Серия «Математика»
2021. Т. 38. С. 54—64

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.938
MSC 34M35, 34M40
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.38.54

О формальной нормальной форме ростков полугиперболических отображений на плоскости *

П. А. Шайхуллина

Челябинский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается задача о построении аналитической классификации ростков голоморфных резонансных отображений типа Зигеля в размерности 2, а именно полугиперболические отображения общего вида: у таких отображений один мультипликатор параболический (равен единице), а другой — гиперболический (не равен по модулю нулю или единице). В работе выполняется первый этап построения аналитической классификации методом функциональных инвариантов: доказана теорема о приводимости ростка к его формальной нормальной форме «полуформальными» заменами координат. В качестве формальной нормальной формы выбран сдвиг за единичное время вдоль седло-узлового векторного поля (формальной нормальной формы в задаче об аналитической классификации седло-узловых векторных полей на плоскости).

Ключевые слова: полугиперболические отображения, формальная классификация, аналитическая классификация.

Введение

Обозначим через F росток голоморфного отображения $F : \left(\mathbb{C}^2, 0\right) \mapsto \left(\mathbb{C}^2, 0\right)$. Два ростка F и $\tilde{\mathsf{F}}$ будем называть аналитически (формально) эквивалентными, если найдётся росток голоморфной замены координат

* Работа выполнена при поддержке гранта ФПМУ ЧелГУ 711-1 от 18.12.2020.

H (формальный ряд) такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2,0) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^2,0) \\ H\downarrow & & \downarrow H \\ (\mathbb{C}^2,0) & \xrightarrow{\tilde F} & (\mathbb{C}^2,0) \end{array}$$

Задача о формальной (аналитической) классификации ростков голоморфных отображений достаточно хорошо изучена (см. [1–3]). Наибольшие проблемы возникают при исследовании резонансного случая в области Зигеля: аналитическая классификация ростков такого типа, как правило, не совпадает с формальной и имеет так называемые функциональные модули. Метод построения функциональных модулей в таких задачах был предложен Биркгофом [9] и реализован Ворониным [4] и Экаллем [10] для ростков одномерных параболических отображений, касательных к тождественному. В дальнейшем аналогичными методами была построена аналитическая классификация общих одномерных резонансных отображений, орбитальная классификация седло-узловых векторных полей и резонансных сёдел [5; 11–13] и аналитическая классификация полугиперболических отображений в простейшем случае [8].

Метод состоит в том, чтобы построить сначала формальную классификацию, а затем исследовать препятствия для аналитической эквивалентности ростка его формальной нормальной форме (функциональные инварианты). Таким образом, построение формальной классификации — это первый шаг к построению аналитической классификации ростков. Некоторые результаты в исследовании общих полугиперболических отображений на плоскости были получены Уеда [14; 15]. В частности, им была построена формальная нормальная форма, имеющая самый общий полиномиальный вид. Однако такая формальная нормальная форма не очень удобна для применения метода функциональных инвариантов. Построенная в данной работе нормальная форма имеет вид сдвига за единичное время вдоль векторного поля и более подходит для реализации программы построения функциональных инвариантов.

1. Определения и результаты

Росток голоморфного отображения (с изолированной особой точкой) называют полугиперболическим, если один его мультипликатор параболический (равен единице), а другой — гиперболический (не равен по модулю нулю или единице). Существует прямая связь в построении классификации отображений и векторных полей. Например, в качестве нормальной формы ростков отображений некоторого класса удобно выбирать сдвиг за единичное время вдоль нормальной формы «подходящего» класса ростков векторных полей. Для исследования полугиперболических отображений «подходящими» являются седло-узловые векторные поля. Классификацией таких полей в размерности 2 занимались Мартине и Рамис (орбитальная классификация) [12], Воронин и Мещерякова (аналитическая классификация для типичных случаев) [5], Тессье [13]. Лемма о формальной классификации в работе Тессье сформулирована так.

Обозначим через ω векторное поле

$$\omega = \left(x^{k+1}\frac{\partial}{\partial x} + y(1+\mu x^k)\frac{\partial}{\partial y} \right), \; k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1 ([13], лемма 1). *Для любого ростка голоморфного векторного поля типа седло-узел найдётся такое k и такой многочлен $P(x)$ степени k ($P(0)=0$), что исходный росток формально эквивалентен ростку векторного поля вида $\omega P(x)$. При этом два ростка вида $\omega P(x)$ и $\omega Q(x)$ формально эквивалентны, если и только если для некоторого ε такого, что $\varepsilon^k = 1$ выполнено: $P(\varepsilon x) = Q(x)$.*

Аналогичный результат описан в замечании 4.31 [6]. Однако полиномиальные нормальные формы плохо интегрируются. Поэтому для классификации отображений воспользуемся эквивалентной рациональной формальной нормальной формой:

$$\omega^k_{a\lambda B} = v(x)\tfrac{\partial}{\partial x} + y\left(\lambda + \tfrac{x^k B\left(\frac{1}{x}\right)}{1+ax^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial y}, \text{ где } v(x) = \tfrac{x^{k+1}}{1+ax^k}, \; B(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j x^j,$$
$$\mathrm{Re}\lambda \neq 0, \; \mathrm{Im}\lambda \in [0, 2\pi), \; a \in \mathbb{C}, \; k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Такая формальная нормальная форма седло-узловых векторных полей в случае $k=1$ описана в работе Воронина и Мещеряковой [5].

Обозначим через $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$ сдвиг за единичное время вдоль векторного поля $\omega^k_{a\lambda B}$. В качестве формальной нормальной формы ростков голоморфных полугиперболических отображений в размерности 2 выберем росток отображения $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$.

Отметим, что в работе [7] доказана теорема о формальной классификации ростков типичных полугиперболических отображений в размерности 2, когда $k=1$ (т. е. $v''(0) \neq 0$), $B(x) = \beta$).

Назовем симметриями формальной нормальной формы $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$ следующие отображения: растяжения $(x,y) \mapsto (x, py)$, $p \in \mathbb{C}^*$; поворота $(x,y) \mapsto (\varepsilon x, y)$ для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{C}$ такого, что $\varepsilon^k = 1$ и $B(x) = B(\varepsilon x)$; сдвига $g^t_{\omega_{a\lambda B}}$ за время $t \in \mathbb{C}$.

Из теоремы Адамара – Перрона [1] следует, что гиперболическому мультипликатору ростка полугиперболического отображения соответствует голоморфное инвариантное многообразие. Это многообразие может быть выпрямлено голоморфной заменой координат до $\{x = 0\}$.

Обозначим через $\mathbf{SH}_0$ класс полугиперболических отображений, инвариантное многообразие которых совпадает с $\{x = 0\}$.

Теорема 1. *1. Для любого ростка полугиперболического отображения* F *найдётся набор* (k, a, λ, B) *такой, что росток* F *формально эквивалентен* $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$ *— сдвигу за единичное время вдоль векторного поля* $\omega^k_{a\lambda B}$*.*
2. Если росток F *класса* $\mathbf{SH}_0$*, то нормализующая замена координат может быть выбрана полуформальной (формальной по переменной* x *с коэффициентами, голоморфными по переменной* y *в одной и той же области).*
3. Две формальных нормальных формы $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$ *и* $g^1_{\omega^k_{\tilde{a}\tilde{\lambda}\tilde{B}}}$ *формально эквивалентны если и только если* $a = \tilde{a}$, $\lambda = \tilde{\lambda}$ *и для некоторого* $\varepsilon \in \mathbb{C}$ *такого, что* $\varepsilon^k = 1$, *выполнено:* $B(\varepsilon x) = \tilde{B}(x)$*.*
4. Полуформальная нормализующая замена координат единственна с точностью до отображения симметрии.

2. Доказательство теоремы о формальной классификации

Без ограничения общности можем считать, что росток F класса $\mathbf{SH}_0$. Представим компоненты отображения F в виде ряда Хартогса в круге $D = \{|x| < r\} \times \{|y| < R\}$:

$$F(x, y) = \Big(a_1(y)x + a_2(y)x^2 + ... + a_{k+1}(y)x^{k+1} + ..., b_0(y) + b_1(y)x + ...\Big),$$

где все a_j и b_j голоморфны в D. При этом $b_0(0) = 0$, $b_0'(0) = e^{\lambda}$ и найдётся такое k, что выполнено:

$$a_1(0) = 1,\ a_2(0) = ... = a_k(0) = 0,\ a_{k+1}(0) \neq 0. \tag{2.1}$$

Шаг 1. Приведение ростка к предварительной нормальной форме вида $F_0(x, y) = (f(x), yK(x))$.

Предварительная нормализация ростков аналогичного вида рассматривалась в работе [7] для частного случая $k = 1$. Опишем основные этапы рассуждения, которые будут аналогичны и в данном общем случае.

Сужение f отображения F на прямую $\{x = 0\}$ — это гиперболическое отображение $y \mapsto b_0(y)$. По теореме Шрёдера – Кёнигса [6] оно может быть линеаризовано голоморфной заменой координат. Тем самым без ограничения общности можем считать, что $b_0(y) = e^{\lambda}y$.

Коэффициент a_1 нормализуется заменой координат $(x, y) \mapsto (p(y)x, y)$, где: $p(y) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} a_1\left(e^{-\lambda j}y\right)$ если $\mathrm{Re}\lambda > 0$ и $p(y) = \prod\limits_{j=0}^{\infty} a_1^{-1}\left(e^{\lambda j}y\right)$ если

$\mathrm{Re}\lambda < 0$. Сходимость бесконечных произведений в полидиске D обеспечена теоремами комплексного анализа. Таким образом, без ограничения общности можем считать, что $a_1 = 1$.

Далее применяется схема доказательства теоремы Пуанкаре – Дюлака [1] последовательного уничтожения нерезонансных членов ряда Хартогса. В аналитическом случае это замены вида

$$H_j : (x, y) \mapsto (x, y) + \left(p_{j+1}(y)x^{j+1}, q_j(y)x^j\right), \ j \geq 1.$$

Соответствующие гомологические уравнения

$$\begin{array}{l} p_{j+1}\left(e^\lambda y\right) - p_{j+1}(y) = a_{j+1}(y) \\ q_j(e^\lambda y) - e^\lambda q_j(y) = b_j(y) \end{array}$$

имеют следующие решения:

$p_{j+1}(y) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{y^s}{s!}\left(e^{\lambda s} - 1\right)^{-1} \frac{\partial^s a_{j+1}}{\partial y^s}(0);$

$q_j(y) = \sum\limits_{s=0, s\neq 1}^{\infty} \frac{y^s}{s!}\left(e^{\lambda s} - e^\lambda\right)^{-1} \frac{\partial^s b_j}{\partial y^s}(0).$

При этом ненулевыми (возможно) остаются $a_{j+1}(0)$ и $b_j'(0)$. Голоморфность p_{j+1} и q_j в круге $\{|y| < R\}$ следует из голоморфности a_{j+1} и b_j.

В суперпозиции $\tilde{H}_N = H_N \circ ... \circ H_1$ происходит стабилизация «мономов» в разложении $\tilde{H}_N$. То же происходит с нормализуемым отображением $F_N = \tilde{H}_N^{-1} \circ F \circ \tilde{H}_N$. При этом все коэффициенты ряда Хартогса по-прежнему будут голоморфны в круге $\{|y| < R\}$. Поэтому ряд $\tilde{H} = \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{H}_N$ является сходящимся в пространстве формальных рядов по переменной x с голоморфными по y в круге $\{|y| < R\}$ коэффициентами. $\tilde{H}$ является искомой заменой координат, так как F_N сходятся к F_0 в том же пространстве формальных рядов.

Коэффициент $a_{k+1}(0)$ может быть сделан равным единице заменой координат вида $(x, y) \mapsto (mx, y)$ при подходящем значении m.

С учётом условия (2.1) предварительная формальная нормальная форма (ПФНФ) имеет вид

$$\begin{array}{c} F_0(x, y) = (f(x), yK(x)) \\ \text{где } f(x) = x + x^{k+1} + o(x^{k+1}),\ K(x) = e^\lambda + o(1),\ x \to 0. \end{array} \tag{2.2}$$

Шаг 2. Параметры формальной классификации.

Будем искать замену координат H, сопрягающую ПФНФ F_0 с формальной нормальной формой (ФНФ) $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$ где

$$g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}(x, y) = \left(g^1_v, e^\lambda y\left(\frac{1}{x}g^1_v\right)^{\beta_0} e^{-\sum\limits_{j=1}^{k-1} j^{-1}\beta_j x^{-j}\left(\left(\frac{1}{x}g^1_v\right)^{-j} - 1\right)}\right). \tag{2.3}$$

Подстановкой и прямыми выкладками нетрудно убедиться, что замена координат вида

$$(x,y) \mapsto (p(x), yq(x)), \text{ где } p(0)=0,\ p'(0)\neq 0,\ q(0)\neq 0 \tag{2.4}$$

сохраняет вид отображения (2.2). Из теоремы 3.9 [6] следует, что $g_v^1(x) = x + x^{k+1} + o(x^{k+1}),\ x \to 0$. Поэтому росток ФНФ также вида (2.2). Таким образом, искомая замена координат может быть выбрана вида (2.4). Будем строить её, последовательно нормализуя сначала первую компоненту ПФНФ заменой координат вида $P(x,y) = (p(x), y)$, а затем вторую компоненту ПФНФ заменой вида $Q(x,y) = (x, yq(x))$. Тогда композиция $Q \circ P$ доставляет искомую замену координат.

Первая компонента ФНФ F_0 является параболическим отображением. По теореме 4.26 [6] найдётся такое $a \in \mathbb{C}$ и найдётся формальная замена координат p, сопрягающая первую компоненту ПФНФ со сдвигом g_v^1 вдоль векторного поля $v = \frac{x^{k+1}}{1+ax^k}\frac{\partial}{\partial x}$. Пусть $P(x,y) = (p(x), y)$, $K_p = K \circ p$. Тогда:

$$F_p = P^{-1} \circ F_0 \circ P = (g_v^1, K_p).$$

Первая компонента нормализована.

Простыми вычислениями нетрудно убедиться, что ФНФ имеет вид

$$\left(g_v^1(x), e^{\lambda} y(1+G(x))\right), \tag{2.5}$$

где коэффициенты k-струи отображения G выражаются через параметры β_j, $j = \overline{0, k-1}$ следующим образом:

$$G'(0) = \beta_{k-1},$$

$$G''(0) = 2\beta_{k-2} + \beta_{k-1}^2,$$

$$G^{(j)}(0) = j!\beta_{k-j} + f_k^j(\beta_{k-1}, ..., \beta_{k-j+1}),\ j = \overline{0, k-1}, \tag{2.6}$$

где f_k^j — полиномы, зависящие от уже известных b_{k-j-1}, $j \geq 2$.

Замечание 1. Из (2.6), в частности, следует, что по значениям коэффициентов k-струи отображения G однозначно восстанавливаются значения параметров B формальной нормальной формы $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$.

Далее, из (2.6) с учётом замечания 1 следует, что параметры B могут быть подобраны так, что для отображений K_p и G выполнено:

$$K_p(x) - e^{\lambda}(1+G(x)) = o(x^k),\ x \to 0. \tag{2.7}$$

Обозначим через Q замену координат

$$Q(x,y) = (x, yq(x)),\ q'(0) \neq 0.$$

Тогда

$$Q^{-1} \circ F_p \circ Q = \left(g_v^1, \frac{q \cdot K_p}{q \circ g_v^1} \cdot y \right).$$

Замена координат Q сопрягает F_p с ФНФ F_0, если выполнено равенство

$$\frac{q \circ g_v^1}{q} = \frac{K_p}{e^{\lambda}(1+G)}.$$

Пусть $\varphi = \ln q$, $\psi = \ln \frac{K_p}{e^{\lambda}(1+G)}$. Тогда из (2.7) следует, что $\psi(x) = o(x^k)$, $x \to 0$ и

$$\varphi \circ g_v^1 - \varphi = \psi. \tag{2.8}$$

Предложение 1. *Для любых $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, для любой правой части $\psi(x) = o(x^k)$, $x \to 0$ существует и единственно решение уравнения (2.8), такое что $\varphi(0) = 0$.*

Доказательство. Напомним, что из теоремы 3.9 [6] следует, что $g_v^1(x) = x + x^{k+1} + o(x^{k+1}),\ x \to 0$. Пусть $\psi(x) = \sum\limits_{m=k+1}^{\infty} \psi_m x^m$, $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n$. Подставляя разложения в (2.8), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (x + x^{k+1} + o(x^{k+1}))^n - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n = \sum_{m=k+1}^{\infty} \psi_m x^m$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n ((1 + x^k + o(x^k))^n - 1) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \psi_m x^m.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях $x^j,\ j = j \geq k+1$, получим бесконечную систему уравнений

$$j\varphi_j + ... = \psi_{k+j},\ j \geq 1,$$

где многоточием обозначены φ_s с номерами s, меньшими чем j. Эти уравнения могут быть решены последовательно. В совокупности с начальным условием $\varphi(0) = 0$ это дает существование и единственность формального решения уравнения (2.8). □

Замечание 2. На самом деле выбор значения $\varphi(0)$ не влияет на значения других коэффициентов отображения Q. Если $\varphi(0) = \ln c \neq 0$, то это может «поправить» линейная замена координат $L : (x, y) \mapsto (x, c^{-1}y)$ (см. шаг 4).

Из построения следует, что $Q \circ P$ сопрягает F_0 с формальной нормальной формой $g^1_{\omega^k_{a\lambda B}}$.

Шаг 3. Эквивалентность формальных нормальных форм.

Пусть $F = g^1_{\omega_{a\lambda B}}$ и $\tilde{F} = g^1_{\omega_{\tilde{a}\tilde{\lambda}\tilde{B}}}$ — эквивалентные формальные нормальные формы. Тогда найдётся формальная замена координат, сопрягающая их:

$$F \circ H = H \circ \tilde{F}. \tag{2.9}$$

Так как для F и $\tilde{F}$ прямые $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ инвариантны, то отображение H будет иметь вид $H(x, y) = (xh(x, y), yg(x, y))$.

Сужаем уравнение (2.9) на $\{y = 0\}$. Введём обозначения: $g_0 = yg(0, y)$, $\varphi = F(0, y)$, $\tilde{\varphi} = \tilde{F}(0, y)$, тогда:

$$\varphi \circ g_0 = g_0 \circ \tilde{\varphi},$$

$$g_0(e^{\lambda} y) = e^{\tilde{\lambda}} \tilde{g}_0(y).$$

Дифференцируя равенство и подставляя $y = 0$, получим, что $e^{\lambda} = e^{\tilde{\lambda}}$. Так как $\mathrm{Im}\lambda \in [0, 2\pi)$, то $\lambda = \tilde{\lambda}$.

Сужение первой компоненты на $\{y = 0\}$ является параболическим отображением. Пусть $h_0 = xh(x, 0)$, $f = F(x, 0)$, $\tilde{f} = \tilde{F}(x, 0)$, тогда:

$$f \circ h_0 = h_0 \circ \tilde{f}. \tag{2.10}$$

Из единственности формальной нормальной формы параболических отображений следует, что $\alpha = \tilde{\alpha}$.

Сравнивая в (2.10) коэффициенты при степенях x^{k+j}, $j = 1...k$, получим:

$$(h(0))^k = 1, \ h_0''(0) = ... = h_0^{(k)}(0) = 0. \tag{2.11}$$

Положим $h(0) = \varepsilon$, тогда $\varepsilon^k = 1$. Сравнивая коэффициенты при мономах yx^j, $j = 1, ..., k$ вторых компонент отображения F и $\tilde{F}$, с учётом (2.11) получим, что

$$B(\varepsilon x) = \tilde{B}(x).$$

Замечание 3. Ясно, что верно и обратное утверждение. Формальные нормальные формы, для которых $a = \tilde{a}$, $\lambda = \tilde{\lambda}$ и выполнено последнее равенство, формально эквивалентны: линейная замена координат $(x, y) \mapsto (\varepsilon x, y)$ переводит одну из них в другую.

Шаг 4. Неединственность формальных нормализующих отображений.

Пусть H и $\tilde{H}$ — полуформальные нормализующие замены координат для отображения F. Соответствующую нормальную форму обозначим через F_0. Тогда отображение $\hat{H} = \tilde{H}^{-1} \circ H$ коммутирует с F_0. Пусть $\hat{H} = (h, g)$. Тогда (см. [2] $\hat{H}$ имеет вид (2.4), т. е. $h = h(x)$ и $g = yq(x)$).

Обозначим через φ сужение второй компоненты нормальной формы F_0 на $\{x = 0\}$. Заметим, что линейное отображение $L : y \to py$ коммутирует с φ. Обозначим через g_0 сужение $\hat{H}$ на $\{x = 0\}$. Тогда $L^{-1} \circ g_0$

тоже коммутирует с φ. Выберем p таким, чтобы $L^{-1} \circ g_0 = id$. Без ограничения общности можем считать, что $g_0 = id$.

Заметим, что отображение h коммутирует с первой компонентой формальной нормально формы — g_v^1 (принадлежит централизатору параболического ростка g_v^1). Тогда из следствия 6.17 [6] известно, что h имеет вид εg_v^t для некоторого $t \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^k = 1$. Обозначим через H_t сдвиг за время t вдоль векторного поля $\omega^k_{a\lambda B}$. Тогда H_t коммутирует с формальной нормальной формой F_0. Но тогда $H_t^{-1} \circ \hat{H}$ тоже коммутирует с F_0. Выберем H_t таким, чтобы его первая компонента «выпрямляла» первую компоненту отображения $\hat{H}$: $h_t^{-1} \circ h = \varepsilon x$. Без ограничения общности можем считать, что $h = \varepsilon x$. Если же для такого ε также верно, что $B(\varepsilon x) = B(x)$, тогда отображение $E : (x, y) \to (\varepsilon x, y)$ коммутирует с ФНФ F_0. Сравнивая коэффициенты вторых компонент при мономах yx^j, $j = \overline{1, k}$, получим, что $E^{-1} \circ \hat{H} = id$.

Таким образом, отображения H и $\tilde{H}$ совпадают с точностью до отображений симметрий.

Теорема доказана.

Заключение

Доказанная теорема о формальной классификации является первым этапом построения аналитической классификации методом функциональных модулей. Из нее следует, что если в качестве замены координат выбрать частичную сумму полуформального нормализующего ряда, то такое (голоморфное) отображение сопрягает исходный росток с его формальной нормальной формой с необходимой заданной точностью.

Как уже было показано в [8], выбор формальной нормальной формы в виде сдвига за единичное время вдоль векторного поля позволяет впоследствии простым путем получить необходимые и достаточные условия включаемости в поток. И тем самым установить связь между аналитическими классификациями отображений и векторных полей.

Список литературы

1. Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математических, фундаментальных направлений. М. : ВИНИТИ, 1985. Т. 1. С. 71–140.
2. Брюно А. Д. Аналитические формы дифференциальных уравнений (I) // Труды ММО. 1971. Т. 25. С. 119–262.
3. Брюно А. Д. Аналитические формы дифференциальных уравнений (II) // Труды ММО. 1972. Т. 26. С. 199–239.
4. Воронин С. М. Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с тождественной линейной частью // Функциональный анализ. 1981. Т. 15, вып. 1. С. 1–17. https://doi.org/10.1007/BF01082373

5. Воронин С. М., Мещерякова Ю. И. Аналитическая классификация ростков голоморфных векторных полей с элементарной особой точкой // Вестник ЧелГУ. 2003. Т. 9. С. 16–41.
6. Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю. Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Т. 1. М. : Изд-во МЦНМО, 2013. 428 с.
7. Шайхуллина П. А. Формальная классификация типичных ростков полугиперболических отображений // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 4. С. 79–90.
8. Шайхуллина П. А. Аналитическая классификация простейших ростков полугиперболических отображений : дис. … канд. физ.-мат. наук. Владимир, 2020.
9. Birkhoff G. D. Collected mathematical papers. Vol. 1. N. Y. : Amer. Math. Soc., 1950. 754 p.
10. Ecalle J. Sur les fonctions resurgentes. Orsay, France : Universite? de Paris-Sud, De?partement de Mathe?matique, 1981.
11. Martinet J., Ramis J. P. Probl‘eme de modules pour des ’equations diff’erentielles non lin’eaires du premier ordre // Inst. Hautes ’Etudes Sci. Publ. Math. 1982. N 55. P. 63–164. https://doi.org/10.1007/BF02698695
12. Martinet J., Ramis J. P. Classification analytique des équations différentielles non linéaires resonnantes du premier ordre // Ann. Sci. École norm. supér. 1983. Vol. 16, N 4. P. 571–621. https://doi.org/10.24033/asens.1462
13. Tessier L. Analytical classification of singular saddle-node vector field // J. of Dynamical and Control Systems. 2004. Vol. 10, N 4. P. 577–605. https://doi.org/10.1023/B:JODS.0000045365.56394.b4
14. Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables, I // I. J. Math. Kyoto Univ. 1986. Vol. 26, N 2. P. 233–261.
15. Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables, II // I. J. Math. Kyoto Univ. 1991. Vol. 31, N 3. P. 695–711.

Полина Алексеевна Шайхуллина, кандидат физико-математических наук, Челябинский государственный университет, Российская Федерация, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129,
тел.: (351)7997235, email: fominapa@gmail.com,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-5629-5843

Поступила в редакцию 29.10.2021

About Formal Normal Form of the Semi-Hyperbolic Maps Germs on the Plane

P. A. Shaikhullina

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Abstract. There are consider the problem of constructing an analytical classification holomorphic resonance maps germs of Siegel-type in dimension 2. Namely, semi-hyperbolic maps of general form: such maps have one parabolic multiplier (equal to one), and the other hyperbolic (not equal in modulus to zero or one). In this paper, the first stage of constructing an analytical classification by the method of functional invariants is carried out: a theorem on the reducibility of a germ to its formal normal form by ¡¡semiformal¿¿ changes of coordinates is proved. The one-time shift along the saddle-

node vector field (the formal normal form in the problem of the analytical classification of saddle-node vector fields on a plane) is chosen as the formal normal form.

Keywords: semi-hyperbolic maps, formal classification, analytical classification.

References

1. Arnold V.I. Ordinary differential equations, *Encyclopaedia Math. Sci.*, 1988, vol. 1, p. 1-148.
2. Bruno A.D. Analytical form of differential equations (I). *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1971, vol. 25, pp. 131-288.
3. Bruno A.D. Analytical form of differential equations (II). *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1972, vol. 26, pp. 199-239.
4. Voronin S.M. Analytic classification of germs of conformal mappings $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ with identity linear part. *Functional Analysis and Its Applications*, 1981, vol. 15, no. 1, pp. 1-17. https://doi.org/10.1007/BF01082373 (in Russian)
5. Voronin S.M., Mescheryakova Yu.I. Analytic classification of germs of holomorphic vector fields with a degenerate elementary singular point. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2001, vol. 46, no. 1, pp. 11-14. (in Russian)
6. Il'yashenko Yu.S., Yakovenko S.Yu. *Lectures of analytic differential equations.* Moscow, MTCNMO Publ., 2007, 428 p. (in Russian)
7. Shaikhullina P.A. Formal classification of the typical semi-hyperbolic maps germs. *Matematicheskie zametki SVFU*, 2015, vol. 22, no. 4, pp. 79-90.(in Russian)
8. Shaikhullina P.A. *Analytical classification of the simplest semi-hyperbolic maps germs. PhD thesis.* Vladimir, 2020. (in Russian)
9. Birkhoff G.D. *Collected mathematical papers, vol. 1.* N. Y., Amer. Math. Soc., 1950, 754 p.
10. Ecalle J. *Sur les fonctions resurgentes.* Orsay, France, Universite? de Paris-Sud, De?partement de Mathe?matique, 1981.
11. Martinet J., Ramis J.P. Probl'eme de modules pour des 'equations diff'erentielles non lin'eaires du premier ordre. *Inst. Hautes 'Etudes Sci. Publ. Math.*, 1982, vol. 55, pp. 63-164. https://doi.org/10.1007/BF02698695
12. Martinet J., Ramis J.P. Classification analytique des équations différentielles non linéaires resonnantes du premier ordre. *Ann. Sci. École norm. supér*, 1983, vol. 16, no. 4, pp. 571-621. https://doi.org/10.24033/asens.1462
13. Tessier L. Analytical classification of singular saddle-node vector field. *Jornal of Dynamical and Control Systems*, 2004, vol. 10, no. 4, pp. 577-605. https://doi.org/10.1023/B:JODS.0000045365.56394.b4
14. Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables (I) *I. J. Math. Kyoto Univ.*, 1986, vol. 26, no. 2, pp. 233-261.
15. Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables (II) *I. J. Math. Kyoto Univ.*, 1991, vol. 31, no. 3, pp. 695-711.

Polina Shaikhullina, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Chelyabinsk State University, 129, Bratiev Kashirinykh st., Chelyabinsk,454001, Russian Federation, tel.: (351)7997235,
email: fominapa@gmail.com,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-5629-5843

Received 29.10.2021