самих систем, так и широкого спектра задач для них, разнообразными методами, отражающими взгляды научных школ и направлений. При этом в исследованиях представлен самый разнообразный математический аппарат. В данном случае используется обобщение аппарата достаточных условий оптимальности Кротова, преимущество которого состоит в возможности сохранения классических предположений о свойствах объектов, фигурирующих в постановке задачи оптимального управления.

Для рассматриваемой в работе задачи оптимального управления для дискретно-непрерывных систем с параметрами предложен аналог достаточных условий оптимальности Кротова. Сформулированы две теоремы. На основе последних построен простой в реализации алгоритм улучшения управления и параметров. Приведена теорема о его сходимости по функционалу. Этот алгоритм содержит для сопряженных переменных векторную систему линейных уравнений, всегда имеющую решение, что гарантирует и решение исходной задачи. Приводится апробация алгоритма на иллюстративном примере, представлены расчеты и графики.

Ключевые слова: дискретно-непрерывные системы с параметрами, промежуточные критерии, оптимальное управление

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21–11–00202).

Ссылка для цитирования: Расина И. В., Гусева И. С. Дискретно-непрерывные системы с параметрами: метод улучшения управления и параметров // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 39. С. 34–50. https://doi.org/10.26516/1997-7670. 2022.39.34

Research article

Discrete-Continuous Systems with Parameters: Method for Improving Control and Parameters

Irina V. Rasina[1,2], **Irina S. Guseva**[3✉]

[1] Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Russian Federation
[2] Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, Moscow, Russian Federation
[3] Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation
✉ gulina.ig@gmail.com

Abstract. The paper presents one of the classes of controlled systems capable of changing their structure over time. The general name for such systems is hybrid. In the article it is discusses the so-called discrete-continuous systems containing parameters. It is a two-level hierarchical model. The upper level of this model is represented by a discrete system. At the lower level continuous controlled systems operate in turn. All these systems contain parameters and are linked by the functional.
In recent decades hybrid systems have been the subject of active research both of the systems themselves and of a wide range of problems for them, using various methods that reflect the views of scientific schools and directions. At the same time the most diverse mathematical apparatus is presented in the research. In this case a generalization of Krotov's sufficient optimality conditions is used. Their advantage is the possibility of preserving the classical assumptions about the properties of objects that appear in the formulation of the optimal control problem.
For the optimal control problem considered in this paper for discrete-continuous systems with parameters an analogue of Krotov's sufficient optimality conditions is proposed. Two theorems are formulated. On their base an easy-to-implement algorithm for improving control and parameters is built. A theorem on its functional convergence is given. This algorithm contains a vector system of linear equations for conjugate variables, which always has a solution. It is guarantees a solution to the original problem. The algorithm is tested on an illustrative example. Calculations and graphs are presented.

Keywords: discrete-continuous systems with parameters, intermediate criteria, optimal control

Acknowledgements: The research was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 21–11–00202).

For citation: Rasina I. V., Guseva I. S. Discrete-Continuous Systems with Parameters: Method for Improving Control and Parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University.*

Series Mathematics, 2022, vol. 39, pp. 34–50. (in Russ.) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.34

Нашим учителям,
профессорам В. Ф. Кротову и В. И. Гурману

1. Введение

Управляемые системы, особенностью которых является способность изменять структуру своего описания с течением времени, имеют самый разнообразный характер, широко представлены как на практике, так и в литературе. Укажем лишь некоторые наиболее характерные из них [2; 3; 5; 11; 16; 17; 19], объединенные общим термином гибридные системы. Один из подходов, позволяющих оставаться в рамках классических для задач оптимального управления предположениях о свойствах переменных состояния и управления, отталкивается от абстрактной модели многошаговых управляемых процессов, предложенной Кротовым [9]. Модификация этой модели и достаточных условий оптимальности того же автора позволила провести декомпозицию неоднородной системы на однородные подсистемы и построить двухуровневую иерархическую модель [5], получившую название дискретно-непрерывной системы (ДНС). Развитие указанного аппарата дало возможность исследовать неоднородные дискретные системы [13] и привело к построению аналогов алгоритмов оптимизации [5; 7; 14; 15; 18], разработанных для однородных систем, под которыми понимаются системы со стабильной структурой, исследуемые в рамках традиционных представлений теории оптимального управления.

Заметим, что при таком подходе все однородные подсистемы связаны общей целью, представленной в модели функционалом. Это не исключает того факта, что каждая однородная подсистема может при этом иметь и свою собственную цель. Обобщение модели на этот случай дано в [12].

В данной работе рассматриваются дискретно-непрерывные системы с параметрами, которые широко распространены на практике. К этому же классу систем приводят задачи идентификации моделей по серии экспериментов, когда требуется определить коэффициенты построенной модели, которые можно рассматривать как искомые параметры. Для рассматриваемой модели ДНС с параметрами предложен и доказан аналог достаточных условий оптимальности Кротова. На основе последних построен простой в реализации алгоритм улучшения управления и параметров, содержащий для сопряженных переменных векторную систему линейных уравнений. Такая система всегда имеет решение, что гарантирует и решение исходной задачи. Рассмотрен иллюстративный пример. Аналогичный подход к традиционным управляемым процессам с параметрами представлен в [1].

2. Модель дискретно-непрерывной системы с параметрами

Будем рассматривать систему, состоящую из двух уровней. Ее верхний уровень представлен абстрактной дискретной управляемой системой:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k), \epsilon), \quad k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I + 1, ..., k_F\}, \tag{2.1}$$

$$u \in \mathbf{U}(k, x, \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbf{E}.$$

Заметим, что $u = u(k, x, \epsilon)$. Периодически для краткости будем указывать $u = u(k)$. На некотором подмножестве $\mathbf{K}'$ множества $\mathbf{K}$, являющегося подмножеством натурального ряда и областью определения указанной дискретной системы, действует непрерывная система

$$\dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = f^c\left(z, t, \epsilon, x^c, u^c, \epsilon^c\right), \quad t \in \mathbf{T}\left(z\right) = [t_I(z), t_F(z)]. \tag{2.2}$$

В этих системах k — номер шага (этапа), не обязательно физическое время, x, x^c и u, u^c — соответственно переменные состояния и управления, ϵ, ϵ^c — параметры, $x(k) \in \mathbf{X}(k, \epsilon)$ — заданное при каждом k и ϵ множество, $\mathbf{U}(k, x, \epsilon)$ — заданное при каждом k, x и ϵ множество, $\mathbf{E}$ — заданное множество, f — оператор, отображающий прямое произведение множеств $\mathbf{K} \times \mathbf{U} \times \mathbf{X} \times \mathbf{E}$ на множество $\mathbf{X}$, f^c — оператор, отображающий прямое произведение множеств $\mathbf{T} \times \mathbf{U}^c \times \mathbf{X}^c \times \mathbf{E}^c$ при каждых k и ϵ на множество $\mathbf{X}^c$, k_I, k_F — начальный и конечный шаги соответственно, $z = (k, x, u^d)$ — характеристика воздействия системы верхнего уровня на нижний, играющая на нижнем роль параметров, в ней $u^d = u^d(k)$ — управляющее воздействие верхнего уровня на нижний на каждом этапе,

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t, \epsilon, \epsilon^c) \subset \mathbb{R}^{n(k)},$$

$$u^c \in \mathbf{U}^c\left(z, t, x^c, \epsilon^c\right) \subset \mathbb{R}^{p(k)}, \quad \epsilon^c \in \mathbf{E}^c(k) \subset \mathbb{R}^{r(k)},$$

где $\mathbf{X}^c(z, t, \epsilon, \epsilon^c)$, $\mathbf{U}^c\left(z, t, x^c, \epsilon^c\right)$, $\mathbf{E}^c(k)$ — заданные при указанных аргументах множества. Подчеркнем, что на каждом шаге k набор параметров может изменяться. Система (2.1) имеет такую же структуру, как и система, предложенная Кротовым в [9], и все указанные в ней объекты — произвольной природы (возможно различной) для различных k по аналогии с [9].

Кроме того, для системы (2.2) на отрезке $[t_I(z), t_F(z)]$ задана промежуточная цель в форме функционала:

$$I^k = \int\limits_{\mathbf{T}(z)} f^k(t, \epsilon, \epsilon^c, x^c(k,t), u^c(k,t))dt \to \inf.$$

На множестве $\mathbf{K}'$ оператор правой части (2.1) в силу взаимодействия с системой (2.2) меняет свою структуру и представлен в виде $f\left(k,x,u\right)=\theta\left(z,\gamma^c,\epsilon^c\right)$, где

$$\gamma^c=(t_I,\ x_I^c,\ t_F,\ x_F^c)\in\mathbf{\Gamma}^c(z,\epsilon,\epsilon^c),$$

$$\mathbf{\Gamma}^c(z,\epsilon,\epsilon^c)=\{\gamma^c\colon t_I=\tau(z),\ x_I^c=\xi(z),\ (t_F,x_F^c)\in\mathbf{\Gamma}_F^c(z,\epsilon,\epsilon^c)\}.$$

Здесь $t_I=\tau(z),\ x_I^c=\xi(z)$ — заданные функции z, $\mathbf{\Gamma}^c(z,\epsilon,\epsilon^c)$, $\mathbf{\Gamma}_F^c(z,\epsilon,\epsilon^c)$ — заданные множества. Нетрудно видеть, что система (2.1) представляет верхний уровень рассматриваемой математической модели, тогда как система (2.2) — система нижнего уровня.

Решением этой двухуровневой системы считается набор

$$m=\left(x(k,\epsilon),u(k,\epsilon),\epsilon\right),$$

называемый *дискретно-непрерывным процессом с параметрами*, где при $k\in\mathbf{K}'$:

$$u(k,\epsilon)=\Big(u^d(k,\epsilon),m^c(k,\epsilon,\epsilon^c)\Big),\quad m^c(k,\epsilon,\epsilon^c)\in\mathbf{D}^c\left(z,\epsilon,\epsilon^c\right).$$

Здесь $m^c(k,\epsilon,\epsilon^c)$ — непрерывный процесс $(x^c(k,t,\epsilon,\epsilon^c),u^c(k,t,\epsilon,\epsilon^c),$ $\epsilon^c(k))$, $t\in\mathbf{T}(z)$, а $\mathbf{D}^c(z,\epsilon,\epsilon^c)$ — множество допустимых процессов m^c, удовлетворяющих указанной дифференциальной системе (2.2) при кусочно-непрерывных $u^c(k,t,\epsilon,\epsilon^c)$ и кусочно-гладких $x^c(k,t,\epsilon,\epsilon^c)$ (на каждом дискретном шаге k). Совокупность элементов m, удовлетворяющих всем вышеперечисленным условиям, обозначим через $\mathbf{D}$ и назовем множеством допустимых дискретно-непрерывных процессов с параметрами.

Для модели (2.1), (2.2) рассматривается задача о поиске минимума на $\mathbf{D}$ функционала

$$I=\Phi\left(x\left(k_F,\epsilon\right)\right)\tag{2.3}$$

при фиксированных k_I, k_F и $x\left(k_I\right)$. Очевидно, что на нижнем уровне модели (2.1), (2.2) представлены однородные процессы на отдельных этапах, а верхний процесс выполняет связующую для них роль и управляет функционированием всей системы в целом. Под однородными здесь и далее понимаются системы с неизменной структурой, исследуемые в рамках классических представлений теории оптимального управления. Взаимодействие верхнего уровня с каждой подсистемой нижнего осуществляется через границу этой подсистемы и границу соответствующего непрерывного процесса γ^c.

3. Основные конструкции и теоремы

Для получения достаточных условий улучшения и оптимальности управления с помощью функционалов $\varphi\,(k,x,\epsilon)$, $\varphi^c\,(z,t,\epsilon,x^c,\epsilon^c)$ построим ряд конструкций. Одна из них, обобщенный лагранжиан — аналог лагранжианов Кротова для дискретных и непрерывных систем [9; 10]:

$$L = G\,(x\,(k_F,\epsilon)) - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R(k,x(k),u(k),\epsilon)+$$

$$+\sum_{\mathbf{K}'}\Big(G^c(z,\gamma^c(z,\epsilon)) - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c(k,z,t,x^c(k,t),u^c(k,t),\epsilon,\epsilon^c)dt\Big),$$

$$G\,(x,\epsilon) = \Phi\,(x,\epsilon) + \varphi\,(k_F,x,\epsilon) - \varphi\,(k_I,x\,(k_I)\,,\epsilon)\,,$$

$$R\,(k,x,u,\epsilon) = \varphi\,(k+1,f\,(k,x,u,\epsilon)) - \varphi\,(k,x,\epsilon)\,,$$

$$G^c\,(z,\gamma^c,\epsilon^c) = -\varphi\,(k+1,\epsilon,\theta\,(z,\gamma^c,\epsilon^c)) + \varphi\,(k,x,\epsilon) +$$

$$+\varphi^c\,(z,t_F,x^c_F,\epsilon,\epsilon^c) - \varphi^c\,(z,t_I,x^c_I,\epsilon,\epsilon^c)\,,$$

$$R^c\,(z,t,x^c,u^c,\epsilon,\epsilon^c) = \varphi^{c\mathrm{T}}_{x^c} f^c\,(z,t,x^c,u^c,\epsilon,\epsilon^c) -$$

$$-f^k\,(t,z,\epsilon,\epsilon^c,x^c(k,t),u^c(k,t)) + \varphi^c_t\,(z,t,x^c,\epsilon,\epsilon^c)\,,$$

$$\mu^c\,(z,t,\epsilon,\epsilon^c) = \sup\,\{R^c\,(z,t,x^c,u^c,\epsilon,\epsilon^c):\; x^c\in\mathbf{X}^c(z,t,\epsilon,\epsilon^c),\; u^c\in\mathbf{U}^c\,(z,t,x^c,\epsilon^c)\},$$

$$l^c\,(z,\epsilon^c) = \inf\,\{G^c\,(z,\gamma^c,\epsilon^c):\; \gamma^c\in\mathbf{\Gamma}(z,\epsilon,\epsilon^c),\; x^c\in\mathbf{X}^c(z,t_F,\epsilon,\epsilon^c)\},$$

$$\mu\,(k,\epsilon,\epsilon^c) = \begin{cases} \sup\{R\,(k,x,u) : x\in\mathbf{X}(k,\epsilon),\; u\in\mathbf{U}\,(k,x)\}, & t\in\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}',\\ -\inf\{l^c\,(z,\epsilon^c):\; x\in\mathbf{X}\,(k,\epsilon)\,,\; u^d\in\mathbf{U}^d\,(k,x,\epsilon)\}, & k\in\mathbf{K}',\end{cases}$$

$$l(\epsilon) = \inf\{G\,(x,\epsilon):\; x\in\mathbf{X}(k_F,\epsilon)\},$$

$$\mu^*(k,\epsilon) = \inf\,\{(\mu\,(k,\epsilon,\epsilon^c) - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} \mu^c\,(z,t,\epsilon,\epsilon^c)\,dt):\; \epsilon^c\in\mathbf{E}^c\},$$

$$l^* = \inf\{\sum_{\mathbf{K}}\mu^*(k,\epsilon):\; \epsilon\in\mathbf{E}\}.$$

Здесь $\varphi^c_{x^c}$ — градиент φ^c в пространстве (x^c), T — знак транспонирования.

Справедливы следующие теоремы — аналоги теорем для ДНС без параметров [5; 12; 14].

Теорема 1. *Для любого элемента $m \in \mathbf{D}$ и любых φ, φ^c имеет место оценка*

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \leq \Delta = I(m) - l^*.$$

Пусть имеются два процесса $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{E}$ и функционалы φ и φ^c, такие, что $L\left(m^{\mathrm{II}}\right) < L\left(m^{\mathrm{I}}\right) = I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{\mathrm{II}}) < I(m^{\mathrm{I}})$.

Теорема 2. *Пусть заданы: последовательность дискретно-непрерывных процессов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы φ, φ^c, для которых справедливы следующие условия:*

1) $\mu^c(z,t,\epsilon,\epsilon^c)$ — кусочно-непрерывна при каждом z;

2) $R(k, x_s(k), u_s(k), \epsilon) \to \mu(k,\epsilon)$, $k \in \mathbf{K}$;

3) $\int_{\mathbf{T}(z_s)} \left(R^c(z_s, t, x_s^c(t), u_s^c, \epsilon_s, \epsilon_s^c) - \mu^c(z_s, t, \epsilon_s, \epsilon_s^c)\right) dt \to 0$, $k \in \mathbf{K}'$, $t \in \mathbf{T}(z_s)$;

4) $G^c(z_s, \gamma_s^c, \epsilon_s^c) - l^c(z_s, \epsilon^c) \to 0$, $k \in \mathbf{K}'$;

5) $G(x_s(t_F), \epsilon) \to l(\epsilon)$;

6) $\mu(k, \epsilon_s) + \int_{\mathbf{T}(z_s)} \mu^c(z, t, \epsilon_s, \epsilon_s^c)\, dt \to \mu^*(k,\epsilon)$;

7) $\sum\limits_{\mathbf{K}} \mu^*(k, \epsilon_s) \to l^*$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ — минимизирующая для I на $\mathbf{D}$.

Доказательство обоих утверждений аналогично доказательству теорем для ДНС без параметров [5; 12; 14].

4. Метод улучшения управления и параметров

Рассмотрим наиболее простой в реализации метод решения поставленной оптимизационной задачи. Предположим, что $\mathbf{X}(k,\epsilon) = \mathbb{R}^{m(k)}$, $\mathbf{X}^c(z,t,\epsilon^c) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $\mathbf{E} = \mathbb{R}^j$, $\mathbf{E}^c(k) = \mathbb{R}^{b(k)}$, $x_I^c = \xi(z,\epsilon^c)$, k_I, x_I, k_F, $t_I(k)$, $t_F(k)$ — заданы, $x_F^c \in \mathbb{R}^{n(k)}$ и системы нижнего уровня не зависят от управления u^d. Суть задачи улучшения [6] состоит в построении оператора $\theta(m)$, $\theta : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, такого что $I(\theta(m)) \leq I(m)$. При наличии исходного элемента такой оператор генерирует улучшающую, в частности, минимизирующую последовательность $\{m_s\} : m_{s+1} = \theta(m_s)$.

Возьмем за основу при выводе метода принципы расширения [4] и локализации [8]. Последний указывает, что задачу улучшения некоторого элемента m^{I} можно заменить задачей о минимуме вспомогательного функционала

$$I_\alpha(m) = \alpha I(m) + \frac{1}{2}(1-\alpha) J(m^{\mathrm{I}}, m), \quad \alpha \in [0,1]. \tag{4.1}$$

В последнем выражении $J(m^{\mathrm{I}}, m)$ — функционал типа метрики. Изменяя α от 0 к 1, можно достичь необходимой степени близости m_α к

m^{I} и рассматривать разнообразные аппроксимации конструкций достаточных условий в окрестности m^{I}. В результате получается алгоритм с параметром α, позволяющим использовать его в роли регулятора и настраивать при конкретном применении. Но основная задача этого параметра — обеспечить наибольшее значение разности $I(m^{\mathrm{I}}) - I(m_\alpha)$, тогда соответствующий элемент m_α принимается за m^{II}.

Вспомогательный функционал зададим в виде:

$$I_\alpha = \alpha I + \frac{1}{2}(1-\alpha)\Big(\sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F} |\Delta u(k)|^2 + \sum_{\mathbf{K}'} \int\limits_{\mathbf{T}(z)} |\Delta u^c(k,t)|^2 dt\Big).$$

В представленном выше выражении $\alpha \in [0,1]$, $\Delta u = u - u^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^c = u^c - u^{c\mathrm{I}}$.

На основе принципа расширения далее по заданному элементу $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ требуется найти элемент $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$, на котором $I_\alpha(m^{\mathrm{II}}) = L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) < I_\alpha(m^{\mathrm{I}}) = L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, или $L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) - L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right) < 0$. Рассмотрим приращение функционала $L_\alpha(m)$, имеем:

$$\Delta L_\alpha \approx G_{x_F}^{\mathrm{T}} \Delta x_F + G_\epsilon^{\mathrm{T}} \Delta_\epsilon - \sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F} \Big(R_x^{\mathrm{T}}\Delta x + R_u^{\mathrm{T}}\Delta u + \frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu}\Delta u +$$

$$+ R_\epsilon^{\mathrm{T}}\Delta\epsilon\Big) + \sum_{\mathbf{K}'\backslash k_F} \Big(G_{x_F^c}^{c\mathrm{T}}\Delta x_F^c + G_x^{c\mathrm{T}}\Delta x + G_\epsilon^{c\mathrm{T}}\Delta\epsilon + G_{\epsilon^c}^{c\mathrm{T}}\Delta\epsilon^c -$$

$$- \int\limits_{\mathbf{T}(z)} \Big(R_{x^c}^{c\mathrm{T}}\Delta x^c + R_x^{c\mathrm{T}}\Delta x + R_{u^c}^{c\mathrm{T}}\Delta u^c + R_\epsilon^{c\mathrm{T}}\Delta\epsilon +$$

$$+ R_{\epsilon^c}^{c\mathrm{T}}\Delta\epsilon^c + \frac{1}{2}\Delta u^{c\mathrm{T}} R_{u^c u^c}^c \Delta u^c\Big) dt\Big),$$

где $\Delta u = u - u^{\mathrm{I}}$, $\Delta x = x - x^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^c = u^c - u^{c\mathrm{I}}$, $\Delta x^c = x^c - x^{c\mathrm{I}}$, $\Delta x_F^c = x_F^c - x_F^{c\mathrm{I}}$, $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon^{\mathrm{I}}$, $\Delta\epsilon^c = \epsilon^c - \epsilon^{c\mathrm{I}}$, $x_F = x(k_F)$. Здесь функции R, G, R^c, G^c определены для функционала I_α, а их первые и вторые производные подсчитаны при $u = u^{\mathrm{I}}$, $x = x^{\mathrm{I}}$, $x^c = x^{c\mathrm{I}}$, $\epsilon = \epsilon^{\mathrm{I}}$, $u^c = u^{c\mathrm{I}}$, $\epsilon^c = \epsilon^{c\mathrm{I}}$.

Предположим, что матрицы R_{uu} и $R_{u^c u^c}^c$ отрицательно определены (это достижимо за счет выбора параметра α [8]). Найдем $\Delta u, \Delta u^c$, доставляющие максимум выражениям, стоящим под знаками сумм $\sum\limits_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F}$ и $\sum\limits_{\mathbf{K}'\backslash k_F}$ соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\Delta u = -(R_{uu})^{-1} R_u, \quad \Delta u^c = -(R_{u^c u^c}^c)^{-1} R_{u^c}^c.$$

Зададим функции $\varphi(k,x,\epsilon)$ и $\varphi^c\left(z,t,x,\epsilon,\epsilon^c\right)$ явно не зависящими от параметров:

$$\varphi = \psi^{\mathrm{T}}(k)\, x(k), \quad \varphi^c = \lambda^{\mathrm{T}}(k,t)\, x(k) + \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)\, x^c(k,t),$$

где ψ, ψ^c, λ — вектор-функции. Для выполнения неравенства $\Delta L < 0$ потребуем далее, чтобы остальные слагаемые под знаками выше указанных сумм не зависели от Δx, Δx^c_F, Δx^c. Это требование будет достигнуто, если:

$$G_{x_F} = 0,\ R_x = 0,\ G^d_{x^c_F} = 0,\ G^c_x = 0,\ R^c_{x^c} = 0,\ R^c_x = 0.$$

Добавим к указанным равенствам условие стыковки уровней:

$$\frac{d}{dx}(\varphi(k+1, \theta(k, x, x^c_F, x^c_I)) - \varphi^c(k, x, t_F, x^c_F)) = 0. \qquad (4.2)$$

Расшифровка выше приведенных равенств с учетом условия стыковки уровней приводит к задаче Коши для ДНС относительно ψ, ψ^c, λ с начальными условиями на правом конце:

$$\psi\,(k_F) = -\alpha\Phi_{x(k_F)}, \quad \psi\,(k) = H_x(\psi(k+1)), \qquad (4.3)$$

$$H(k, \psi, x, u, \epsilon) = \psi^{\mathrm{T}}(k+1) f(k, x, u, \epsilon), \quad k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$\psi\,(k) = H_x + (H_{x^c}\xi_x)^T + \lambda(k, t_F) - \lambda(k, t_I) + \xi^T_x \psi^c(t_I), \quad k \in \mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$H(k, \psi, \epsilon, x^c_I, x^c_F) = \psi^{\mathrm{T}}(k+1)\theta(z, x^c_I, x^c_F), \quad k \in \mathbf{K}',$$

$$\dot\lambda = -H^c_x, \quad \lambda\,(k, t_F) = H_x + \xi^T_x H_{x^c_I}, \quad \dot\psi^c = -H^c_{x^c}, \quad \psi^c(k, t_F) = H_{x^c_F},$$

$$H^c(z, t, \psi^c, x^c, u^c, \epsilon, \epsilon^c) = \psi^{c\mathrm{T}} f^c(z, t, x^c, u^c, \epsilon, \epsilon^c(k)) -$$

$$- f^k(t, x^c(k, t), u^c(k, t), \epsilon, \epsilon^c(k)), \quad k \in \mathbf{K}'.$$

Здесь для краткости в правых частях указаны лишь аргументы $\psi(k+1)$ и $\psi^c(k, t)$, необходимые для понимания соотношений. Легко видеть, что полученная система линейна, т. е. заведомо разрешается.

При этом приращения управляющих воздействий имеют вид:

$$\begin{array}{c} \Delta u = -(H_{uu} - (1-\alpha)E)^{-1} H_u, \\ \Delta u^c = -(H^c_{u^c u^c} - (1-\alpha)E)^{-1} H^c_{u^c}, \end{array} \qquad (4.4)$$

где E — единичные матрицы соответствующих размеров.

Запишем оставшиеся слагаемые в выражении для приращения функционала ΔL_α, учитывая подстановку в него формул для приращений управлений обоих уровней, и обозначая итог через ΔM_α. Имеем:

$$\Delta M_\alpha \approx G^{\mathrm{T}}_\epsilon \Delta_\epsilon - \sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F} \left(R^{\mathrm{T}}_\epsilon \Delta\epsilon - \frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu} \Delta u \right) + \sum_{\mathbf{K}'\backslash k_F} \Big(G^{c\mathrm{T}}_\epsilon \Delta\epsilon +$$

$$+ G^{c\mathrm{T}}_{\epsilon^c}\Delta\epsilon^c - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} \left(R^{c\mathrm{T}}_\epsilon \Delta\epsilon + R^{c\mathrm{T}}_{\epsilon^c}\Delta\epsilon^c - \frac{1}{2}\Delta u^{c\mathrm{T}} R^c_{u^c u^c}\Delta u^c \right) dt \Big).$$

В приведенном выражении при сделанных ранее предположениях квадратичные формы от Δu и Δu^c отрицательно определены. Рассмотрим теперь слагаемые, зависящие от $\Delta\epsilon$ и $\Delta\epsilon^c$. Выберем $\Delta\epsilon$ и $\Delta\epsilon^c$ таким образом, чтобы рассматриваемое выражение обеспечивало выполнение неравенства $\Delta M_\alpha < 0$. Выбор становится очевидным, если прибегнуть к подробной записи скалярных произведений, входящих в выражение для ΔM_α. Итак:

$$\Delta M_\alpha \approx \sum_{i=1}^{j} G_{\epsilon_i}\Delta_{\epsilon_i} - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\sum_{i=1}^{j} R_{\epsilon_i}\Delta\epsilon_i + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F}\Delta_u^{\mathrm{T}} R_{uu}\Delta_u +$$

$$+\sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F}\sum_{i=1}^{j}\Big(G^c_{\epsilon_i}\Delta\epsilon_i - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c_{\epsilon_i}\Delta\epsilon_i dt\Big)+$$

$$+\sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F}\sum_{i=1}^{b(k)}\Big(G^c_{\epsilon_i^c}\Delta\epsilon_i^c - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c_{\epsilon_i^c}\Delta\epsilon_i^c dt\Big) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F}\int\limits_{\mathbf{T}(z)}\Delta u^{c\mathrm{T}} R^c_{u^c u^c}\Delta u^c dt.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\epsilon_i = \beta\Big(G_{\epsilon_i} - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} R_{\epsilon_i} + \sum_{\mathbf{K}'\setminus k_F} G^c_{\epsilon_i}\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, j,$$

$$\Delta\epsilon_i^c(k) = \beta^c\Big(G^c_{\epsilon_i^c} - \int\limits_{\mathbf{T}(z)} R^c_{\epsilon_i^c} dt\Big), \quad k \in \mathbf{K}'\setminus k_F, \quad i = 1, 2, \ldots, b(k),$$

где $\beta,\ \beta^c$ — коэффициенты, $\beta < 0,\ \beta^c < 0$.

5. Алгоритм метода

На основе полученных соотношений можно сформулировать алгоритм метода в виде следующей итерационной процедуры.

1. Задаются $\alpha,\ \beta,\ \beta^c(k)$. «Слева направо» просчитывается ДНС (2.1), (2.2) при $u = u_s(k)$, $u^c = u^c_s(k,t)$, ϵ_s, ϵ^c_s, заданных начальных условиях, получаются соответствующие траектории $(x_s(k),\ x^c_s(k,t))$.
2. «Справа налево» разрешается ДНС относительно $\psi\,(k)$, $\psi^c\,(k,t)$ и $\lambda(k,t)$.
3. Находятся $\Delta u,\ \Delta u^c$, новые управления $u = u_s(k) + \Delta u,\ \ u^c = u^c_s(k,t) + \Delta u^c$ и новые значения параметров ϵ, ϵ^c.
4. При найденных управлениях, параметрах и начальном условии $x(k_I) = x_I$ просчитывается «слева направо» исходная ДНС (2.1), (2.2). Тем самым определяется новый элемент m_{s+1}.

Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Имеет место следующее утверждение о сходимости.

Теорема 3. *Предположим, что функционал I ограничен снизу и для ДНС (2.1), (2.2) построена указанная итерационная процедура. Тогда последовательность элементов $\{m_s\} \in \mathbf{D}$, сходится по функционалу, т. е. существует число I^*, такое что $I^* \le I(m_s),\ I(m_s) \to I^*$.*

Доказательство проводится по аналогии с представленным в [12].

Продемонстрируем работу предложенного алгоритма на примере.

6. Пример

Рассмотрим работу метода на примере системы, динамика которой включает в себя два этапа.

1-ый этап:

$$\dot{x}_1^c = (x_1^c)^3 + \epsilon^c x_2^c u^c, \quad \dot{x}_2^c = (\epsilon^c)^2 x_1^c (x_2^c)^2 + \frac{1}{3}(u^c)^3,$$

$$x_1^c(0) = 0.5, \quad x_2^c(0) = 1, \quad t \in [0,1], \quad I^0 = \int\limits_0^1 \Big((\epsilon^c x_1^c u^c)^2 - x_2^c u^c \Big) dt.$$

2-ой этап:

$$\dot{x}_1^c = x_2^c u^c, \quad \dot{x}_2^c = -\epsilon^c (x_1^c)^2 + (u^c)^2, \quad t \in [1,3], \quad I^1 = \int\limits_1^3 \epsilon^c (u^c)^2 e^{-x_1^c} dt.$$

Функционал в примере: $I = x_1^c(3) \to \min$. Построим ДНС. Нетрудно видеть, что $\mathbf{K} = 0,1,2$; $\mathbf{K}' = 1$. Поскольку оба этапа связаны через переменную x_1^c, то она и играет роль x, а дискретный процесс верхнего уровня принимает вид:

$$x_1(0) = x_1^c(0,0) = 0.5, \quad x_2(0) = x_2^c(0,0) = 1,$$

$$x(1) = x^c(0,1), \quad x(2) = x^c(1,3),$$

$$I = x_1(2), \quad x^c(1,1) = x(1), \quad \xi = x(1), \quad \theta(1) = x^c(0,1).$$

Модель ДНС может быть дополнена третьим мгновенным этапом, не имеющим протяженности во времени и состоящим лишь в передачи информации об окончании второго этапа на верхний уровень. Тогда $x(3) = x(2) = x^c(1,3)$.

Основные конструкции имеют вид:

$$H^c(0,t,x_1^c,x_2^c,u^c,\psi_1^c,\psi_2^c)=\psi_1^c\left((x_1^c)^3+\epsilon^c x_2^c u^c\right)+$$

$$+\psi_2^c\left((\epsilon^c)^2x_1^c(x_2^c)^2+\frac{1}{3}(u^c)^3\right)-(\epsilon^c x_1^c u^c)^2+x_2^c u^c,$$

$$H^c(1,t,x_1^c,x_2^c,u^c,\psi^c)=\psi_1^c x_2^c u^c+\psi_2^c(-\epsilon^c(x_1^c)^2+(u^c)^2)-\epsilon^c(u^c)^2e^{-x_1^c}.$$

Поскольку процессы нижнего уровня не зависят от x, то на обоих этапах $\lambda=0$. На первом этапе при $k=0$ имеем:

$$\dot{\psi}_1^c=2x_1^c(\epsilon^c u^c)^2-3\psi_1^c(x_1^c)^2-(\epsilon^c)^2\psi_2^c(x_2^c)^2,$$

$$\dot{\psi}_2^c=-\big((\epsilon^c\psi_1^c+1)u^c+2\psi_2^c(\epsilon^c)^2x_1^c x_2^c\big),$$

$$H_{u^c}^c=\epsilon^c\psi_1^c x_2^c+\psi_2^c(u^c)^2-2u^c(\epsilon^c x_1^c)^2+x_2^c,\quad H_{u^cu^c}^c=2\big(\psi_2^c u^c-(\epsilon^c x_1^c)^2\big),$$

$$H_{\epsilon^c}^c=\psi_1^c x_2^c u^c+2\epsilon^c x_1^c\left(\psi_2^c(x_2^c)^2-x_1^c(u^c)^2\right).$$

На втором этапе при $k=1$ конструкции принимают вид:

$$\dot{\psi}_1^c=2\epsilon^c\psi_2^c x_1^c-\epsilon^c(u^c)^2e^{-x_1^c},\quad \dot{\psi}_2^c=-\psi_1^c u^c,$$

$$H_{u^c}^c=\psi_1^c x_2^c+2\psi_2^c u^c-2\epsilon^c u^c e^{-x_1^c},\quad H_{u^cu^c}^c=2\psi_2^c-2\epsilon^c e^{-x_1^c},$$

$$H_{\epsilon^c}^c=-\psi_2^c(x_1^c)^2-(u^c)^2e^{-x_1^c}.$$

Выпишем остальные конструкции. Поскольку $\mathbf{K}'=1$, то

$$G^c=-\psi_1(1)x_1^c(0,1)-\psi_2(1)x_2^c(0,1)+\psi_1(0)x_1^c(0,0)+\psi_2(0)x_2^c(0,0)+$$

$$+\psi_1^c(1,3)x_1^c(1,3)+\psi_2^c(1,3)x_2^c(1,3)-\psi_1^c(0,0)x_1^c(0,0)-\psi_2^c(0,0)x_2^c(0,0),$$

$$H(1,\psi_1,\psi_2,x_1^c(0,1),x_2^c(0,1))=\psi_1(2)x_1^c(0,1)+\psi_2(2)x_2^c(0,1),$$

$$G=\alpha x_1(2)+\psi_1(2)x_1(2)+\psi_2(2)x_2(2)-\psi_1(0)x_1(0)-\psi_2(0)x_2(0),$$

$$\psi_1(2)=-\alpha,\quad \psi_2(2)=0,\quad \psi_1^c(0,1)=\psi_1^c(1,3)=\psi_1(2),$$

$$\psi_2^c(0,1)=\psi_2^c(1,3)=\psi_2(2).$$

Формулы для приращений управления и параметра на этапах имеют следующий вид. На первом этапе:

$$\Delta u^c(0,t)=-\frac{\epsilon^c\psi_1^c x_2^c+\psi_2^c(u^c)^2-2u^c(\epsilon^c x_1^c)^2+x_2^c}{\alpha-1+2\big(\psi_2^c u^c-(\epsilon^c x_1^c)^2\big)},$$

$$\Delta\epsilon^c(0)=\beta^c(0)\int\limits_0^1\Big(\psi_1^c x_2^c u^c+2\epsilon^c x_1^c\big(\psi_2^c(x_2^c)^2-x_1^c(u^c)^2\big)\Big)dt.$$

Второй этап:

$$\Delta u^c(1,t) = -\frac{\psi_1^c x_2^c + 2\psi_2^c u^c - 2\epsilon^c u^c e^{-x_1^c}}{\alpha - 1 + 2\psi_2^c - 2\epsilon^c e^{-x_1^c}},$$

$$\Delta\epsilon^c(1) = -\beta^c(1)\int\limits_1^3 \left(\psi_2^c (x_1^c)^2 + (u^c)^2 e^{-x_1^c}\right) dt.$$

На решение примера потребовалось 4 итерации. При этом значение функционала с $I^1 = 1.2988$ уменьшилось до $I^4 = 0.8057$. Изменение функционала по итерациям представлено в таблице 1. Графики управляющих воздействий и состояний процесса на первой и последней итерациях даны на рисунках 1, 2. При расчетах параметр $\alpha = 0.3$, $\beta^c(1) = -1$, изменение параметра $\beta^c(0)$ представлено в таблице.

Таблица 1

Изменение значений функционала по итерациям

k	$\beta^c(0)$	$\epsilon^c(0)$	$\epsilon^c(1)$	I^k	$\lvert I^k - I^{k-1}\rvert$
0		0.8	0.9	1.2988	
1	-0.3	0.7533	1.0526	1.0235	0.2753
2	-0.3	0.6775	1.1752	0.9173	0.1062
3	-0.6	0.4624	1.2762	0.8271	0.0902
4	-0.5	0.1945	1.3710	0.8057	0.0214

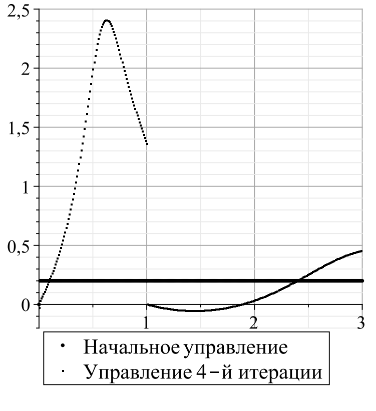

Рис. 1. График управляющих воздействий по итерациям

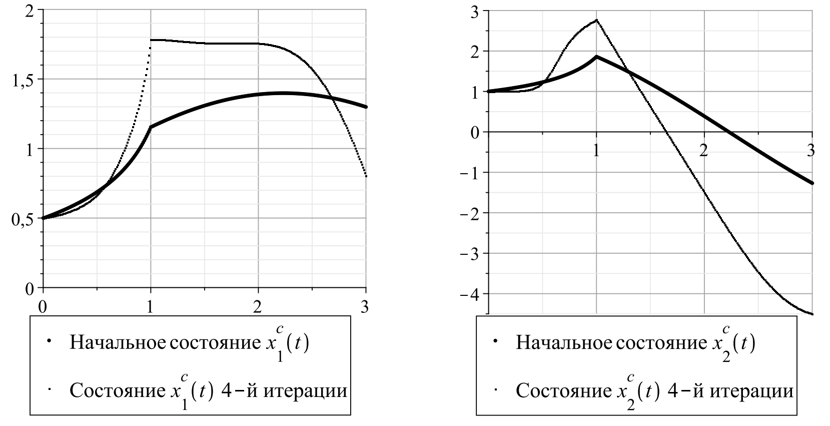

Рис. 2. График состояний $x_1^c(t)$ и $x_2^c(t)$ процесса по итерациям

7. Заключение

В работе построена двухуровневая дискретно-непрерывная система с параметрами, для которой приведен аналог достаточных условий оптимальности Кротова. Этот аналог далее использован для построения алгоритма улучшения управления и параметров. Последний апробирован на иллюстративном примере, подтверждающим его работоспособность.

Список источников

1. Батурин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. Новосибирск : Наука, 1997. 175 с.
2. Бортаковский А. С. Достаточные условия оптимальности детерминированными логико-динамическими системами // Информатика. Серия: Автоматизация проектирования. 1992. Вып. 2-3. С. 72–79.
3. Васильев С. Н. Теория и применение логико-управляемых систем // Труды 2-й Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'03). Москва, 2003. С. 23–52.
4. Гурман В. И. Абстрактные задачи оптимизации и улучшения // Программные системы: теория и приложения. 2011. № 5(9). С. 21–29. http://psta.psiras.ru/read/psta2011_5_21–29.pdf
5. Гурман В. И. К теории оптимальных дискретных процессов // Автоматика и телемеханика. 1973. Вып. 7. С. 53–58.
6. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. М. : Наука, 1985. 228 с.
7. Гурман В. И., Расина И. В. Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 16–29.

8. Гурман В. И., Расина И. В. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автоматика и телемеханика. 1979. Вып. 10. С. 12–18.
9. Кротов В. Ф. Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 172, № 1. С. 18–21.
10. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М. : Наука, 1973. 448 с.
11. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями и ударными воздействиями. М. : URSS, 2019. 736 с.
12. Расина И. В. Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017). М. : Изд-во МАИ, 2017. С. 699–701.
13. Расина И.В. Дискретные неоднородные системы и достаточные условия оптимальности // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. Т. 19, № 1. С. 62–73.
14. Расина И. В. Иерархические модели управления системами неоднородной структуры. М. : Физматлит, 2014. 160 с.
15. Расина И. В. Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 3–17.
16. Emelyanov S.V. *Theory of Systems with Variable Structures*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 592 p.
17. Lygeros J. *Lecture Notes on Hyrid Systems*. Cambridge, University of Cambridge, 2003. 70 p.
18. Rasina I. V., Danilenko O. V. Second Order Krotov Method for Discrete-Continuous Systems. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 32. P. 17–32. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.17
19. Van der Shaa A. J., Schumacher H. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. London, Springer-Verlag Publ., 2000. 176 p.

References

1. Baturin V.A., Urbanovich D.E. *Priblizhennye metody optimalnogo upravleniya, osnovannye na printsipe rasshireniya* [Approximate Methods of Optimal Control Based on the Extension Principle]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1997, 175 p. (in Russian)
2. Bortakovskii A.S. Dostatochnye usloviya optimal'nosti determinirovannymi logiko-dinamicheskimi sistemami [Sufficient Optimality Conditions for Deterministic Logic-Dynamical Systems]. *Informatika. Seriya Avtomatizatsiya proektirovaniya* [Computer Science. Design Automation Series], 1992, vol. 2-3, pp. 72–79. (in Russian)
3. Vasilyev S.N. Theory and application of logic-based controlled systems. *Proceedings of the II International Conference «System Identification and Control Problems» SICPRO'03*. Moscow, Institute of Control Sciences Publ., 2003, pp. 23–52.
4. Gurman V.I. Abstractnye zadachi optimizatsii i uluchsheniya [Abstract Problems of Optimization and Improvement]. *Program Systems: Theory and Applications*, 2011, vol. 5, no. 9, pp. 21–29. (in Russian)
5. Gurman V.I. On the Optimality Theory of Discrete Processes. *Automation and Remote Control*, 1973, vol. 34, no. 7, pp. 1082–1087.

6. Gurman V.I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [Extension Principle In Control Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 228 p. (in Russian)
7. Gurman V.I., Rasina I.V. Discrete-Continuous Representations of Impulsive Processes in the Controllable Systems. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 8, pp. 1290–1300.
8. Gurman V.I., Rasina I.V. On Practical Applications of Conditions Sufficient For a Strong Relative Minimum. *Automation and Remote Control*, 1980, vol. 40, no. 10, pp. 1410–1415.
9. Krotov V.F. Dostatochnye usloviya optimal'nosti dlya discretnykh upravlyaemykh sistem [Sufficient Conditions For the Optimality of Discrete Control Systems]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Sov. Math., Dokl.], 1967, vol. 172, no. 1, pp. 18–21. (in Russian)
10. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and Problems of Optimal Control]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 448 p. (in Russian)
11. Miller B.M., Rubinovich E.Y. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami i udarnymi vozdeistviyami* [Optimization of Dynamic Systems with Impulse Controls and Shock Impacts]. Moscow, URSS Publ., 2019, 736 p. (in Russian)
12. Rasina I.V. Discretno-nepreryvnye sistemy s promezhutochnymi kriteriyami [Discrete-Continuous Systems With an Intermediate Criteria]. *Proceedings of the XX Anniversary International Conference On Computational Mechanics and Modern Applied Sooware Systems CMMASS'2017*. Moscow, Publishing of MAI, 2017, pp. 699–701. (in Russian)
13. Rasina I.V. Discrete Nonuniform Systems and Sufficient Conditions of Optimality *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2017, vol. 19, pp. 62–73. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.62
14. Rasina I.V. *Ierarkhicheskie modeli upravleniya sistemami neodnorodnoi structury* [Hierarchical Control Models for Systems of Heterogeneous Structure]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 160 p. (in Russian)
15. Rasina I.V. Iterative Optimization Algorithms for Discrete-Continuous Processes. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 10, pp. 1591–1603.
16. Emelyanov S.V. *Theory of Systems with Variable Structures.* Moscow, Nauka Publ., 1970, 592 p.
17. Lygeros J. *Lecture Notes on Hyrid Systems.* Cambridge, University of Cambridge, 2003, 70 p.
18. Rasina I.V., Danilenko O.V. Second Order Krotov Method for Discrete-Continuous Systems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 32, pp. 17–32. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.17
19. Van der Shaa A.J., Schumacher H. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems.* London, Springer-Verlag Publ., 2000, 176 p.

Об авторах

Расина Ирина Викторовна, д-р физ.-мат. наук, доц., Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Российская Федерация, 152021, г. Переславль-Залесский; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Российская Федерация, 119333, г. Москва, irinarasina@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8939-2968

Гусева Ирина Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Российская Федерация, 670000, г. Улан-Удэ, gulina.ig@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8720-3676

About the authors

Irina V. Rasina, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Assoc. Prof., Program Systems Institute RAS, Pereslavl-Zalessky, 152021, Russian Federation; Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS, Moscow, 119333, Russian Federation, irinarasina@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8939-2968

Irina S. Guseva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, 670000, Russian Federation, gulina.ig@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8720-3676

Поступила в редакцию / Received 28.11.2021
Поступила после рецензирования / Revised 15.02.2022
Принята к публикации / Accepted 21.02.2022