Серия «Математика»
2021. Т. 37. С. 104—117

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 510.643; 517.11
MSC 03F25, 03B35
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.104

Допустимые правила вывода и семантические свойства модальных логик *

В. В. Римацкий[1]

[1] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация*

Аннотация. Как правило, семантические свойства нестандартных логик описываются с помощью формул, аксиом. Допустимые правила вывода предоставляют более гибкий и мощный аппарат для исследования неклассических логик. В начале 2000-х гг. появилось несколько статей, в которых описывался явный базис для допустимых правил вывода неклассических логик $S4, K4, Grz, Int$, т. е. набор допустимых правил вывода для заданной логики, из которых все остальные допустимые правила выводятся как следствия. Ключевым свойством логик при построении этих явных базисов, на наш взгляд, является слабое свойство ко-накрытий, что мотивирует данное исследование. Для финитно аппроксимируемых расширений логики GL описано семантическое свойство адекватных логике фреймов через допустимость в логике некоторого набора правил вывода. Финитно аппроксимируемая модальная логика над GL имеет слабое свойство ко-накрытий, если и только если в логике допустим заданный набор правил вывода.

Ключевые слова: модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, слабое свойство ко-накрытий.

1. Введение

Как правило, семантические свойства нестандартных логик описываются с помощью формул, аксиом. Так, например, аксиома $\Box p \to p$ логики T требует рефлексивность отношения достижимости адекватных логике фреймов, аксиома $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ логики $S4.1$ выделяет

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-41-240005.

фреймы с вырожденными сгустками первого слоя и т. д. Однако далеко не все семантические свойства могут быть описаны с помощью формул в языке логик.

Одна из особенностей нашего подхода к изучению логического следования состоит в том, что мы исследуем логическое следование в терминах (структурных) правил вывода, секвентов, а не просто формул или утверждений.

Понятие (структурного) правила вывода обобщает понятие формулы: любая формула может быть рассмотрена как структурное правило вывода без посылки, без предположений. Однако допустимые правила вывода оказались намного сильнее обычных структурных правил: благодаря примеру Р. Харропа (1960 г., [6]) мы знаем, что даже интуиционистская логика Int не является структурно полной, т. е. в ней существуют допустимые, но не выводимые правила вывода, правила, не представимые посредством формул. Благодаря примерам Г. Минца [1] и Дж. Порта [11] это также справедливо и для широкого класса модальных логик.

Допустимые правила вывода предоставляют более гибкий и мощный аппарат для исследования неклассических логик. Для произвольной логики допустимыми являются те правила вывода, которые не изменяют множество доказуемых теорем данной логики. Понятно, что любое выводимое правило является допустимым в заданной логике, но обратное в общем случае не верно, как показывают упомянутые выше примеры Р. Харропа, Г. Минца и Дж. Порта. Непосредственно из определения можно также заключить, что множество всех допустимых в логике λ правил вывода образует *наибольший* класс правил вывода, которыми мы можем расширить аксиоматическую систему данной логики, не изменяя множество доказуемых теорем. Кроме того, допустимые правила значительно усиливают дедуктивную систему заданной логики. Известно, что выводимые правила вывода могут заменить в доказательстве некоторый фрагмент фиксированной длины, т. е. сократить доказательство линейно. Допустимые правила, не выводимые в данной логике, могут сократить доказательство более существенно.

К проблеме А. Кузнецова (1973) о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода логики Int восходит один из способов описания всех допустимых правил логики. Имея базис для допустимых правил, все остальные выводятся из него как следствия. В общем проблема Кузнецова о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода решалась отрицательно не только для Int (Рыбаков, [2]), но и для большинства других базовых логик. В. В. Рыбаков (гл. 4, [12]) показал, что логики Int, KC, $K4$, $S4$, $S4$ и многие другие базовые логики не имеют конечного базиса для допустимых правил от конечного числа переменных. Поэтому к 2000-м гг. стала актуальной проблема явного описания легко обозримого базиса для всех допустимых правил вывода хотя бы для основных базовых логик, а также для тех «сильных» табличных логик, которые имеют конечный базис допустимых правил (см. [3; 4]).

В 2000–2010-х гг. появилось несколько статей, в которых описывался явный базис для допустимых правил вывода неклассических логик $S4$, $K4, Grz, Int$ (см. [5; 7; 10; 14]). Ключевым свойством логик при построении этих явных базисов, на наш взгляд, было слабое свойство ко-накрытий. Возможно, именно наличие слабого свойства ко-накрытий и дизъюнктивного свойства финитно аппроксимируемой логики позволило описать набор допустимых правил вывода для заданной логики, из которых все остальные допустимые правила выводятся как следствия, т. е. базис. И если дизъюнктивное свойство хорошо изучено и описано, то со свойством ко-накрытий это не так. Именно это мотивирует к изучению и описанию данного свойства логики, в том числе с использованием некоторого множества допустимых правил.

Одним из первых примеров (известных автору) использования допустимых правил для описания семантических свойств логики был получен в [8]. А именно, Иемхофф было показано, что пропозициональная интуиционистская логика Int характеризуется наличием дизъюнктивного свойства и допустимостью счетного множества правил вывода Виссера. В [9] допустимость (ослабленных) правил Виссера использовались для описания свойства наследования (слабого свойства ко-накрытий) интуиницонистких логик.

В представленной работе описывается семантическое свойство финитно аппроксимируемых расширений логики GL: финитно аппроксимируемая логика L, расширяющая логику GL, имеет слабое свойство ко-накрытий если и только если в логике допустимы все правила из заданного набора.

2. Определения, предварительные результаты

Вначале напомним кратко необходимые определения и результаты (для детального знакомства с предметом рекомендуем монографию [12]). Далее мы рассматриваем только логики, расширяющие GL, поэтому все фреймы иррефлексивны и транзитивны.

Фрейм $F := \langle W, R\rangle$ есть пара, где W — непустое множество и R — бинарное отношение на множестве W. Базисное множество и сам фрейм далее часто будем обозначать одной и той же буквой. Если $\langle W, R\rangle$ — некоторый фрейм, то непустое множество $C \subseteq W$ называется *сгустком*, если: 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ $(xRy \& yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным,* если $|C| > 1$; в противном случае – *одноэлементным или вырожденным.* Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом

a. Так как мы рассматриваем логики над GL, то все сгустки являются вырожденными и состоят из одного иррефлексивного элемента.

Моделью называется тройка $\mathcal{M} = \langle W,\ R,\ V\rangle$, где $\mathcal{F} := \langle W, R\rangle$ фрейм и V — означивание множества пропозициональных переменных P на фрейме $\mathcal{F}$, т.е. $V : P \to 2^W$. $Dom(V) = P$ называется домейном V.

Фрейм $\mathcal{F} = \langle W_1,\ R_1\rangle$ называется *открытым подфреймом* фрейма $\mathcal{G} = \langle W_2,\ R_2\rangle$ (обозначаем $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{G}$), если выполняется $W_1 \subseteq W_2,\ R_2 \cap W_1^2 = R_1$ и $\forall a \in W_1\, \forall b \in W_2\, (aR_2b \Longrightarrow b \in W_1)$.

Если $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ модели, то модель $\mathcal{M}_1$ называется *открытой подмоделью модели* $\mathcal{M}_2$ (обозначаем $\mathcal{M}_1 \sqsubseteq \mathcal{M}_2$), если 1) фрейм $\langle W_1,\ R_1\rangle$ – открытый подфрейм фрейма $\langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) $Dom(V_1) = Dom(V_2)$ и $\forall p \in Dom(V_1)\ V_1(p) = V_2(p) \cap W_1$.

Отображение фреймов $f : \langle F,\ R\rangle \to \langle G,\ S\rangle$ называется *p-морфизмом*, если выполняется: (1) $aRb \Longrightarrow f(a)Sf(b)$; (2) $f(x)Sz \Longrightarrow \exists y \in F : f(y) = z\,\&\,xRy$. Отображение $f : \mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle \to \mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ называем также *p-морфизмом модели* $\mathcal{M}_1$ в модель $\mathcal{M}_2$, если 1) f есть p-морфизм фрейма $\mathcal{F}_1 = \langle W_1,\ R_1\rangle$ во фрейм $\mathcal{F}_2 = \langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) означивания $V_1,\ V_2$ определены для одного и того же множества переменных; 3) $\forall\, p \in Dom(V_1),\ \forall a \in W_1 (a \models_{V_1} p \iff f(a) \models_{V_2} p)$.

Основным свойством взятия открытых подмоделей и p-морфизмов является сохранение истинности формул:

Утверждение 1. [12]

1) Если $\mathcal{M}_1$ открытая подмодель модели $\mathcal{M}_2$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из множества $Dom(V_1)$, $\mathcal{M}_2 \models \alpha$ влечет $\mathcal{M}_1 \models \alpha$;

2) если отображение f есть p-морфизм модели $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$ на модель $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из множества $Dom(V_1)$, справедливо $\forall a \in W_1 (a \models_{V_1} \alpha \iff f(a) \models_{V_2} \alpha)$.

Пусть $\mathcal{F}_i = \langle W_i,\ R_i\rangle,\ i \in I$ – семейство попарно не пересекающихся фреймов, т.е. $W_i \cap W_j = \emptyset$ для $i \neq j \in I$. *Прямым объединением* этого семейства называется фрейм $\sqcup_{i\in I}\mathcal{F}_i = \langle W,\ R\rangle$, где $W = \cup_{i\in I}W_i,\ R = \cup_{i\in I}R_i$. Прямое объединение моделей определяется аналогично.

Говорим, что фрейм $\mathcal{F}$ является *λ-фреймом*, если все теоремы логики λ истинны на $\mathcal{F}$ при любом означивании переменных. Соответственно, $\lambda(\mathcal{F})$ — множество формул, истинных на $\mathcal{F}$ — есть логика, порожденная фреймом $\mathcal{F}$.

По Лемме 2.5.26 [12] прямое объединение фреймов (или моделей) сохраняет истинность формул: $\sqcup_{i\in I}\mathcal{F}_i \models_V \alpha \iff \forall i\, (\mathcal{F}_i \models_{V_i} \alpha)$. Значит, прямое объединение λ-фреймов также является λ-фреймом.

Будем говорить, что сгустки $C_1, C_2, \ldots, C_n$ некоторого фрейма F *попарно не сравнимы по отношению* R, если справедливо: $\forall C_i, C_j, 1 \leq i, j \leq n,\ \forall x \in C_i, y \in C_j (\neg(xRy)\&\neg(yRx))$, т. е. из элементов одного сгустка данного множества сгустков не достижимы по отношению R элементы другого сгустка. Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма F называется *антицепью.* Антицепь $\mathcal{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathcal{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае — *тривиальной.*

Пусть $\mathcal{F} = \langle F, R\rangle$ некоторый фрейм. Для любого элемента $a \in F$ обозначим $a^R = \{x|aRx\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент a (сгусток $C(a)$) *порождает как корень* подфрейм a^R ($C(a)^R$ соответственно) фрейма F. Аналогично, для множества $X \subseteq F$ определяем $X^R := \cup\{x^R|x \in X\}$ и $X^{<R} = X^R \setminus X$, и также будем говорить, что множество $X \subseteq F$ порождает подфрейм X^R или $X^{<R}$ соответственно. Далее помимо стандартного обозначения фреймов прописными латинскими буквами ($F,\ \mathcal{F}, G, \dots$), также будем использовать и обозначения $a^R,\ C^R,\ X^R, \dots$ для подфреймов (фреймов), порожденных элементом $a \in F$, сгустком $C \in F$ или множеством $X \subseteq F$.

Фрейм $\mathcal{F}$ — *корневой*, если существует элемент $a \in \mathcal{F}$ такой, что $\forall b \in \mathcal{F}\ aRb$. Данный элемент a (и сгусток $C(a)$) называем также *корнем* $\mathcal{F}$. Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R \backslash C(a) = X^R := \cup\{x^R|x \in X\}$. Говорим, что *элемент a есть ко-накрытие* для $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. *λ-ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень λ-фрейм.

Глубиной элемента x фрейма (модели) $\mathcal{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего x. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathcal{F}$ глубины не более чем n будем обозначать $S_{\leq n}(\mathcal{F})$, а множество элементов глубины n обозначим $S_n(\mathcal{F})$.

Подмножество $\mathcal{X}$ заданной модели $\mathcal{M}$ называется *формульно определимым или формульным*, если существует формула α такая, что $\forall x \in \mathcal{M}\big[x \Vdash_V \alpha \iff x \in \mathcal{X}\big]$. Соответственно, *элемент $x \in \mathcal{M}$ является формульным*, если множество $\{x\}$ формульное. Означивание V *определимо (формульное)* в модели $\mathcal{M}$, если для любой переменной p из области V, множество $V(p)$ формульное.

Для заданного фрейма $\mathcal{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k/\beta\}$, говорим что *$r$ истинно на $\mathcal{F}$ при означивании V* (обозначаем $\mathcal{F} \models_V r$), если как только $\forall x \in \mathcal{F}\,\forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{F}\,(x \models_V \beta)$. *Правило r истинно на $\mathcal{F}$*, если r истинно на $\mathcal{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathcal{F} \models r$). Аналогично определяется истинность правила на заданной модели: r истинно на $\mathcal{M}$, если как только $\forall x \in \mathcal{M}\,\forall i\ (x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{M}\ (x \models_V \beta)$ при означивании V.

Правило вывода $r = \{\alpha_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha_k(x_1, \dots, x_n)/\beta(x_1, \dots, x_n)\}$ называется *допустимым* в логике λ [обозначаем $r \in Ad(\lambda)$], если для любых формул $\delta_1, \dots, \delta_n$ из ($\forall j\ \alpha_j(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \lambda$) следует $\beta(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \lambda$.

Допустимые правила пропозициональной модальной (суперинтуиционистской) логики λ имеют алгебраическое описание — им соответствуют квазитождества, истинные на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$ многообразия алгебр $Var(\lambda)$, соответствующего данной логике, т.е. справедливо

Утверждение 2 (гл. 3, [12]). *Правило вывода $r = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k/\beta\}$ допустимо в логике λ если и только если на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$ из многообразия алгебр $Var(\lambda)$ истинно квазитождество $r^* = \{\alpha_1 = 1\& \ldots \&\alpha_k = 1 \Longrightarrow \beta = 1\}$.*

Модель Крипке $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики* λ тогда и только тогда, когда для любой формулы α от переменных $p_1, \ldots, p_n$, выполняется $\alpha \in \lambda \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$.

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику GL, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках. Следуя гл. 3 [12], опишем конструкцию и свойства этой модели.

Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику GL. И пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n. Предположим, что $S_{\leq m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m + 1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathcal{X} \subset S_{\leq m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один элемент (сгусток) глубины m и добавим сгусток C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathcal{X}$ при условии:

(i) фрейм, порожденный сгустком C как корнем, является λ-фреймом: $C^R = \mathcal{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фрейм;

(ii) если $\mathcal{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1 как модель.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $C_n(\lambda)$. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 3 (Th. 3.3.6, 3.3.7 [12]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей GL, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели – формульный.*

Утверждение 4 (Th. 3.3.3 [12]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей GL, правило вывода r допустимо в λ если* *и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных r.*

3. Основной результат

Говорим, что логика λ, расширяющая логику GL, имеет **слабое свойство ко-накрытий**, если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathcal{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F}$, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного иррефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup_{c\in\mathcal{X}^R}\{c\cup c^R\}$, также является λ-фреймом.

Обозначим $\Box_0\alpha := \alpha\wedge\Box\alpha$; $\Diamond_0 := \alpha\vee\Diamond\alpha$. Для всех чисел $n>1,\ 1\leq i,j\leq n;\ n\in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i\wedge\bigwedge_{j\neq i}\neg p_j;\quad A_n := \bigwedge_{1\leq i\leq n}\Diamond\pi_i;$$

$$A_{n,1} := \Box_0\Big[\bigwedge_{1\leq i\leq n}(p_i\to\neg\Diamond_0 q)\Big];\quad B := \neg\Diamond q.$$

Определим также для чисел $n>1, n\in N$, последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_n := \frac{\Box_0\big(A_{n,1}\wedge\neg(A_n\wedge B)\big)}{\Box_0\neg A_n};$$

Заметим, что заданные правила $\mathcal{R}_n$ являются частным случаем правил, образующих явный базис для допустимых правил логик $S4$, GL (см. [14], [5]). Следующая теорема воспроизводит (практически дословно) доказательство Леммы 3.1 из указанной статьи ([14]) и слабое свойство ко-накрытий играет ключевую роль:

Теорема 1 (L. 3.1 [14]). *Правила $\mathcal{R}_n$, $n>1$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей GL и имеющей слабое свойство ко-накрытий.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого n правило вывода $\mathcal{R}_n$ не допустимо в логике λ. Тогда по утверждению 4 существует формульное означивание V переменных правила $\mathcal{R}_n$, при котором правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на некоторой k-характеристической модели $C_k(\lambda)$. Итак, справедливо:

$$C_k(\lambda)\Vdash_V\Box_0\big(A_{n,1}\wedge\neg(A_n\wedge B)\big)\ \&\ C_k(\lambda)\nVdash_V\Box_0\neg A_n. \tag{1}$$

Следовательно, существует элемент $a\in C_k(\lambda)$ такой, что $a\nVdash_V\Box_0\neg A_n$, откуда вытекает $\exists a_1 : aRa_1\ \&\ a_1\Vdash_V A_n$. Тогда найдутся элементы

$b_1, \ldots, b_n \in C_k(\lambda)$ такие, что $a_1 R b_i$ & $b_i \Vdash_V \pi_i$. По слабому свойству ко-накрытий, существует иррефлексивный элемент $b \in C_k(\lambda)$, являющийся ко-накрытием для R-минимальных сгустков из множества

$$\{C(b_1), \ldots, C(b_n)\},$$

т.е.

$$\{b\}^R := \bigcup_{1 \le i \le n} \{b_i\} \cup (b_i)^R.$$

По выбору элемента выполняется $b \Vdash_V A_n$. По (**1**) выполняется $b \Vdash_V A_{n,1}$. Так как b является ко-накрытием для $\{C(b_1), \ldots, C(b_n)\}$, легко проверить, что формула B выполняется на элементе b при означивании V. Действительно, имеем $b_i \Vdash_V p_i$ и по (**1**) справедливо $b_i \Vdash_V A_{n,1}$, откуда следует $\forall i \le n,\ b_i \Vdash_V \neg\Diamond_0 q$. Отсюда получаем, что $b \models_V \neg\Diamond q$. Таким образом, выполнено $b \Vdash_V A_n \wedge B$, что противоречит $b \Vdash_V \Box\neg(A_n \wedge B)$ по предположению (**1**). ■

Теорема 2. *Если все правила $\{\mathcal{R}_n, n > 1\}$ допустимы в финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей GL, тогда логика λ имеет слабое свойство ко-накрытий.*

Доказательство. Предположим, что все правила $\mathcal{R}_n,\ n > 1, n \in N$, допустимы в финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей GL, и в то же время логика не имеет слабого свойства ко-накрытий. Т.е. найдется конечный корневой λ-фрейм $G = b^R$ и нетривиальная антицепь $\mathcal{X} \subset G$, такие что, фрейм $\varepsilon^R := \bigcup_{c \in \mathcal{X}^R}\{c \cup c^R\} \cup \{\varepsilon\}$, полученный добавлением как корня одноэлементного иррефлексивного ко-накрытия ε ко фрейму $\bigcup_{c \in \mathcal{X}^R}\{c \cup c^R\}$, не является λ-фреймом. Покажем, что в таком случае хотя бы одно из правил $\mathcal{R}_n$ будет не допустимо в логике λ. Для этого построим λ-фрейм, содержащий фрейм G как открытый подфрейм и опровергающий некоторое правило $\mathcal{R}_n,\ n > 1$, при некотором означивании. Затем определим р-морфизм из фрейма n-характеристической модели на полученный фрейм. Перенося с него с помощью р-морфизма означивание на фрейм n-характеристической модели, опровергнем на ней данное правило, откуда будет следовать его недопустимость в логике.

Зафиксируем в G нетривиальную антицепь $\mathcal{X}$ и рассмотрим фрейм $G \sqcup \{e\}$, где $\{e\}$ – иррефлексивный элемент, не сравнимый по отношению R с любым элементом фрейма G (т. е. берем прямое объединение фрейма G и одноэлементного сгустка $C(e) = \{e\}$). Фрейм $C(e) = \{e\}$ также является λ-фреймом (как открытый подфрейм фрейма G). Следовательно, фрейм $G \sqcup \{e\}$ является λ-фреймом как прямое (дизъюнктное) объединение λ-фреймов.

Определим теперь λ-последователь фрейма $G \sqcup \{e\}$ следующим образом.

Определим фрейм $\mathcal{M}_0 = G \sqcup \{e\}$. Затем выберем все нетривиальные антицепи $\{X_t \subseteq S_1(\mathcal{M}_0)\}$, которые не имеют в $\mathcal{M}_0$ одноэлементных ко-накрытий и добавим к каждой такой антицепи снизу иррефлексивный элемент t как ко-накрытие, если он порождает как корень λ-фрейм $t^R = \{t\} \cup X_t^R$. Обозначим полученный фрейм как $\mathcal{M}_1$. По построению полученный фрейм является λ-фреймом (к λ-фрейму $G \sqcup \{e\}$ добавили снизу ко-накрытия, которые также порождают λ-фреймы и отношение достижимости R на исходном фрейме не изменилось, в результате данный фрейм может быть получен как р-морфный образ прямого объединения λ-фреймов) и $G \sqsubseteq G \sqcup \{e\} \sqsubseteq \mathcal{M}_1$ (т.к. добавили новые элементы как ко-накрытия ко фрейму $G \sqcup \{e\}$).

Предположим, что λ-фрейм $\mathcal{M}_k$ уже построен и выполняется

$$G \sqcup \{e\} \sqsubseteq \mathcal{M}_k.$$

Получим фрейм $\mathcal{M}_{k+1}$ следующим образом. В подфрейме $S_{\leq(k+1)}(\mathcal{M}_k)$ (глубины не более k) выберем все нетривиальные антицепи сгустков $\{X_t \subseteq S_{\leq(k+1)}(\mathcal{M}_k)\}$, которые не имеют одноэлементных ко-накрытий в $\mathcal{M}_k$ и содержат хотя бы один элемент глубины k. Затем добавим к каждой такой антицепи снизу иррефлексивный элемент t как ко-накрытие, если он порождает как корень λ-фрейм $t^R = \{t\} \cup X_t^R$. Полученный фрейм обозначим как $\mathcal{M}_{k+1}$. Опять же по построению $\mathcal{M}_{k+1}$ является λ-фреймом (к λ-фрейму $\mathcal{M}_k$ добавили снизу ко-накрытия, которые также порождают как корни λ-фреймы и отношение достижимости R на исходном фрейме не изменилось) и $G \sqcup \{e\} \sqsubseteq \mathcal{M}_{k+1}$ (так как мы добавили к $\mathcal{M}_k$ новые ко-накрытия и $G \sqcup \{e\} \sqsubseteq \mathcal{M}_k$).

Продолжая описаный процесс построения, мы получим λ-последователь фрейма $G \sqcup \{e\}$ – фрейм $\mathcal{M} = \cup_{k \in N} \mathcal{M}_k$ (потенциально бесконечный).

Непосредственно по построению фрейм $\mathcal{M}$ имеет следующие свойства:

– первый слой фрейма $\mathcal{M}$ содержит по крайней мере один вырожденный сгусток $C(e) = \{e\}$;
– зафиксированная антицепь $\mathcal{X} \subset G$ не имеет ко-накрытия в $\mathcal{M}$, так как на каждом шаге построения добавляли только те ко-накрытия, которые порождают как корень λ-фрейм, а ко-накрытие для $\mathcal{X}$ не порождает как корень λ-фрейм;
– фрейм G является открытым подфреймом фрейма $\mathcal{M}$;
– любая нетривиальная антицепь сгустков из $\mathcal{M}$, отличная от $\mathcal{X}$ имеет в $\mathcal{M}$ одноэлементное λ-ко-накрытие.

Утверждение 5. *Для некоторого $n > 1$ выполняется $\mathcal{M} \not\models \mathcal{R}_n$.*

Пусть зафиксированная выше нетривиальная антицепь $\mathcal{X} \subset b^R$ состоит из сгустков $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ (т.е. $\mathcal{X} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$). Определим на фрейме $\mathcal{M}$ означивание переменных правила $\mathcal{R}_n$ следующим образом ($n > 1$ — число сгустков в нетривиальной антицепи $\mathcal{X}$).

Определим $\mathcal{X}^{-R} = \{x \ : \ xRC_1 \& xRC_2 \& \dots xRC_n\}$ и

$$V(q) := \{y \in \mathcal{M} \setminus (\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^R) : y \notin \mathcal{X}^{-R} \ \& \exists x \in \mathcal{X}^{-R}(xRy)\}, \ V(p_i) := C_i.$$

Покажем теперь, что при таком означивании V правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathcal{M}$, т. е. посылка правила истинна на $\mathcal{M}$, а заключение опровергается.

По определению означивания V получаем:

$$\forall e \in (\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^R) \ e \models_V \neg\Diamond q; \quad \forall x \in \mathcal{M} \ (x \models_V p_i \iff x \in C_i).$$

Пусть для некоторого элемента $z \in \mathcal{M}$ выполняется $z \models_V A_n$, т. е. из него достижима по отношению R зафиксированная антицепь $\mathcal{X} = \{C_1, \ C_2, \ \dots, C_n\}$ и, значит $z \in \mathcal{X}^{-R}$. Следовательно, выполняется $z \models_V \neg q$ по определению означивания $V(q)$. По построению λ-последователя $\mathcal{M}$, сгусток $C(z)$ не является ко-накрытием для этой антицепи (при построении добавляли только те ко-накрытия, которые порождают как корни λ-фреймы, а ко-накрытие для этой антицепи не порождает как корень такой фрейм). Кроме того, найдется такой элемент $y \in \mathcal{M}$, что $y \notin \mathcal{X}^{-R}$, $y \notin \mathcal{X}^R$ и zRy. В этом случае справедливо $y \models_V q$. Отсюда следует $z \models_V \neg q \wedge \Diamond q$, что влечет $z \models_V \neg(A_n \wedge B)$

По определению означивания переменных p_i и q очевидно выполнено $\forall x \in \mathcal{M} \ x \not\models_V \bigvee_{1 \leq i \leq n} p_i \wedge \Diamond q$. Учитывая, что

$$\Box_0 A_{n,1} = \Box_0 \bigwedge_{1,n} (p_i \to \neg\Diamond q) = \Box_0 \bigwedge_{1,n} (\neg p_i \vee \neg\Diamond q) = \Box_0 \neg[\bigvee_{1,n} (p_i \wedge \Diamond q)],$$

получаем $\forall x \in \mathcal{M} \ x \models_V \Box_0 A_{n,1}$.

Итак, мы показали, что при таком определении означивания посылка правила истинна на всех элементах фрейма $\mathcal{M}$. Так как элемент b является R-предшественником антицепи $\mathcal{X} = \{C_1, \ C_2, \ \dots, C_n\}$ и $\forall x \in C_i \ x \models_V p_i, \ x \not\models p_j, i \neq j$, следовательно, выполнено $b \models_V \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond \pi_i$, т. е. $b \models_V A_n$. Откуда заключаем $b \not\models_V \Box_0 \neg A_n$, что доказывает опровержимость правила $\mathcal{R}_n$ на фрейме $\mathcal{M}$ при данном означивании V. ■

Утверждение 6. *Правило $\mathcal{R}_n$, где $n > 1$ — число сгустков в $\mathcal{X}$, не допустимо в логике λ.*

Выберем наименьшее число k так, чтобы выполнилось $\mathcal{M} \sqsubseteq C_k(\lambda)$ (не сложно показать, что такое число существует). Как было показано ранее, правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на $\mathcal{M}$. Необходимо доопределить означивание переменных на $C_k(\lambda)$ так, чтобы посылка правила была истинна на всей k-характеристической модели, а заключение ложно. Для этого определим p-морфизм из $C_k(\lambda)$ на фрейм $\mathcal{M}$ и с помощью этого р-морфизма перенесем означивание переменных правила с $\mathcal{M}$ на $C_k(\lambda)$.

Определим р-морфизм f из фрейма $C_k(\lambda)$ на фрейм $\mathcal{M}$ следующим образом.

– на подфрейме $\mathcal{M} \sqsubseteq C_k(\lambda)$ р-морфизм f определим как тождественный, т. е. $\forall\ x \in \mathcal{M}$ определим $f(x) := x$.
– для всех элементов $x \in S_1(C_k(\lambda) \setminus \mathcal{M})$ доопределим р-морфизм f как $f(x) := e$, где e — элемент первого слоя $\mathcal{M}$, порождающий вырожденный сгусток $C(e)$ (такой вырожденный сгусток существует по построению $\mathcal{M}$ и был добавлен ко фрейму G на первом шаге построения).
– пусть для всех элементов $x \in S_{\leq t}(C_k(\lambda) \setminus \mathcal{M})$ глубины не более t р-морфизм f уже определен и элемент $y \in S_{t+1}(C_k(\lambda) \setminus \mathcal{M})$ является ко-накрытием некоторой антицепи сгустков (возможно тривиальной) $\mathcal{A} \subseteq S_{\leq t}(C_k(\lambda)$. По построению k-характеристической модели $C_k(\lambda)$ фреймы $y \cup y^R$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^R$ – λ-фреймы. По индуктивной гипотезе $f(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^R) \subseteq \mathcal{M}$ уже определен. Т.к. р-морфизм сохраняет истинность формул, фреймы $f(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^R)$ и $f(y \cup y^R)$ – λ-фреймы. Следовательно, антицепь R-минимальных сгустков фрейма $f(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^R)$ допускает приписывание снизу одноэлементного иррефлексивного λ-ко-накрытия и результат добавления такого ко-накрытия является р-морфным образом фрейма $y \cup y^R$. Тогда по построению фрейма $\mathcal{M}$, такое ко-накрытие ε для антицепи R-минимальных сгустков фрейма $f(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^R)$ действительно существует в $\mathcal{M}$. Следовательно, можем определить $f(y) = f(C(y)) := \varepsilon$. В силу произвольности выбора элемента $y \in S_{t+1}(C_k(\lambda) \setminus \mathcal{M})$ таким образом определяем р-морфизм на всем слое $S_{t+1}(C_k(\lambda))$.
– Продолжая доопределение р-морфизма f описанным в предыдущем пункте способом, в итоге определим р-морфизм f фрейма k-характеристической модели $C_k(\lambda)$ на фрейм $\mathcal{M}$.

Теперь остается заметить, что перенося с помощью f^{-1} означивание V, при котором опровергается наше правило, с фрейма $\mathcal{M}$ на фрейм k-характеристической модели $C_k(\lambda)$, получим р-морфизм моделей, сохраняющий истинность формул:

$$\langle C_k(\lambda),\ f^{-1}(V)\rangle \longrightarrow_f \langle \mathcal{M},\ V\rangle.$$

Следовательно, правило $\mathcal{R}_n$ опровергается на k-характеристической модели $C_k(\lambda)$ при означивании $f^{-1}(V)$, и значит, не допустимо в логике λ. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2. ∎

Таким образом, из теорем 1 и 2 вытекает следующий критерий:

Теорема 3. *Пусть финитно аппроксимируемая логика λ расширяет логику GL. Правила $\mathcal{R}_n$, $n > 1$, $n \in N$, допустимы в λ если и только если λ имеет слабое свойство ко-накрытий.*

4. Заключение

В статье исследуется слабое свойство ко-накрытий модальных логик, расширяющих логику GL. Данное свойство, по-видимому, является ключевым при описании явных базисов для допустимых правил вывода базовых неклассических логик ($K4, S4, GL, Grz, Int$). Это замечание мотивирует изучение данного свойства. В статье описано слабое свойство ко-накрытий для расширений модальной логики GL через допустимость некоторого счетного набора правил вывода. А именно, показано, что финитно аппроксимируемая логика над GL имеет слабое свойство ко-накрытий, если и только если в логике допустим заданный набор правил вывода.

Список литературы

1. Минц Г. Е. Выводимость допустимых правил // Журнал советской математики. 1976. Т. 6, № 4. С. 417–421.
2. Рыбаков В. В. Базис для допустимых правил логики $S4$ и интуиционистской логики H // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 55–68.
3. Римацкий В. В. Базисы допустимых правил вывода табличных модальных логик глубины 2 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 612–623.
4. Римацкий В. В. О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2 // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 4. С. 436–455.
5. Федоришин Б. Р. Явный базис для допустимых правил вывода логики Гёделя – Леба GL // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 2. С. 423–430.
6. Harrop R. Concerning Formulas of the Types $A \to B \vee C,\ A \to \exists x B(x)$ // Journal of Symbolic Logic. 1960. Vol. 25, N 1. P. 27–32.
7. Iemhoff R. On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic // Journal of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66, N 2. P. 281–294. https:// doi: 10.2307/2694922
8. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 113, N 1-3. P. 161–173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
9. Iemhoff R. Intermediate Logics and Visser's rules // Notre Dame Journal of Formal Logic. 2005. Vol. 46, N 1. P. 65–81. https:// doi: 10.1305/ndjfl/1107220674
10. Jeřábek E. Admissible rules of modal logics // Journal of Logic and Computation. 2005. Vol. 15, N 4. P. 411–431.
11. Port J. The deducibilities of S5 // J. of Phylosophical Logic. 1981. Vol. 10, N 1. P. 281–294.
12. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. New-York ; Amsterdam : Elsevier Sci. Publ.,1997. Vol. 136. P. 611.
13. Rybakov V. V., Terziler M., Remazki V. V. Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC // Mathematical Logic Quarterly. 2000. Vol. 46, N 2. P. 207–218. https:// doi: 10.1002/(SICI)1521-3870(200005)46:2<207::AID-MALQ207>3.0.CO;2-E
14. Rybakov V. V. Construction of an Explicit Basis for Rules admissible in Modal system S4 // Mathematical Logic Quarterly. 2001. Vol. 47, N 4. P. 441–451. https://doi.org/10.1002/1521-3870(200111)47:4<441::AID-MALQ441>3.0.CO;2-J

Виталий Валентинович Римацкий, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, email: Gemmeny@rambler.ru,

Поступила в редакцию 20.07.2021

Admissible Inference Rules and Semantic Property of Modal Logics

V. V. Rimatskiy[1]

[1] *Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation*

Abstract. Firstly semantic property of nonstandart logics were described by formulas which are peculiar to studied a models in general, and do not take to consideration a variable conditions and a changing assumptions. Evidently the notion of inference rule generalizes the notion of formulas and brings us more flexibility and more expressive power to model human reasoning and computing. In 2000-2010 a few results on describing of explicit bases for admissible inference rules for nonstandard logics (S4, K4, H etc.) appeared. The key property of these logics was weak co-cover property. Beside the improvement of deductive power in logic, an admissible rule are able to describe some semantic property of given logic. We describe a semantic property of modal logics in term of admissibility of given set of inference rules. We prove that modal logic over logic GL enjoys weak co-cover property iff all given rules are admissible for logic.

Keywords: modal logic, frame and model Kripke, admissible inference rule, weak co-cover property.

References

1. Mints G.E. Inference of admissible rules. *Journal of Soviet mathematic* 1976, vol. 6, no. 4, pp. 417-421. (in Russian)
2. Rybakov V.V. Basis for admissible inference rules of logic $S4$ and Int. *Algebra and Logic*, 2005, vol. 15, no. 4, pp. 411-431.(in Russian)
3. Rimatskiy V.V. Basis for admissible inference rules for modal logics of depth 2. *Algebra and Logic*, 1996, vol. 35, pp. 344-349. https://doi.org/10.1007/BF02367359
4. Rimatskiy V. V. On finite basis of admissible rules for modal logics of width 2. *Algebra and Logic*, 1999, vol. 38, pp. 237-247. https://doi.org/10.1007/BF02671729
5. Fedorishin B.R. Explicit basis for admissible rules of logic GL. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, pp. 339-345. https://doi.org/10.1007/s11202-007-0036-y
6. Harrop R. Concerning Formulas of the Types $A \to B \vee C,\ A \to \exists x B(x)$. *Journal of Symbolic Logic*, 1960, vol. 25, no. 1, pp. 27-43.
7. Iemhoff R. On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 2001, vol. 66, no. 2, pp. 281-294. https:// doi: 10.2307/2694922
8. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2001, vol. 113, no. 1-3, pp. 161-173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
9. Iemhoff R. Intermediate Logics and Visser's rules. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2005, vol. 46, no. 1, pp. 65-81. https:// doi: 10.1305/ndjfl/1107220674

10. Jeřábek E. Admissible rules of modal logics. *Journal of Logic and Computation*, 2005, vol. 15, no. 4, pp. 411-431.
11. Port J. The deducibilities of S5. *Journal of Phylosophical Logic*, 1981, vol. 10, no. 1, pp. 409-422.
12. Rybakov V.V. Admissibility of logical inference rules *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Sci. Publ.*, New-York, Amsterdam, 1997, vol. 136, p. 611.
13. Rybakov V.V., Terziler M., Remazki V.V. Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC. *Mathematical Logic Quarterly*, 2000, vol. 39, pp. 412-422. https:// doi: 10.1002/(SICI)1521-3870(200005)46:2<207::AID-MALQ207>3.0.CO;2-E
14. Rybakov V.V. Construction of an Explicit Basis for Rules admissible in Modal system S4, *Mathematical Logic Quarterly*, 2001, vol. 47, no. 4, pp. 441-451. https://doi.org/10.1002/1521-3870(200111)47:4<441::AID-MALQ441>3.0.CO;2-J

Vitaliy Rimatskiy, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Siberian Federal University, 79, Svobodniy av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, email: Gemmeny@rambler.ru

Received 20.07.2021