ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Серия «Математика»
2021. Т. 37. С. 3—16

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.977
MSC 49J15, 49M25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3

Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей

В. А. Срочко[1], Е. В. Аксенюшкина[2], В. Г. Антоник[1]

[1] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация*

[2] *Байкальский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация*

Аннотация. Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления со знаконеопределенными матрицами и двусторонним ограничением на управление. В задаче также присутствует параметр регуляризации при квадрате управления в функционале. Приближенное решение задачи проводится на подмножествах допустимых управлений, которые оформляются с помощью линейных комбинаций специальных функций с ориентацией на структуру оптимального управления в силу принципа максимума. В результате такой процедуры получена конечномерная задача квадратичной оптимизации с двусторонним ограничением на переменные. Установлены следующие соотношения между вариационной задачей и ее конечномерной моделью: свойство выпуклости линейно-квадратичной задачи сохраняется для конечномерной модели; невыпуклая линейно-квадратичная задача при определенном условии на параметр регуляризации (оценка снизу) аппроксимируется выпуклой квадратичной задачей, которая решается за конечное число операций; специальная невыпуклая линейно-квадратичная задача с оценкой сверху на параметр регуляризации переходит в задачу минимизации вогнутой функции на конечном множестве точек. Выделяется частный случай невыпуклой линейно-квадратичной задачи на максимум нормы конечного состояния. Обсуждены возможности решения конечномерной модели на основе степенного метода с нормировкой. Построены две процедуры улучшения экстремальных точек конечномерной модели, которые снижают вычислительные затраты на глобальное решение задачи в рамках метода линеаризации.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, конечномерные модели, конечные методы решения.

1. Введение

В теории оптимального управления линейно-квадратичные задачи (ЛКЗ - линейная система, квадратичный функционал) занимают приоритетное место в силу своей сохраняющейся актуальности как в теоретическом, так и в прикладном отношениях. Спектр возможных постановок и результатов в этой области достаточно широк: классические задачи без ограничений на управление с разрешающим уравнением Риккати, выпуклые задачи с ограничениями на управление с разрешающими соотношениями принципа максимума, невыпуклые по функционалу задачи с условиями глобальной оптимальности, линейно-квадратичные аппроксимации общих нелинейных задач в рамках методов численного решения [3; 5; 7; 9].

В данной работе рассматривается ЛКЗ со знаконеопределенными матрицами и двусторонними ограничениями на управление. В задаче также присутствует параметр регуляризации при квадрате управления в функционале.

Приближенное решение задачи проводится на подмножествах допустимых управлений, которые оформляются с помощью линейных комбинаций специальных функций и реализуют кусочно-линейную аппроксимацию кусочно-непрерывных функций с ориентацией на структуру оптимального управления в силу принципа максимума. В результате такой процедуры получаем конечномерную задачу квадратичной оптимизации с двусторонним ограничением на переменные (гиперкуб).

Установлены следующие взаимосвязи между вариационной ЛКЗ и ее конечномерной моделью (КМ):

– свойство выпуклости ЛКЗ сохраняется для КМ;

– невыпуклая ЛКЗ при определенном условии на параметр регуляризации (оценка снизу) аппроксимируется выпуклой квадратичной задачей, которая допускает решение за конечное число итераций методом особых точек;

– специальная невыпуклая ЛКЗ с оценкой сверху на параметр регуляризации переходит в конечномерную задачу минимизации вогнутой функции на гиперкубе, которая допускает глобальное решение в результате специализированного перебора угловых точек.

Выделяется частный случай невыпуклой ЛКЗ на максимум нормы конечного состояния. В этой ситуации КМ представляет собой задачу на максимум строго выпуклой квадратичной функции на конечном множестве точек. В этой формализации основной процедурой улучшения является упрощенный вариант метода условного градиента. Неподвижные точки метода являются экстремальными для рассматриваемой задачи в смысле необходимого условия максимума. Построены две процедуры улучшения экстремальной точки на основе сравнения с «соседними» вершинами гиперкуба, что в конечном итоге снижает вычислительные затраты на глобальное решение задачи.

2. Постановка задачи. Конечномерная аппроксимация

Используя стандартные обозначения $t \in [t_0, T]$, $u(t) \in R$, $x(t) \in R^n$, рассмотрим задачу на минимум квадратичного функционала

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), Cx(T)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + qu^2(t)]dt \tag{2.1}$$

применительно к фазовой системе

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x^0 \tag{2.2}$$

с двусторонними ограничениями на управление

$$u(t) \in [u_-, u_+], \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.3}$$

Отметим необходимые условия:

функции $Q(t),\ A(t),\ b(t)$ непрерывны на $[t_0, T]$;

матрицы $C,\ Q(t)$ симметричны, параметр $q > 0$;

множество допустимых управлений образуют кусочно-непрерывные функции $u(t)$ с ограничением (2.3).

Согласно принципу максимума оптимальное управление в данной задаче выражается по формуле

$$u_*(t) = \begin{cases} u_-, & \bar{u}(t) < u_-, \\ \bar{u}(t), & \bar{u}(t) \in [u_-, u_+], \\ u_+, & \bar{u}(t) > u_+. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $\bar{u}(t) = \frac{1}{q}\langle \psi(t, u_*), b(t)\rangle$ — максимизирующее управление функции Понтрягина, $\psi(t, u_*)$ — решение сопряженной системы с оптимальной фазовой траекторией

$$\dot{\psi} = -A(t)^T\psi + Q(t)x(t, u_*), \quad \psi(T) = -Cx(T, u_*).$$

Проведем редукцию вариационной задачи (2.1)–(2.3) к конечномерной в рамках метода параметризации допустимых управлений [1; 6]. В данном случае формула (2.4) для оптимального управления определяет приемлемую аппроксимацию в классе кусочно-линейных функций. Следуя [10], представим соответствующую формализацию.

Введем на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку Δ узлов $t_i = t_0 + ih$, $i = \overline{0, m+1}$ с шагом $h = \frac{T-t_0}{m+1}$. Выделим промежутки

$$T_0 = [t_0, t_1], \quad T_j = [t_{j-1}, t_{j+1}],\ j = \overline{1, m}, \quad T_{m+1} = [t_m, t_{m+1}]$$

и определим набор опорных функций на $[t_0, T]$

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t_1 - t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases} \qquad \varphi_{m+1}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin T_{m+1}, \\ \frac{1}{h}(t - t_m), & t \in T_{m+1}, \end{cases}$$

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t - t_{j-1}), & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{1}{h}(t_{j+1} - t), & t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0, & t \notin T_j, \end{cases} \qquad j = \overline{1, m}.$$

Отметим значения в узловых точках

$$\varphi_j(t_i) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \qquad i, j = \overline{0, m+1}.$$

и взаимосвязь «не соседних» функций

$$\varphi_j(t)\varphi_k(t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \quad |j - k| > 1. \tag{2.5}$$

Пусть $z = (z_0, ..., z_{m+1})$ — набор параметров (коэффициентов) линейной комбинации. Сформируем семейство управлений

$$u(t, z) = \sum_{j=0}^{m+1} z_j \varphi_j(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.6}$$

Это непрерывные, кусочно-линейные функции с угловыми точками t_i и значениями $u(t_i, z) = z_i$, $i = \overline{0, m+1}$. Следовательно, поточечное ограничение $u(t, z) \in [u_-, u_+]$, $t \in [t_0, T]$ равносильно покоординатным условиям $z_j \in [u_-, u_+]$, $j = \overline{0, m+1}$.

Пусть $x(t, z), t \in [t_0, T]$ – фазовая траектория, соответствующая управлению $u(t, z)$. В силу линейности системы (2.2) имеет место представление

$$x(t, z) = x(t, 0) + \sum_{j=0}^{m+1} z_j x^j(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.7}$$

где $x^j(t)$ — решение задачи Коши (опорная траектория)

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\varphi_j(t), \quad x(t_0) = 0.$$

Отметим, что $x^j(t) = 0$, $t \in [t_0, t_{j-1}]$, $j = \overline{2, m+1}$.

Перейдем на уровень функционала (2.1). Используя представление (2.7), получаем

$$\frac{1}{2}\langle x(T,z), Cx(T,z)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \langle x(t,z), Q(t)x(t,z)\rangle dt =$$

$$= \Phi(0) + \langle d, z\rangle + \frac{1}{2}\langle z, Dz\rangle.$$

Здесь $d \in R^{m+2}$ - вектор с компонентами

$$d_j = \langle x^j(T), Cx(T,0)\rangle + \int_{t_0}^{T} \langle x^j(t), Q(t)x(t,0)\rangle dt,$$

$D \in R^{(m+2)\times(m+2)}$ — симметричная матрица с элементами

$$d_{jk} = \langle x^j(T), Cx^k(T)\rangle + \int_{t_0}^{T} \langle x^j(t), Q(t)x^k(t)\rangle dt.$$

Согласно представлению (2.6) и свойству (2.5) имеем

$$\int_{t_0}^{T} u^2(t,z)dt = \sum_{j,k=0}^{m+1} z_j z_k \int_{t_0}^{T} \varphi_j(t)\varphi_k(t)dt =$$

$$= \sum_{\substack{j,k=0 \\ |j-k|\le 1}}^{m+1} z_j z_k \int_{T_j \bigcap T_k} \varphi_j(t)\varphi_k(t)dt = \langle z, Fz\rangle.$$

Здесь $F \in R^{(m+2)\times(m+2)}$ симметричная, трехдиагональная матрица с элементами

$$f_{jk} = \int_{T_j \bigcap T_k} \varphi_j(t)\varphi_k(t)dt, \quad j,k = \overline{0, m+1}, \quad |j-k| \le 1.$$

Кроме того, отметим, что матрица F положительно определена

В совокупности получаем итоговое выражение для функционала $\Phi(u)$ на множестве управлений $u(t,z)$

$$\varphi(z) = \Phi(0) + \langle d, z\rangle + \frac{1}{2}\langle z, (D+qF)z\rangle$$

вместе с соответствующей (2.1)-(2.3) конечномерной задачей

$$\varphi(z) \to min, \quad z \in [u_-, u_+], \tag{2.8}$$

Проведем характеризацию задачи (2.8) в части свойств выпуклости-вогнутости целевой функции в зависимости от условий на матрицы C, $Q(t)$ и параметр $q > 0$ в исходной постановке (2.1)–(2.3).

В текущих предположениях (C, $Q(t)$ — знаконеопределенные матрицы) матрица D также является знаконеопределенной, поэтому $\varphi(z)$ — общая квадратичная функция. Следовательно, задача (2.8) является не выпуклой, и возможности ее глобального решения ограничены.

Однако с учетом положительной определенности матрицы F имеется возможность обеспечить это свойство для матрицы $D + qF$ за счет условия на параметр q.

Получим это условие (оценка снизу), используя экстремальное свойство отношения Рэлея

$$\min_{z\neq 0} \frac{\langle z, Az\rangle}{\langle z, z\rangle} = \lambda_{min}(A),$$

где $\lambda_{min}(A)$ — минимальное собственное число матрицы A.

Имеем цепочку соотношений для $z \neq 0$

$$\frac{\langle z, (D+qF)z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \frac{\langle z, Dz\rangle}{\langle z, z\rangle} + q\frac{\langle z, Fz\rangle}{\langle z, z\rangle} \geq$$

$$\geq \min_{z\neq 0} \frac{\langle z, Dz\rangle}{\langle z, z\rangle} + q\min_{z\neq 0} \frac{\langle z, Fz\rangle}{\langle z, z\rangle} =$$

$$= \lambda_{min}(D) + q\lambda_{min}(F) \geq 0.$$

Поскольку $\lambda_{min}(D) < 0$ (D — знаконеопределенная матрица), $\lambda_{min}(F) > 0$ (F — положительно определенная матрица), то получаем спектральную оценку снизу для параметра q

$$q \geq \frac{|\lambda_{min}(D)|}{\lambda_{min}(F)}, \tag{2.9}$$

которая гарантирует неотрицательную определенность матрицы $D+$ $+qF$:

$$\langle z, (D+qF)z\rangle \geq 0, \quad z \neq 0.$$

Тем самым, функция $\varphi(z)$ приобретает свойство выпуклости.

Таким образом, приходим к заключению: невыпуклая задача (2.1)-(2.3) при условии (2.9) на выбор параметра q аппроксимируется в конечномерном варианте выпуклой квадратичной задачей (2.8). Такая задача (тем более с простейшими ограничениями) допускает решение за конечное число итераций методом особых точек [2; 8].

Выделим случай, когда исходная задача (2.1)–(2.3) является выпуклой, т. е. матрицы C, $Q(t)$ неотрицательно определены (принцип максимума является достаточным условием оптимальности). Тогда матрица $D \geq 0$ и задача (2.8) сохраняет свойство выпуклости $\forall\, q > 0$, что является позитивным фактором в плане глобального решения.

Рассмотрим, наконец, обратную ситуацию, когда матрицы C, $Q(t)$ неположительно определены. Тогда матрица $D \leq 0$. Возьмем за основу усиленное условие $D < 0$, т.е. $\lambda_{max}(D) < 0$.

Получим оценку сверху для отношения Рэлея

$$\frac{\langle z,(D+qF)z\rangle}{\langle z,z\rangle} \le \max_{z\neq 0}\frac{\langle z,Dz\rangle}{\langle z,z\rangle} + q\max_{z\neq 0}\frac{\langle z,Fz\rangle}{\langle z,z\rangle} =$$

$$= \lambda_{max}(D) + q\lambda_{max}(F) < 0.$$

Отсюда получаем оценку сверху для параметра

$$q < \frac{|\lambda_{max}(D)|}{\lambda_{max}(F)}, \tag{2.10}$$

которая обеспечивает условие $D + qF < 0$.

Таким образом, при условии (2.10) функция $\varphi(z)$ является строго вогнутой. Следовательно, задача (2.8) относительно гиперкуба эквивалентна задаче минимизации на множестве его угловых точек

$$\varphi(z) \to min, \quad z_i = u_- \vee u_+, \quad i = \overline{0, m+1}.$$

Такая задача реализуется простым перебором 2^{m+2} точек. Допустима также специализированная итерационная схема с монотонным убыванием целевой функции: метод условного градиента с процедурой улучшения экстремальных точек [10].

Замечание 1. Более общий вариант задачи (2.1)-(2.3) содержит терминальные ограничения - равенства

$$\langle p^i, x(T)\rangle + q_i = 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Параметризация этих условий вполне очевидна

$$\langle p^i, x(T,z)\rangle = \langle p^i, x(T,0)\rangle + \sum_{j=0}^{m+1} z_j \langle p^i, x^j(T)\rangle.$$

В результате получаем расширенный вариант конечномерной задачи (2.8) с дополнительными линейными ограничениями. При этом все последующие утверждения относительно задачи (2.8) сохраняются.

3. Степенной метод и его интерпретация

Имея в виду дальнейшее применение метода условного градиента, рассмотрим характерную невыпуклую задачу на максимум нормы конечного состояния

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), x(T)\rangle \to max$$

в условиях (2.2), (2.3) для $x^0 = 0$, $u_- = -1$, $u_+ = 1$.

В данном случае оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией со значениями ± 1, поэтому соответствующую параметризацию реализуем в этом классе функций. По аналогии с [6] введем на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку узлов $t_i = t_0 + ih$, $i = \overline{0, m}$ с шагом $h = \frac{T - t_0}{m}$. Определим на $[t_0, T]$ опорные функции

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in (t_{j-1}, t_j], \\ 0, & t \notin (t_{j-1}, t_j], \end{cases}$$

сформируем управления

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t)$$

и соответствующие фазовые траектории

$$x(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j x^j(t),$$

где $x^j(t)$ - решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\chi_j(t), \quad x(t_0) = 0.$$

Образуем матрицу $X \in R^{n \times m}$ со столбцами $x^j(T)$.

Предположим, что $rank X = max$ и введем положительно определенную матрицу $G = X^T X$ с элементами $\langle x^i(T), x^j(T) \rangle$, $i, j = \overline{1, m}$.

В результате получаем задачу максимизации строго выпуклой квадратичной функции на гиперкубе

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{2}\langle y, Gy \rangle \to max, \quad y_i \in [-1; 1], \quad i = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу

$$\varphi_0(y) \to max, \quad \langle y, y \rangle = 1 \tag{3.1}$$

с глобальным решением y^{max}.

Организуем степенной метод с нормировкой

$$y^{k+1} = \frac{Gy^k}{||Gy^k||}, \quad k = 0, 1, ...$$

Как известно [4], при условии неортогональности $\langle y^0, y^{max} \rangle \neq 0$ имеет место сходимость $y^k \to y^{max}$, $k \to \infty$.

С другой стороны, метод условного градиента с единичным шагом для задачи (3.1) имеет вид

$$y^{k+1} = \frac{\nabla \varphi_0(y^k)}{|| \nabla \varphi_0(y^k)||}, \quad k = 0, 1, ...$$

Поскольку $\bigtriangledown\varphi_0(y^k) = Gy^k$, то указанные методы совпадают. При этом в силу строгой выпуклости функции $\varphi_0(y)$ выполняется условие монотонности $\varphi_0(y^{k+1}) \geq \varphi_0(y^k)$.

Таким образом, метод условного градиента для невыпуклой задачи на гиперсфере обеспечивает, вообще говоря, сходимость к глобальному решению.

Рассмотрим далее задачу максимизация той же функции на множестве угловых точек гиперкуба $y_i \in [-1; 1]$

$$\varphi_0(y) \to max, \quad y_i^2 = 1, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.2}$$

Сформулируем метод условного градиента в данном случае

$$y_i^{k+1} = sign \bigtriangledown_i \varphi_0(y^k), \quad k = 0, 1, ... \quad (sign\, 0 = \pm 1), \tag{3.3}$$

где $\bigtriangledown_i$ - i-тая координата градиента.

Свойство монотонности по целевой функции сохраняется. Вопрос о получении глобального решения в результате перебора (3.3) угловых точек остается открытым.

4. Улучшение экстремальных точек

Проведем обсуждение процедуры (3.3). Понятно, что

$$\bigtriangledown_i\varphi_0(y^k)(y_i^{k+1} - y_i^k) \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$

поэтому

$$\Delta_k = \langle \bigtriangledown\varphi_0(y^k), y^{k+1} - y^k \rangle \geq 0.$$

Если $y^{k+1} \neq y^k$, то имеет место строгое возрастание для функции $\varphi_0 : \varphi_0(y^{k+1}) - \varphi_0(y^k) > \Delta_k$.

Пусть для некоторого индекса $i \in \{1, ..., m\}$ $\bigtriangledown_i\varphi_0(y^k) = 0$.

Тогда $y_i^{k+1} = \pm 1$, т.е. всегда можно обеспечить условие $y_i^{k+1} \neq y_i^k$, что влечет за собой свойство увеличения $\varphi_0(y^{k+1}) > \varphi_0(y^k)$.

Таким образом, условие остановки итерационного перебора (3.3) $y^{k+1} = y^k$ сопровождается неравенствами $\bigtriangledown_i\varphi_0(y^k) \neq 0$, $i = \overline{1, m}$.

Выделим экстремальную (неподвижную) точку отображения (3.3)

$$y_i = sign \bigtriangledown_i \varphi_0(y), \quad \bigtriangledown_i\varphi_0(y) \neq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

и формализуем две простые процедуры ее улучшения в рамках задачи (3.2).

Будем использовать формулу приращения целевой функции

$$\varphi_0(y + \Delta y) - \varphi_0(y) = \langle \bigtriangledown\varphi_0(y), \Delta y \rangle + \frac{1}{2}\langle X\Delta y, X\Delta y \rangle,$$

в которой матрица X составлена из столбцов $x^i(T)$, $i = \overline{1,m}$.

Организуем процедуру последовательного переключения координат экстремальной точки y: $y_i \Rightarrow -y_i$, $i = \overline{1,m}$ с выбором наилучшего варианта по приращению целевой функции. В геометрической интерпретации это соответствует перебору соседних (смежных) относительно y угловых точек с выбором наилучшей по значению целевой функции.

Для $i \in \{1, ..., m\}$ положим $\delta y_i = -2y_i$ $(y_i + \delta y_i = -y_i)$ и определим частное приращение $\Delta_i y = \delta y_i e^i$, где $e^i \in R^m$ - i-тый орт. При этом $\bigtriangledown_i \varphi(y)\delta y_i = -2|\bigtriangledown_i \varphi(y)|$, и формула приращения принимает вид

$$\varphi_0(y + \Delta_i y) - \varphi_0(y) = \bigtriangledown_i \varphi_0(y)\delta y_i + \frac{1}{2}(\delta y_i)^2 \langle x^i(T), x^i(T)\rangle =$$

$$= 2(-|\bigtriangledown_i \varphi_0(y)| + \langle x^i(T), x^i(T)\rangle).$$

Определим функцию

$$g_1(y) = \max_{1 \le i \le m} (-|\bigtriangledown_i \varphi_0(y)| + \langle x^i(T), x^i(T)\rangle).$$

В результате приходим к утверждению.

Лемма 1. *Пусть $g_1(y) > 0$, причем максимум достигается на индексе $i_1 \in \{1, ..., m\}$. Тогда экстремальная точка y улучшается переключением компоненты i_1 :*

$$\varphi_0(y + \Delta_{i_1} y) - \varphi_0(y) = 2g_1(y) > 0.$$

Следствие 1. *Неравенство $g_1(y) \le 0$ есть необходимое условие максимума экстремальной точки y в задаче (3.2).*

Перейдем к варианту двухкомпонентного переключения, сохраняя схему реализации при условии $g_1(y) \le 0$ (улучшение в "первом порядке" не произошло).

Для $i, j \in \{1, ..., m\}$, $i < j$ определим частное приращение вектора y по компонентам i, j:

$$\Delta_{i,j} y = \delta y_i e^i + \delta y_j e^j.$$

Соответствующее приращение функции φ_0 принимает вид

$$\varphi_0(y + \Delta_{i,j} y) - \varphi_0(y) = \bigtriangledown_i \varphi_0(y)\delta y_i + \bigtriangledown_j \varphi_0(y)\delta y_j +$$

$$+\frac{1}{2}[(\delta y_i)^2 \langle x^i(T), x^i(T)\rangle + 2\delta y_i \delta y_j \langle x^i(T), x^j(T)\rangle +$$

$$+(\delta y_j)^2 \langle x^j(T), x^j(T)\rangle] = 2[p_i(y) + p_j(y) + 2y_i y_j \langle x^i(T), x^j(T)\rangle].$$

Здесь

$$p_k(y) = -|\bigtriangledown_k \varphi_0(y)| + \langle x^k(T), x^k(T)\rangle, \quad k = i, j.$$

Согласно определению функции $g_1(y)$

$$p_k(y) \leq g_1(y) \leq 0.$$

Введем функцию

$$g_2(y) = \max_{\substack{i,j=\overline{1,m} \\ i<j}} (p_i(y) + p_j(y) + 2y_i y_j \langle x^i(T), x^j(T) \rangle).$$

Отсюда получаем результат.

Лемма 2. *Пусть $g_2(y) > 0$, причем максимум достигается на паре индексов i_2, j_2. Тогда экстремальная точка y улучшается переключением пары компонент i_2, j_2 :*

$$\varphi_0(y + \Delta_{i_2,j_2} y) - \varphi_0(y) = 2g_2(y) > 0.$$

Следствие 2. *Неравенство $g_2(y) \leq 0$ есть необходимое условие максимума экстремальной точки y в задаче (3.2).*

Замечание 2. Следует отметить, что при подсчете значения $g_2(y)$ величины $p_i(y)$, $p_j(y)$ уже известны в процессе вычисления $g_1(y)$. Если улучшение произошло, то полученная точка $y + \Delta_{i_1} y$ или $y + \Delta_{i_2,j_2} y$ выбирается в качестве начального приближения для следующего цикла итераций метода условного градиента.

5. Заключение

Приближенное решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления с параметром проводится на основе конечномерной модели, которая получена в результате кусочно-линейной аппроксимации допустимых управлений. Получены условия на параметр, которые обеспечивают решение конечномерных задач за конечное число итераций. Для задачи на максимум нормы определены возможности степенного метода с нормировкой и построены процедуры улучшения экстремальных точек, повышающие уровень эффективности технологии глобального решения.

Список литературы

1. Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67–84.
2. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. М. : Физматлит, 2005. 304 с.

3. Матвеев А. С., Якубович В. А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 540 с.
4. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М. : Мир, 1983. 384 с.
5. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : Физматлит, 2000. 160 с.
6. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Параметризация некоторых задач управления линейными системами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т.30. С. 83–98. htts://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83
7. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
8. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. М. : Наука, 1986. 328 с.
9. Хлебников М. В., Щербаков П. С., Честнов В. Н. Задача линейно-квадратичного управления: I. Новое решение // Автоматика и телемеханика. 2015. № 12. С. 65–79. htts://doi.org/10.1134/S0005117915120048
10. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. On Resolution of an Extremum Norm Problem for the Terminal State of a Linear System // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2020. Т. 34. С. 3-17. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.3

Владимир Андреевич Срочко, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, email: srochko@math.isu.ru

Елена Владимировна Аксенюшкина, кандидат физико-математических наук, доцент, Байкальский государственный университет, Российская Федерация, 664015, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, тел.: (3952)500008, email: aks.ev@mail.ru

Владимир Георгиевич Антоник, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521276, email: vga@math.isu.ru, ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-1230-7459

Поступила в редакцию 20.07.2021

Resolution of a Linear-quadratic Optimal Control Problem Based on Finite-dimensional Models

V. A. Srochko[1], E. V. Aksenyushkina[2], V. G. Antonik[1]

[1] *Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation*
[2] *Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation*

Abstract. We consider a linear-quadratic optimal control problem with indefinite matrices and the interval control constraint. The problem also has a regularization parameter in the functional. The approximate solution of the problem is carried out on subsets of admissible controls, which are formed using linear combinations of special functions with an orientation to the optimal control structure due to the maximum principle. As a result of this procedure, a finite-dimensional quadratic optimization problem with the interval constraint on variables is obtained.

The following relations between the variational problem and its finite-dimensional model are established: the convexity property of the optimal control problem is preserved for finite-dimensional model; a nonconvex optimal control problem under a certain condition on the regularization parameter (estimate from below) is approximated by a convex quadratic problem, which is solved in a finite number of operations;a special non-convex optimal control problem with an upper bound on the regularization parameter passes into the problem of minimizing a concave function on a finite set of points. A special case of a non-convex optimal control problem for the maximum of the norm of the final state is distinguished. Two procedures for improving the extreme points of finite-dimensional model are constructed, which reduce the computational costs for the global solution of the problem within the framework of the linearization method.

Keywords: linear-quadratic optimal control problem, finite-dimensional models, finite solution methods.

References

1. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V. Development and experience of using the parametrization method in degenerate dynamic optimization problems. *Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems*, 2004, no. 5, pp. 67-84. (in Russian)
2. Izmailov A.F., Solodov M.V. *Numerical optimization methods.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 304 p. (in Russian)
3. Matveev A.S., Yakubovich V.A. *Optimal control systems: Ordinary Differential Equations. Special problems.* St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Publ., 2003, 540 p. (in Russian)
4. Parlett B. *Symmetric eigenvalue problem. Numerical methods.* Moscow, Mir Publ., 1983, 384 p. (in Russian)
5. Srochko V.A. *Iterative methods for solving optimal control problems.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 160 p. (in Russian)
6. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V. Parametrization of some control problems of linear systems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 30, pp. 83-98. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83 (in Russian)
7. Strekalovsky A.S. *Elements of nonconvex optimization.* Novosibirsk, Nauka Publ., 2003, 356 p. (in Russian)
8. Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V. V. *Optimization methods.* Moscow, Nauka Publ., 1986, 328 p. (in Russian)
9. Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Chestnov V.N. The problem of linear-quadratic control: I. A new solution. *Automation and telemechanics*, 2015, no. 12, pp. 65-79. https://doi.org/10.1134/S0005117915120048 (in Russian)
10. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V. On Resolution of an Extremum Norm Problem for the Terminal State of a Linear System. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 34, pp. 3-17. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.3

Vladimir Srochko, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, email: srochko@math.isu.ru

Elena Aksenyushkina, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Baikal State University, 11, Lenin st., Irkutsk, 664015, Russian Federation, tel.: +7(3952)500008, email: aks.ev@mail.ru

Vladimir Antonik, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), associate professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: +7(3952)521276, email: vga@math.isu.ru, ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-1230-7459

Received 20.07.2021