Серия «Математика»
2021. Т. 36. С. 29—43

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.956.32:519.21
MSC 60H15, 35A09
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.29

Представление решения задачи Гурса для линейных стохастических гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка

К. Б. Мансимов[1,2], Р. О. Масталиев[1]

[1] *Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан*
[2] *Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан*

Аннотация. Рассматривается система линейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа второго порядка с краевыми условиями Гурса. Ранее в ряде работ были получены представления решения в задаче Гурса для линейных стохастических уравнений гиперболического типа классическим способом при предположении достаточной гладкости коэффициентов слагаемых, входящих в правую часть уравнения. Между тем при исследовании многих стохастических прикладных задач оптимального управления, описываемых линейными или же нелинейными стохастическими дифференциальными уравнениями, в частных производных гиперболического типа второго порядка предположения достаточной гладкости данных уравнений не являются естественными. Исходя из этого, в рассматриваемой задаче Гурса, в отличие от известных работ, гладкость коэффициентов слагаемых в правой части уравнения не предполагается. Они считаются только измеримыми и ограниченными матриц-функциями. Эти предположения, являясь естественными, позволяют в дальнейшем исследовать также широкий класс задач оптимального управления, описываемых системами стохастических гиперболических уравнений второго порядка. В работе введен стохастический аналог матрицы Римана, получено интегральное представление решения рассматриваемой краевой задачи в явном виде через краевые условия. Аналог матрицы Римана введен как решение двумерного матричного интегрального уравнения типа Вольтерра с одномерными слагаемыми, изучен ряд свойств аналога матрицы Римана.

Ключевые слова: линейная стохастическая система Гурса – Дарбу, представление решения краевой задачи, метод Римана, стохастический аналог матрицы Римана.

1. Введение

Метод Римана представления решений различных краевых задач хорошо известен в теории линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными [2; 3; 6]. В этом методе предполагается существование вспомогательной функции Римана, обладающей известными свойствами гладкости, при предположениях достаточной гладкости коэффициентов слагаемых в правой части уравнения. Функция Римана играет фундаментальную роль в теории линейных уравнений гиперболического типа и с её помощью удаётся, как правило, записать решение задач Гурса в квадратурах.

В [1] выводится интегральная формула решения краевой задачи, выраженная в явном виде через краевые условия для случая разрывных коэффициентов.

В предлагаемой работе используются некоторые идеи [1] для представления решения линейного стохастического гиперболического уравнения второго порядка с краевыми условиями Гурса [4; 5; 9]. Установлена интегральная формула, выражающая в явном виде искомое решение через краевые условия.

Следует отметить, что основным преимуществом метода, в отличие от работы [2–4; 9] и др. является то, что он "работает" даже тогда, когда коэффициенты не являются гладкими.

В дальнейшем полученное представление предполагается использовать при изучении различных стохастических задач оптимального управления системами Гурса – Дарбу [7; 8; 10].

2. Постановка задачи

Через $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]\,, y = (t, x) \in D$ обозначим прямоугольник.

Пусть поток σ-алгебр $F_y = F_{tx}$ есть семейство σ-алгебр $F_y \in F$, определенных на основном вероятностном пространстве $(\Omega, F, P)\,$, причем $F_y \subset F_{y'}$, если $y \leq y^{'}$, (т.е. $t \leq t^{'}, x \leq x^{'}$).

Рассмотрим следующую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений гиперболического типа в частных производных

$$\frac{\partial^2 z\,(t,x)}{\partial t \partial x} = A\,(t,x)\,z\,(t,x) + B\,(t,x)\,\frac{\partial z\,(t,x)}{\partial t} + C\,(t,x)\,\frac{\partial z\,(t,x)}{\partial x} +$$

$$+ f\,(t,x) + D\,(t,x)\,z\,(t,x)\,\frac{\partial^2 W\,(t,x)}{\partial t \partial x},\ (t,x) \in D, \qquad (2.1)$$

с краевыми условиями типа Гурса:

$$z\,(t_0, x) = a\,(x)\,,$$

$$z\left(t,x_0\right)=b\left(t\right), \tag{2.2}$$

$$a\left(x_0\right)=b\left(t_0\right).$$

Здесь $z\left(t,x\right)$ – искомая $n-$ мерная вектор-функция, $A\left(t,x\right), B\left(t,x\right), C\left(t,x\right), D\left(t,x\right)$ – заданные измеримые и ограниченные $(n\times n)$ – матрицы коэффициентов, $f\left(t,x\right)$ – заданная $n-$ мерная измеримая и ограниченная вектор-функция, $a\left(x\right), b\left(t\right)$ – заданные в $[x_0,x_1]$ и $[t_0,t_1]$ соответственно, $n-$ мерные вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица, а $\frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t\partial x}$ – $n-$ мерный двухпараметрический «белый шум» на плоскости [4; 10].

В случае, когда $D(t,x)=0$, т. е. в детерминированном случае, эта задача рассматривалась в [1], а стохастическая задача Гурса подобного типа для достаточно гладких коэффициентов $B(t,x), C(t,x)$ изучалась в [4; 9].

Целью предлагаемой статьи является нахождение интегрального представления решения краевой задачи (2.1)–(2.2) с помощью стохастического аналога матрицы Римана.

Заметим, что под решением задачи (2.1)–(2.2) понимается случайная функция $z\left(t,x\right)$, подчиненная потоку σ-алгебр $\{F_{tx},(t,x)\in D\}$, для которой соотношения (2.1)–(2.2) выполняются с вероятностью 1 (см. напр. [5; 9]).

Существование решения в вышеприведенном смысле рассматриваемой краевой задачи при этом заранее предполагается.

3. Метод исследования и основные результаты.

Пусть $p\left(t,x;\tau,s\right)$ и $q\left(t,x;\tau,s\right)$ – $(n\times n)$-мерные измеримые и ограниченные матриц-функции,причем $p(t,x;\tau,s)$ абсолютно непрерывна по s на $[x_0,x]$ почти при всех $(t,x,\ \tau)\in D\times[t_0,t]$, $q(t,x;\tau,s)$ абсолютно непрерывна по τ на $[t_0,t]$ почти при всех $(t,x,\ s)\in D\times[x_0,x]$, причем, $p(t,x;\tau,x)$ и $q(t,x;t,s)$ абсолютно непрерывны соответственно по τ на $[t_0,t]$ и по s на $[x_0,x]$.

Тогда для суммы $p\left(t,x;\tau,s\right)+q(t,x;\tau,s)$ имеет место очевидное тождество

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)\frac{\partial^2 z\left(\tau,s\right)}{\partial\tau\partial s}dsd\tau=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)A\left(\tau,s\right)z\left(\tau,s\right)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)B\left(\tau,s\right)\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial\tau}dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)C\left(\tau,s\right)\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial s}dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)f\left(\tau,s\right)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)D\left(\tau,s\right)z\left(\tau,s\right)\frac{\partial^2 W\left(\tau,s\right)}{\partial\tau\partial s}dsd\tau. \qquad (3.1)$$

Применяя формулу Грина для прямоугольных областей, получим, что

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)\frac{\partial^2 z\left(\tau,s\right)}{\partial\tau\partial s}dsd\tau=$$

$$=p\left(t,x;t,x\right)z\left(t,x\right)-p\left(t,x;t_0,x\right)z\left(t_0,x\right)-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial p\left(t,x;\tau,x\right)}{\partial\tau}z\left(\tau,x\right)d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t}p\left(t,x;\tau,x_0\right)\frac{\partial z\left(\tau,x_0\right)}{\partial\tau}d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial p\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial s}\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial\tau}dsd\tau+q\left(t,x;t,x\right)z(t,x)-q\left(t,x;t,x_0\right)z\left(t,x_0\right)-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial q\left(t,x;t,s\right)}{\partial s}z\left(t,s\right)ds-\int_{x_0}^{x}q\left(t,x;t_0,s\right)\frac{\partial z\left(t_0,s\right)}{\partial s}ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial q\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial\tau}\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial s}dsd\tau.$$

Тогда учитывая это тождество, формулу (3.1) можно переписать в виде:

$$\left(p\left(t,x;t,x\right)+q\left(t,x;t,x\right)\right)z\left(t,x\right)-p\left(t,x;t_0,x\right)z\left(t_0,x\right)-$$

$$-q\left(t,x;t,x_0\right)z\left(t,x_0\right)-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial p\left(t,x;\tau,x\right)}{\partial\tau}z\left(\tau,x\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}p\left(t,x;\tau,x_0\right)\frac{\partial z\left(\tau,x_0\right)}{\partial\tau}d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial p\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial s}\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial\tau}dsd\tau-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial q\left(t,x;t,s\right)}{\partial s}z\left(t,s\right)ds-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x}q\left(t,x;t_0,s\right)\frac{\partial z\left(t_0,s\right)}{\partial s}ds-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial q\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial\tau}\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial s}dsd\tau=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)A\left(\tau,s\right)z\left(\tau,s\right)dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)B\left(\tau,s\right)\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial\tau}dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)C\left(\tau,s\right)\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial s}dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)f\left(\tau,s\right)dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)D\left(\tau,s\right)z\left(\tau,s\right)\frac{\partial^2 W\left(\tau,s\right)}{\partial\tau\partial s}dsd\tau. \tag{3.2}$$

Теперь предположим, что существуют измеримые и ограниченные $(n\times n)$ −мерные матриц-функции $\xi(t,x;\tau,s)$ и $\eta(t,x;\tau,s)$ первая из которых $\xi(t,x;\tau,s)$ абсолютно непрерывна по τ на $[t_0,t]$ почти при всех $(t,x,\ s)\in D\times[x_0,x]$, а вторая $\eta(t,x;\tau,s)$, абсолютно непрерывна по s на $[x_0,x]$ почти при всех $(t,x,\ \tau)\in D\times[t_0,t]$.

Тогда ясно справедливость тождеств

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\xi(t,x;\tau,s)\frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial\tau}dsd\tau=\int\limits_{x_0}^{x}\xi\left(t,x;t,s\right)z\left(t,s\right)ds-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x} \xi\left(t,x;t_0,s\right) z\left(t_0,s\right) ds-\int\limits_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \xi\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial \tau} z\left(\tau,s\right) ds d\tau, \qquad (3.3)$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \eta(t,x;\tau,s) \frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial s} ds d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \eta\left(t,x;\tau,x\right) z\left(\tau,x\right) d\tau -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t} \eta\left(t,x;\tau,x_0\right) z\left(\tau,x_0\right) d\tau-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial \eta\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial s} z\left(\tau,s\right) ds d\tau. \qquad (3.4)$$

Учитывая формулы (3.3),(3.4), а также группируя подобные члены, формулу (3.2) можно переписать в виде:

$$\left(p\left(t,x;t,x\right)+q\left(t,x;t,x\right)\right) z\left(t,x\right)-p\left(t,x;t_0,x\right) z\left(t_0,x\right)-$$

$$-q\left(t,x;t,x_0\right) z\left(t,x_0\right)-\int\limits_{t_0}^{t} p\left(t,x;\tau,x_0\right) \frac{\partial z\left(\tau,x_0\right)}{\partial \tau} d\tau+\int\limits_{x_0}^{x} \xi\left(t,x;t_0,s\right) z\left(t_0,s\right) ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} \eta\left(t,x;\tau,x_0\right) z\left(\tau,x_0\right) d\tau-\int\limits_{x_0}^{x} q\left(t,x;t_0,s\right) \frac{\partial z\left(t_0,s\right)}{\partial s} ds-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial p\left(t,x;\tau,x\right)}{\partial \tau}+\eta\left(t,x;\tau,x\right)\right] z\left(\tau,x\right) d\tau-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial p\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial s}+\right.$$

$$\left.+\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right) B\left(\tau,s\right)-\xi\left(t,x;\tau,s\right)\right] \frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial \tau} ds d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial q\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial \tau}+\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right) C\left(\tau,s\right)-\eta\left(t,x;\tau,s\right)\right] \times$$

$$\times \frac{\partial z\left(\tau,s\right)}{\partial s} ds d\tau-\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial q\left(t,x;t,s\right)}{\partial s}+\xi\left(t,x;t,s\right)\right] z\left(t,s\right) ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial \xi\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial \tau}+\frac{\partial \eta\left(t,x;\tau,s\right)}{\partial s}-\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+\right.\right.$$

$$+q\left(t,x;\tau,s\right)) A\left(\tau,s\right)-\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right) D\left(\tau,s\right) \times$$

$$\left.\times \frac{\partial^2 W\left(\tau,s\right)}{\partial \tau \partial s}\right] z\left(\tau,s\right) ds d\tau-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right) f\left(\tau,s\right) ds d\tau=0. \qquad (3.5)$$

Далее, предположим, что квартет (p, q, ξ, η) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial p(t,x;\tau,s)}{\partial s} + \left(p\left(t,x;\tau,s\right) + q\left(t,x;\tau,s\right)\right)B\left(\tau,s\right) - \xi\left(t,x;\tau,s\right) = 0, \\ \frac{\partial q(t,x;\tau,s)}{\partial \tau} + \left(p\left(t,x;\tau,s\right) + q\left(t,x;\tau,s\right)\right)C\left(\tau,s\right) - \eta\left(t,x;\tau,s\right) = 0, \\ \frac{\partial \xi(t,x;\tau,s)}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta(t,x;\tau,s)}{\partial s} - \left(p\left(t,x;\tau,s\right) + q\left(t,x;\tau,s\right)\right)A\left(\tau,s\right) - \\ - \left(p\left(t,x;\tau,s\right) + q\left(t,x;\tau,s\right)\right)D\left(\tau,s\right)\frac{\partial^2 W(\tau,s)}{\partial \tau \partial s} = 0, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial p(t,x;\tau,x)}{\partial \tau} = -\eta\left(t,x;\tau,x\right), \\ \frac{\partial q(t,x;t,s)}{\partial s} = -\xi\left(t,x;t,s\right), \\ p\left(t,x;t,x\right) + q\left(t,x;t,x\right) = E, \end{array}\right. \tag{3.7}$$

где $E - (n \times n) -$ единичная матрица.
Учитывая (3.7) в (3.6), получаем что, выполняются соотношение

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial p(t,x;\tau,x)}{\partial \tau} + \frac{\partial q(t,x;\tau,x)}{\partial \tau} + \left(p\left(t,x;\tau,x\right) + q\left(t,x;\tau,x\right)\right)C\left(\tau,x\right) = 0, \\ \frac{\partial p(t,x;t,s)}{\partial s} + \frac{\partial q(t,x;t,s)}{\partial s} + \left(p\left(t,x;t,s\right) + q\left(t,x;t,s\right)\right)B\left(t,s\right) = 0, \\ p\left(t,x;t,x\right) + q\left(t,x;t,x\right) = E. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Далее, с учетом (3.6), (3.7) и принимая во внимание (3.5), имеем

$$z\left(t,x\right) = p\left(t,x;t_0,x\right)a\left(x\right) + q\left(t,x;t,x_0\right)b\left(t\right) + \int_{t_0}^{t} p\left(t,x;\tau,x_0\right)\dot{b}\left(\tau\right)d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{t} \eta\left(t,x;\tau,x_0\right)b\left(\tau\right)d\tau + \int_{x_0}^{x} q\left(t,x;t_0,s\right)\dot{a}\left(s\right)ds - \int_{x_0}^{x} \xi\left(t,x;t_0,s\right)a\left(s\right)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \left(p\left(t,x;\tau,s\right) + q\left(t,x;\tau,s\right)\right)f\left(\tau,s\right)ds d\tau\ . \tag{3.9}$$

С другой стороны из (3.6) получаем, что

$$\eta\left(t,x;\tau,x_0\right) = \left(\frac{\partial q\left(t,x;\tau,x_0\right)}{\partial \tau} + \left(p\left(t,x;\tau,x_0\right) + q\left(t,x;\tau,x_0\right)\right)C\left(\tau,x_0\right)\right),$$

$$\xi\left(t,x;t_0,s\right) = \left(\frac{\partial p\left(t,x;t_0,s\right)}{\partial s} + \left(p\left(t,x;t_0,s\right) + q\left(t,x;t_0,s\right)\right)B\left(t_0,s\right)\right).$$

Учитывая последние соотношения в (3.9), имеем

$$z\left(t,x\right) = p\left(t,x;t_0,x\right)a\left(x\right) + q\left(t,x;t,x_0\right)b\left(t\right) + \int_{t_0}^{t} p\left(t,x;\tau,x_0\right)\dot{b}\left(\tau\right)d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{t} \frac{\partial q\left(t,x;\tau,x_0\right)}{\partial \tau}b\left(\tau\right)d\tau - \int_{t_0}^{t}\left(p\left(t,x;\tau,x_0\right) + q\left(t,x;\tau,x_0\right)\right)C\left(\tau,x_0\right)b\left(\tau\right)d\tau +$$

$$+\int_{x_0}^{x} q\left(t,x;t_0,s\right)\dot{a}\left(s\right)ds - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial p\left(t,x;t_0,s\right)}{\partial s}a\left(s\right)ds -$$

$$-\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;t_0,s\right)+q\left(t,x;t_0,s\right)\right)B\left(t_0,s\right)a\left(s\right)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)f\left(\tau,s\right)dsd\tau\ .$$

Отсюда, применяя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле, получим

$$z\left(t,x\right)=p\left(t,x;t_0,x\right)a\left(x\right)+q\left(t,x;t,x_0\right)b\left(t\right)+\int\limits_{t_0}^{t}p\left(t,x;\tau,x_0\right)\dot b\left(\tau\right)d\tau-$$

$$-q\left(t,x;t,x_0\right)b(t)+q\left(t,x;t_0,x_0\right)b(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}q\left(t,x;\tau,x_0\right)\dot b\left(\tau\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\left(p\left(t,x;\tau,x_0\right)+q\left(t,x;\tau,x_0\right)\right)C\left(\tau,x_0\right)b\left(\tau\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}q\left(t,x;t_0,s\right)\dot a\left(s\right)ds-p\left(t,x;t_0,x\right)a\left(x\right)+p\left(t,x;t_0,x_0\right)a\left(x_0\right)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}p\left(t,x;t_0,s\right)\dot a\left(s\right)ds-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;t_0,s\right)+q\left(t,x;t_0,s\right)\right)B\left(t_0,s\right)a\left(s\right)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)f\left(\tau,s\right)dsd\tau\ .$$

Из последнего соотношения следует, что

$$z\left(t,x\right)=\left[p\left(t,x;t_0,x_0\right)+q\left(t,x;t_0,x_0\right)\right]a\left(x_0\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[p\left(t,x;\tau,x_0\right)+q\ \left(t,x;\tau,x_0\right)\right]\dot b\left(\tau\right)d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[p\left(t,x;\tau,x_0\right)+q\left(t,x;\tau,x_0\right)\right]C\left(\tau,x_0\right)b\left(\tau\right)d\tau+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\left[p\left(t,x;t_0,s\right)+q(t,x;t_0,s)\right]\dot a\left(s\right)ds-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\left[p\left(t,x;t_0,s\right)+q\left(t,x;t_0,s\right)\right]B\left(t_0,s\right)a\left(s\right)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right]f\left(\tau,s\right)dsd\tau. \tag{3.10}$$

Пусть по определению

$$R\left(t,x;\tau,s\right)=p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right).$$

Учитывая введенное обозначение, из равенства (3.10) получаем

$$z\left(t,x\right)=R\left(t,x;t_0,x_0\right)a\left(x_0\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R\left(t,x;\tau,x_0\right)\left[\dot{b}\left(\tau\right)-C\left(\tau,x_0\right)b\left(\tau\right)\right]d\tau+$$

$$+\int_{x_0}^{x}R\left(t,x;t_0,s\right)\left[\dot{a}\left(s\right)-\ B\left(t_0,s\right)a\left(s\right)\right]ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R\left(t,x;\tau,s\right)f\left(\tau,s\right)dsd\tau. \tag{3.11}$$

Следовательно, доказана

Теорема 1. *Пусть $R\left(t,x;\tau,s\right)=p\left(t,x;\tau,s\right)+q(t,x;\tau,s)$ является решением задачи* (3.8). *Тогда единственное на D решение линейной стохастической задачи Гурса – Дарбу* (2.1)-(2.2) *допускает представление в виде* (3.11).

Заметим, что матрица $R(t,x;\tau,s)$ является стохастическим аналогом матрицы Римана для рассматриваемой стохастической задачи Гурса – Дарбу.

Как видно, при каждом фиксированном $d=\left(\xi\left(t,x;\tau,s\right),\eta\left(t,x;\tau,s\right)\right)$ задача (3.6)–(3.7) является задачей Коши и имеет для каждого d единственное решение $\left(p_d,q_d,\xi_d,\eta_d\right)$. Однако все решения задачи (3.6)-(3.7) обладают следующим свойством инвариантности.

Теорема 2. *Для всех решений (p_d,q_d,ξ_d,η_d) задачи* (3.6)–(3.7) *сумма $R=p_d\left(t,x;\tau,s\right)+q_d\left(t,x;\tau,s\right)$ — инвариантна, т. е. не меняется при изменении d и является единственным решением двумерного стохастического интегрального уравнения типа Вольтерра с одномерными* *слагаемыми*

$$R\,(t,x;\tau,s)=E+\int\limits_{\tau}^{t}R\,(t,x;\alpha,s)C\,(\alpha,s)\,d\alpha+$$
$$+\int\limits_{s}^{x}R\,(t,x;\tau,\beta)\,B(\tau,\beta)d\beta+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{s}^{x}R\,(t,x;\alpha,\beta)\,A\,(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta+$$
$$+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{s}^{x}R\,(t,x;\alpha,\beta)\,D\,(\alpha,\beta)\,\frac{\partial^2 W(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}d\alpha d\beta.$$

Доказательство. Из системы (3.6)–(3.7) ясно, что

$$p\,(t,x;\tau,s)=-\int_x^s(p(t,x;\tau,\beta)+q(t,x;\tau,\beta))B(\tau,\beta)d\beta+\int_x^s\xi\,(t,x;\tau,\beta)\,d\beta-$$
$$-\int_t^{\tau}\eta(t,x;\alpha,x)d\alpha+p\,(t,x;t,x)\,,$$
$$q\,(t,x;\tau,s)=-\int_t^{\tau}(p(t,x;\alpha,s)+q(t,x;\alpha,s))C(\alpha,s)d\alpha+$$
$$+\int_t^{\tau}\eta\,(t,x;\alpha,s)\,d\alpha-$$
$$-\int_x^s\xi(t,x;t,\beta)d\beta+q\,(t,x;t,x)\,.$$

Тогда

$$p\,(t,x;\tau,s)+q\,(t,x;\tau,s)=p\,(t,x;t,x)+q(t,x;t,x)-$$
$$-\int_t^{\tau}(p(t,x;\alpha,s)+q(t,x;\alpha,s))C(\alpha,s)d\alpha-$$
$$-\int_x^s(p(t,x;\tau,\beta)+q(t,x;\tau,\beta))B(\tau,\beta)d\beta+\int_x^s\xi\,(t,x;\tau,\beta)\,d\beta-$$
$$-\int_t^{\tau}\eta(t,x;\alpha,x)d\alpha+\int_t^{\tau}\eta\,(t,x;\alpha,s)\,d\alpha-\int_x^s\xi\,(t,x;t,\beta)d\beta. \qquad (3.12)$$

Пусть

$$\frac{\partial\xi\,(t,x;\tau,s)}{\partial\tau}=r\,(t,x;\tau,s)\,,$$

где $r\,(t,x;\tau,s)$ – измеримая и ограниченная матриц-функция.

Тогда из (3.6) можно записать

$$\frac{\partial\eta\,(t,x;\tau,s)}{\partial s}=(p\,(t,x;\tau,s)+q\,(t,x;\tau,s))\,A\,(\tau,s)+$$

$$+\left(p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)\right)D\left(\tau,s\right)\frac{\partial^2 W\left(\tau,s\right)}{\partial\tau\partial s}-r\left(t,x;\tau,s\right).$$

Следовательно, имеем

$$\xi\left(t,x;\tau,s\right)=\int_t^\tau r\left(t,x;\alpha,s\right)d\alpha+\xi\left(t,x;t,s\right),$$

$$\eta\left(t,x;\tau,s\right)=\int_x^s\left(p(t,x;\tau,\beta)+q(t,x;\tau,\beta)\right)A(\tau,\beta)d\beta+$$

$$+\int_x^s\left(p\left(t,x;\tau,\beta\right)+q\left(t,x;\tau,\beta\right)\right)D\left(\tau,\beta\right)\frac{\partial^2 W\left(\tau,\beta\right)}{\partial\tau\partial\beta}d\beta-$$

$$-\int_x^s r\left(t,x;\tau,\beta\right)d\beta+\eta\left(t,x;\tau,x\right).$$

Отсюда следует, что

$$\xi\left(t,x;\tau,\beta\right)=\int_t^\tau r\left(t,x;\alpha,\beta\right)d\alpha+\xi\left(t,x;t,\beta\right),$$

$$\eta\left(t,x;\alpha,s\right)=\int_x^s\left(p(t,x;\alpha,\beta)+q(t,x;\alpha,\beta)\right)A(\alpha,\beta)d\beta+$$

$$+\int_x^s\left(p\left(t,x;\alpha,\beta\right)+q\left(t,x;\alpha,\beta\right)\right)D\left(\alpha,\beta\right)\frac{\partial^2 W\left(\alpha,\beta\right)}{\partial\alpha\partial\beta}d\beta-$$

$$-\int_x^s r\left(t,x;\alpha,\beta\right)d\beta+\eta\left(t,x;\alpha,x\right).$$

Учитывая эти соотношения в (3.12) имеем

$$p\left(t,x;\tau,s\right)+q\left(t,x;\tau,s\right)=p\left(t,x;t,x\right)+q(t,x;t,x)-$$

$$-\int\limits_t^\tau\left(p(t,x;\alpha,s)+q(t,x;\alpha,s)\right)C(\alpha,s)d\alpha-$$

$$-\int\limits_x^s\left(p(t,x;\tau,\beta)+q(t,x;\tau,\beta)\right)B(\tau,\beta)d\beta+\int\limits_t^\tau\int\limits_x^s r\left(t,x;\alpha,\beta\right)d\alpha d\beta+$$

$$+\int\limits_x^s\xi\left(t,x;t,\beta\right)d\beta-\int\limits_t^\tau\eta\left(t,x;\alpha,x\right)d\alpha+$$

$$+\int\limits_t^\tau\int\limits_x^s\left(p(t,x;\alpha,\beta)+q(t,x;\alpha,\beta)\right)A(\alpha,\beta)d\alpha d\beta+$$

$$+\int_t^\tau \int_x^s (p(t,x;\alpha,\beta)+q(t,x;\alpha,\beta))D(\alpha,\beta)\frac{\partial^2 W(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}d\alpha d\beta-$$

$$-\int_t^\tau \int_x^s r(t,x;\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta+\int_t^\tau \eta(t,x;\alpha,x)\,d\alpha-\int_x^s \xi(t,x;t,\beta)d\beta.$$

Следовательно

$$R(t,x;\tau,s)=E+\int_\tau^t R(t,x;\alpha,s)C(\alpha,s)\,d\alpha$$

$$++\int_s^x R(t,x;\tau,\beta)\,B(\tau,\beta)d\beta+\int_\tau^t\int_s^x R(t,x;\alpha,\beta)\,A(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta+$$

$$+\int_\tau^t\int_s^x R(t,x;\alpha,\beta)\,D(\alpha,\beta)\,\frac{\partial^2 W(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}d\alpha d\beta.$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Подчеркнем, что в формуле (3.11) полагая $z(t,x)=R(t,x;t_0,x_0)$ и предполагая, что

$$\frac{\partial R(t,s;\tau,s)}{\partial t}=C(t,s)\,R(t,s;\tau,s)\,,$$

$$\frac{\partial R(\tau,x;\tau,s)}{\partial x}=B(\tau,x)\,R(\tau,x;\tau,s)\,,$$

$$R(\tau,s;\tau,s)=E,$$

получим, что

$$\int_{t_0}^t\int_{x_0}^x R(t,x;\tau,s)f(\tau,s)=0.$$

Последние тождества позволяют нам утверждать следующее: □

Теорема 3. *Матричная функция $R(t,x;\tau,s)$ относительно первой пары переменных (t,x) является решением следующего матричного стохастического однородного уравнения*

$$\frac{\partial^2 R(t,x;\tau,s)}{\partial t\partial x}=A(t,x)\,R(t,x;\tau,s)+$$

$$+B(t,x)\,\frac{\partial R(t,x;\tau,s)}{\partial t}+C(t,x)\,\frac{\partial R(t,x;\tau,s)}{\partial x}+$$

$$+D(t,x)\,R(t,x;\tau,s)\,\frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t\partial x},$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial R(t,s;\tau,s)}{\partial t} = C(t,s)\,R(t,s;\tau,s)\,,$$

$$\frac{\partial R(\tau,x;\tau,s)}{\partial x} = B(\tau,x)\,R(\tau,x;\tau,s)\,,$$

$$R(\tau,s;\tau,s) = E.$$

4. Заключение

Рассмотрена краевая задача Гурса – Дарбу для одного линейного стохастического гиперболического уравнения второго порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Установлено интегральное представление решения краевой задачи в явном виде.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания по содержанию статьи.

Список литературы

1. Ахмедов К. Т., Ахиев С. С. Об интегральном представлении решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Известия АН Азербайджанской ССР. Серия физико-технических и математических наук. 1973. № 2. С. 116–120.
2. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1982. 336 с.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
4. Гихман И. И. Общая задача Гурса, содержащая интегралы по двухпараметрическому винеровскому полю // Поведение систем в случайных средах. Донецк, 1975. С. 15-21.
5. Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., Царенко Т. И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Киев : Наукова Думка, 1978. 164 с.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 831с.
7. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. Необходимые условия оптимальности для одного класса стохастических систем с распределенными параметрами // Труды Института математики НАН Беларуси. 2018. № 1. С. 79–87.
8. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. Необходимые условия оптимальности в стохастических задачах оптимального управления системами Гурса – Дарбу при наличии функциональных ограничений типа неравенств // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование : тр. Междунар. симп. Иркутск, 2019. С. 254.
9. Пономаренко Л. Л. Стохастическая бесконечномерная задача Гурса // Математический анализ и теория вероятностей. 1978. С. 140–143.
10. Шайхет Л. Е. Об оптимальном управлении одним классом стохастических дифференциальных уравнений в частных производных // Математические заметки. 1982. Т. 31, вып. 6. С. 140–143.

Камиль Байрамали Мансимов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики БГУ, руководитель лаборатории управления сложных динамических системах, Институт систем управления НАН Азербайджана, Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68,
тел.: (+99412)5109372, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com, ORCID ID http://orcid.org/0000-0002-1518-2279

Рашад Огтай Масталиев, доктор философии по математике (кандидат физико-математических наук), доцент, ведущий научный сотрудник, Институт систем управления НАН Азербайджана, Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68, тел.: (+99412)5109372, e-mail: mastaliyevrashad@gmail.com,
ORCID ID http://orcid.org/0000-0001-6387-2146

Поступила в редакцию 09.01.2021

Representation of the Solution of Goursat Problem for Second Order Linear Stochastic Hyperbolic Differential Equations

K. B. Mansimov[1,2], R. O. Mastaliyev[1]

[1]*Institute of Control Systems of ANAS, Baku, Azerbaijan*
[2]*Baku State University, Baku, Azerbaijan*

Abstract. The article considers second-order system of linear stochastic partial differential equations of hyperbolic type with Goursat boundary conditions. Earlier, in a number of papers, representations of the solution Goursat problem for linear stochastic equations of hyperbolic type in the classical way under the assumption of sufficient smoothness of the coefficients of the terms included in the right-hand side of the equation were obtained. Meanwhile, study of many stochastic applied optimal control problems described by linear or nonlinear second-order stochastic differential equations, in partial derivatives hyperbolic type, the assumptions of sufficient smoothness of these equations are not natural. Proceeding from this, in the considered Goursat problem, in contrast to the known works, the smoothness of the coefficients of the terms in the right-hand side of the equation is not assumed. They are considered only measurable and bounded matrix functions. These assumptions, being natural, allow us to further investigate a wide class of optimal control problems described by systems of second-order stochastic hyperbolic equations. In this work, a stochastic analogue of the Riemann matrix is introduced, an integral representation of the solution of considered boundary value problem in explicit form through the boundary conditions is obtained. An analogue of the Riemann matrix was introduced as a solution of a two-dimensional matrix integral equation of the Volterra type with one-dimensional terms, a number of properties of an analogue of the Riemann matrix were studied.

Keywords: linear Goursat-Darboux stochastic system, representation of solution boundary value problem, Riemann method, stochastic analogue of the Riemann matrix.

References

1. Akhmedov K.T., Akhiyev S.S. Ob integralnom predstavlenii resheniy nekotorykh sistem differentsialnykh uravneniy [On the integral representation of solutions of some systems of differential equations]. *News Natl. Acad. Sci. Azerb. SSR. Ser. Phys. Tec. and Math. Nauk*, 1973, no. 2, pp.116-120. (In Russian)
2. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 336 p. (In Russian)
3. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Mir Publ., 1981, 512 p.(In Russian)
4. Gikhman I.I. Obshchaya zadacha Gursa, soderzhashchaya integraly po dvukhparametricheskomu vinerovskomu polyu [A general Goursat problem containing integrals over a two-parameter Wiener field]. *The behavior of systems in random environments. Donetsk*, 1975, pp. 15-21.(In Rissian)
5. Yermolyev Yu.M., Gulenko V.P., Tsarenko T.I. *Konechno-raznostnyy metod v zadachakh optimalnogo upravleniya* [Finite-difference method in optimal control problems]. Kiyev, Naukova Dumka Publ., 1978, 164 p. (In Russian)
6. Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1964, 831 p. (In Russian)
7. Mansimov K.B., Mastaliev R.O. Neobkhodimyye usloviya optimalnosti dlya odnogo klassa stokhasticheskikh sistem s raspredelennymi parametrami [Necessary optimality conditions for one class of stochastic systems with distributed parameters]. *Proc. Inst. Math. of NAS Belarus*, 2018, no. 1, pp. 79-87. (In Russian)
8. Mansimov K.B., Mastaliev R.O. Neobkhodimyye usloviya optimalnosti v stokhasticheskikh zadachakh optimalnogo upravleniya sistemami Gursa-Darbu pri nalichii funkchionalnykh ogranicheniy tipa neravenstv[Necessary conditions for optimality in stochastic problems of optimal control of Goursat-Darboux systems in the presence of functional constraints such as inequalities]. *Internat. Symp. Dynamical Systems, Optimal Control and Math. Modeling*, Irkutsk, 2019, p. 254.(In Russian)
9. Ponomarenko L.L. Stokhasticheskaya beskonechnomernaya zadacha Gursa [The stochastic infinite-dimensional Goursat problem] *Math. Analysis and Probability Theory*, 1978, pp. 140-143. (In Russian).
10. Shaikhet L.E. Optimal control of one class of stochastic partial differential equations [Ob optimalnom upravlenii odnim klassom stokhasticheskikh differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh]. *Math. Notes*, 1982, vol. 31, no. 6, pp. 140-143.

Kamil Mansimov, Doctor of Sciences (Mathematics and Physics), Professor, Head of the Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University; Institute of Control Systems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, 68, B. Vahabzade st., Baku, AZ 1141,Azerbaijan,
tel.: (+99412) 5109372, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com,
ORCID ID http://orcid.org/0000-0002-1518-2279

Rashad Mastaliyev, Ph. D. Mathematics, Associate Professor, Leading Research, Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Sciences, 68, B. Vahabzade st., Baku, AZ 1141, Azerbaijan, tel.: (+99412) 5109372, e-mail: mastaliyevrashad@gmail.com,
ORCID ID http://orcid.org/0000-0001-6387-2146

Received 09.01.2021