ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Серия «Математика»
2021. Т. 36. С. 14—28

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517
MSC 35K30,35R99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14

Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка*

А. И. Кожанов[1,2], А. В. Дюжева[2]
[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация,*
[2] *Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация*

Аннотация.

Исследуется разрешимость в классах регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву суммируемые с квадратом производные, входящие в соответствующее уравнение) решений нелокальных задач с интегральными по пространственным переменным условиями для линейных параболических уравнений высокого порядка. Обозначается, что ранее подобные задачи изучались для параболических уравнений высокого порядка либо в одномерном случае, либо при выполнении некоторых условий малости на коэффициенты уравнения. Приводятся новые результаты о разрешимости нелокальных задач с интегральными по пространственным переменным условиями для параболических уравнений высокого порядка а) в многомерном по пространственным переменным случае; б) при отсутствии условий малости. Метод исследования основан на переходе от задачи с нелокальными интегральными

* Работа выполнена по плану госзадания "Программа фундаментальных исследований СамГТУ в области химических наук и материаловедения" , тема № FSSE-2020-0005.

условиями к задаче с классическими однородными условиями первого или второго рода на боковой границе для нагруженного интегро-дифференциального уравнения. Описываются некоторые обобщения полученных результатов.

Ключевые слова: параболические уравнения высокого порядка, нелокальные задачи, граничные условия интегрального вида, регулярные решения, единственность, существование.

1. Введение

В настоящей работе изучается разрешимость пространственно нелокальных задач — именно, задач с граничными условиями интегрального вида — для многомерных параболических уравнений высокого порядка.

Направление в теории дифференциальных уравнений, связанное с исследованием разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями, активно развивается в последнее время. Объясняется это потребностями математического моделирования — см. например, работу [14], в которой показывается влияние эффектов нелокальности и памяти на математическую модель того или иного процесса, и потребностями развития собственно математики, поскольку задача с нелокальными условиями вообще, и с нелокальными условиями интегрального вида в частности, представляют собой новый класс задач теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Заметим следующее. Среди многочисленных работ, связанных с исследованием разрешимости нелокальных задач для дифференциальных уравнениях в частных производных с граничными условиями интегрального вида, преобладают работы, в которых изучается одномерный по пространственным переменным случай.

Разрешимость нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений второго порядка изучалась в работах [5; 6]. Подход, предложенный в этих работах, в дальнейшем позволил получить ряд новых результатов о разрешимости нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида для параболических и квазипараболических уравнений [1; 2; 9], псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений [10; 11], квазигиперболических уравнений [15], уравнений смешанного типа [3].

Непосредственно задачам с граничными условиями интегрального вида для параболических уравнений высокого порядка посвящена работа [9]. С одной стороны, в ней используется метод работ [5;6]. С другой же — разрешимость нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида в ней была доказана лишь при выполнении некоторых условий малости.

В настоящей работе будут представлены новые результаты о разрешимости нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида, существенно усиливающие результаты [9] — в частности, условия малости в настоящей работе требоваться не будут.

Уточним, что целью настоящей работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений — именно, решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

Все построения и рассуждения в работе будут проводиться на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения, описания свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [3; 7; 13].

Структурно работа состоит из четырех частей. В первой из них дается постановка изучаемых задач. Во второй и третьей частях доказываются теоремы существования и единственности решений. Наконец, в четвертой части даются некоторые комментарии к полученным результатам, описываются возможности усиления и обобщения.

2. Постановка задач

Пусть Q есть цилиндр, образованный ограниченной областью Ω из пространства R^n переменных $x = (x_1, .., x_n)$ и интервалом $(0, T)$ оси Ot конечной длины T. Далее, пусть Γ есть граница Ω; будем считать, что Γ есть компактное бесконечно дифференцируемое многообразие. Обозначим через S боковую границу цилиндра Q ($S = \Gamma \times (0, T)$).

Пусть p есть натуральное число, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $N_k(x,y)$, $k = 0, .., p-1$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, L есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = v_t + (-1)^p \Delta^p v + c(x,t)v$$

(Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, .., x_n$).

Нелокальная задача 1: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu = f(x,t) \tag{2.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$\Delta^k u(x,t)\big|_S = \int_\Omega N_k(x,y)u(y,t)dy = 0, \quad k = 0, .., p-1. \tag{2.3}$$

Нелокальная задача 2: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (2.1) и такую, что для нее выполняются условие (2.2), а также условия

$$\frac{\partial\Delta^k u(x,t)}{\partial\nu}\bigg|_S = \int_\Omega N_k(x,y)u(y,t)dy = 0, \quad k = 0,..,p-1 \tag{2.4}$$

(ν — вектор внутренней нормы к Γ в текущей точке).

Нелокальные задачи 1 и 2 в случае $p = 2$ изучались в работе [9]; существование регулярных решений задач 1 и 2 в [9] было доказано при выполнении некоторых условий малости, а также при выполнении условия обратимости некоторого интегрального оператора Фредгольма, построенного по функциям $N_k(x,y)$. Как уже говорилось выше, в настоящей работе условия малости будут отсутствовать. Кроме того, условия обратимости будут другими.

3. Разрешимость краевой задачи 1

Будем обозначать для краткости через V банахово пространство

$$V = W_2^{2p,1}(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^p(\Omega)).$$

Для заданной функции $R_1(x,y)$ (введенной ниже) определим оператор $\mathcal{R}_1$ как оператор, ставящий в соответствие функции $v(x)$ функцию $(\mathcal{R}_1 v)(x)$:

$$(\mathcal{R}_1 v)(x) = v(x) - \int_\Omega R_1(x,y)v(y)dy.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

I. Функции $N_0(x,y),..,N_{p-1}(x,y)$ таковы, что существует функция $R_1(x,y)$, определенная при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$ и такая, что

$$R_1(x,y) \in C^{2p}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}),$$

$$\Delta_x^k R_1(x,y) = N_k(x,y) \quad при \quad x \in \Gamma, \quad y \in \overline{\Omega}, \quad k = 0,..,p-1;$$

II. Существуют положительные постоянные ρ_1 и ρ_1 такие, что для любой функции $v(x)$ из пространства $L_2(\Omega)$ выполняются неравенства

$$\rho_1 ||v||_{L_2(\Omega)} \le ||\mathcal{R}_1 v||_{L_2(\Omega)} \le \rho_2 ||v||_{L_2(\Omega)};$$

III. $c(x,t) \in C(\overline{Q})$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача 1 имеет в пространстве V решение, и при том ровно одно.

Доказательство. Положим

$$\tilde{R}_1(x,y,t) = [c(y,t) - c(x,t)]R_1(x,y) + (-1)^{p-1}\Delta_x^p R_1(x,y).$$

По заданной функции $v(x,t)$ определим функцию $\Phi_1(x,t,v)$:

$$\Phi_1(x,t,v) = \int_\Omega [\tilde{R}_1(x,y,t)v(y,t) + (-1)^p R_1(x,y)\Delta_y^p v(y,t)]dy.$$

Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция из пространства $L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw = \Phi_1(x,t,\mathcal{R}_1^{-1}w) + g(x,t) \tag{3.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$\Delta^k w(x,t)|_S = 0, \quad k = 0,..,p-1. \tag{3.3}$$

В данной краевой задаче уравнение (3.1) представляет собой интегро-дифференциальное, или «нагруженное» уравнение [4; 8]. Разрешимость краевой задачи (3.1)–(3.3) в пространстве V нетрудно доказать с помощью метода продолжения по параметру.

Пусть λ есть число отрезка [0,1]. Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw = \lambda\Phi_1(x,t,\mathcal{R}_1^{-1}w) + g(x,t) \tag{3.4}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3.2) и (3.3).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка [0,1], для которых задача (3.4), (3.2), (3.3) разрешима в пространстве V. Как следует из теоремы о методе продолжения по параметру [[12], гл.III, §14], краевая задача (3.4), (3.2), (3.3) будет разрешимость в пространстве V при всех λ из отрезка [0,1], если 1) множество Λ не пусто; 2) множество Λ открыто в топологии метрического пространства $X = [0,1]$; 3) множества Λ замкнуто в топологии метрического пространства $X = [0,1]$. В свою очередь, там же в [[12], гл.III, §14] показано, что открытость и замкнутость множества Λ в метрическом пространстве X вытекают из априорной оценки

$$||w||_V \le K_0||g||_{L_2(Q)} \tag{3.5}$$

с постоянной K_0, определяющейся лишь коэффициентами уравнения (3.1), числом T и областью Ω.

Непустота множества Λ очевидна, поскольку число 0 принадлежит ему.

Покажем, что для всевозможных решений краевой задачи (3.4), (3.2), (3.3) имеет место требуемая априорная оценка (3.5).

В уравнении (3.4) положим $u = \mathcal{R}_1^{-1} w$. Имеем

$$w(x,t) = u(x,t) - \int_\Omega R_1(x,y)u(y,t)dy.$$

Оценим функцию $|\Phi_1(x,t,\mathcal{R}^{-1}w)|$:

$$|\Phi_1(x,t,\mathcal{R}^{-1}w)| = |(-1)^p \int_\Omega R_1(x,y)\Delta_y^p u(y,t)dy + \int_\Omega \tilde{R}_1(x,y,t)u(y,t)dy| =$$

$$= |(-1)^p \int_\Omega R_1(x,y)[\Delta_y^p w(y,t) + \int_\Omega \Delta_y^p(R_1(y,z))u(z,t)dz]dy +$$

$$+ \int_\Omega \tilde{R}_1(x,y,t)u(y,t)dy| =$$

$$= |(-1)^{p+1}[\sum_{i=1}^n \int_\Omega R_{1y_i}(x,y)\Delta_y^{p-1} w_{y_i}(y,t)dy + \int_\Gamma R_1(x,y)\frac{\partial \Delta^{p-1} u(y,t)}{\partial \nu}ds -$$

$$- \int_\Omega R_1(x,y)(\int_\Omega \Delta_y^p(R_1(y,z))u(z,t)dz)dy] + \int_\Omega \tilde{R}_1(x,y,t)u(y,t)dy| \le$$

$$\le \delta_0 \int_\Omega [\Delta^p w(x,t)]^2 dx + C(\delta_0)\int_\Omega w^2(x,t)dx. \tag{3.6}$$

В неравенстве (3.6) δ_0 есть произвольное положительное число; последний переход в этом неравенстве осуществляется с помощью оценок

$$\int_\Omega v_{y_i}^2 dy \le \delta \int_\Omega [\Delta v(y)]^2 dy + C(\delta)\int_\Omega v^2(y)dy, \quad i = 1,..,n, \tag{3.7}$$

$$\int_\Gamma (\frac{\partial v}{\partial \nu})^2 dy \le \delta \int_\Omega [\Delta v(y)]^2 dy + C(\delta)\int_\Omega v^2(y)dy, \tag{3.8}$$

справедливых для любых функций $v(y)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$, равных нулю при $y \in \Gamma$ (см. [7], [13], [17]), условий I и III, а также второго основного неравенства для эллептических операторов [[7], гл. III, §8].

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega Lw[w_\tau + (-1)^p \Delta^p w]dxd\tau = \lambda \int_0^t \int_\Omega \Phi_1(x,\tau,\mathcal{R}_1^{-1}w)[w_\tau +$$

$$+(-1)^p \Delta^p w]dxd\tau + \lambda \int_0^t \int_\Omega g[w_\tau + (-1)^p \Delta^p w]dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга, используя неравенство (3.6), подбирая число δ_0 малым и, наконец, используя лемму

Гронуолла, нетрудно получить, что для всевозможных решений $w(x,t)$ краевой задачи (3.4), (3.2), (3.3) выполняется требуемая оценка (3.5).

Как уже говорилось выше, следствием непустоты множества Λ и оценки (3.5) является разрешимость краевой задачи (3.4), (3.2), (3.3) в пространстве V для любой функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ при всех λ из отрезка [0,1] — т. е. и при $\lambda = 1$.

Рассмотрим краевую задачу (3.1), (3.2), (3.3) для следующей функции $g(x,t)$: $g(x,t) = (\mathcal{R}_1 f)(x,t)$. Пусть $w(x,t)$ есть решение этой задачи. Определим функцию $u(x,t)$: $u(x,t) = (\mathcal{R}_1^{-1} w)(x,t)$. Очевидно, что эта функция принадлежит пространству V, и что для нее выполняются условия (2.2) и (2.3). Имеют место равенства

$$L\mathcal{R}_1 u - \Phi_1(x,t,\mathcal{R}_1^{-1} w) = \mathcal{R}_1 L u,$$

$$\mathcal{R}_1(Lu - f) = 0.$$

Вследствие взаимной однозначности оператора $\mathcal{R}_1$ из последнего равенства следует, что функция $u(x,t)$ будет решением уравнения (2.1).

Итак, функция $u(x,t)$, построенная по решению $w(x,t)$ краевой задачи (3.1), (3.2), (3.3) при указанном выше выборе функции $g(x,t)$ будет принадлежать пространству V, для нее будут выполняться уравнение (2.1) и краевые условия (2.2) и (2.3). Следовательно, эта функция будет искомым решением нелокальной задачи 1.

Единственность решений нелокальной задачи 1 очевидным образом вытекает из единственности решений вспомогательной задачи (3.1), (3.2), (3.3) и вновь из взаимной однозначности оператора $\mathcal{R}_1$.

Теорема полностью доказана. □

Замечание 1. Вопрос о существовании функции $R_1(x,y)$ (и других подобных функций, которые будут введены ниже) будет обсужден в последнем пункте работы.

4. Разрешимость нелокальной задачи 2

Существование решений нелокальной задачи 2 также будет установлено с помощью перехода к «нагруженному» (интегро-дифференциальному) уравнению; условие малости при этом вновь не потребуется.

Через $\mathcal{R}_2$ вновь будем обозначать оператор Фредгольма, действие которого задается с помощью определенной ниже функции $R_2(x,y)$:

$$(\mathcal{R}_2 v)(x) = v(x) - \int_\Omega R_2(x,y)v(y)dy.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* III*, а также условия*

IV. *Функции* $N_0(x,y),..,N_{p-2}(x,y)$ *таковы, что существует функция* $R_2(x,y)$*, такая, что*

$$R_2(x,y) \in C^{2p}(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}),$$

$$\frac{\partial \Delta_x^k R_2(x,y)}{\partial \nu_x} = N_k(x,y) \quad \textit{при} \quad x\in\Gamma, y\in\overline{\Omega}, \quad k=0,..,p-2;$$

V. $N_{p-1}(x,y)\in C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$*;*

VI. *Существует положительные постоянные* ρ_1 *и* ρ_1 *такие, что*

$$\rho_1||v||_{L_2(\Omega)} \le ||\mathcal{R}_2 v||_{L_2(\Omega)} \le \rho_2||v||_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *из пространства* $L_2(Q)$ *нелокальная задача 2 имеет решение* $u(x,t)$*, принадлежащее пространству* V*, и при том ровно одно.*

Доказательство. Определим функцию $\tilde{R}_2(x,y,t)$ и $\Phi_2(x,t,v)$ так же, как определялись функции $\tilde{R}_1(x,y,t)$ и $\Phi_1(x,t,v)$, но с помощью функции $R_2(x,y)$. Далее, положим

$$\tilde{N}_{p-1}(x,y) = N_{p-1}(x,y) - \frac{\partial(\Delta^{p-1}R_2(x,y))}{\partial\nu}, \quad x\in\Gamma, \quad y\in\Omega.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw = \Phi_2(x,t,\mathcal{R}_2^{-1}w) + g(x,t) \tag{4.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x,0)=0, \quad x\in\Omega, \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{\partial\Delta^k w(x,t)}{\partial\nu}\right|_S = 0, \quad k=0,..,p-2, \tag{4.3}$$

$$\left.\frac{\partial\Delta^{p-1} w(x,t)}{\partial\nu}\right|_S = \left.\int_\Omega \tilde{N}_{p-1}(x,y)(\mathcal{R}_2^{-1}w)(y,t)dy\right|_S. \tag{4.4}$$

Разрешимость этой задачи в пространстве V вновь будет установлена с помощью метода продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lw = \lambda\Phi_2(x,t,\mathcal{R}_2^{-1}w) + g(x,t) \tag{4.5}$$

и такую, что для нее выполняются условия (4.2) и (4.3), а также условие

$$\left.\frac{\partial\Delta^{p-1} w(x,t)}{\partial\nu}\right|_S = \lambda\left.\int_\Omega \tilde{N}_{p-1}(x,y)(\mathcal{R}_2^{-1}w)(y,t)dy\right|_S. \tag{4.6}$$

Вновь из теоремы о методе продолжения по параметру следует, что разрешимость этой задачи в пространстве V для всех чисел λ при принадлежности функции $g(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ вытекает из 1) разрешимости задачи (4.5), (4.2), (4.3), (4.6) при $\lambda = 0$, 2) наличие априорной оценки

$$||w||_V \leq K_1||g||_{L_2(Q)} \tag{4.7}$$

всевозможных решений задачи (4.5), (4.2), (4.3), (4.6) с постоянной K_1, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$, $N_0(x,t), .., N_{p-1}(x,y)$, числом T и областью Ω.

Разрешимость задачи (4.5), (4.2), (4.3), (4.6) при $\lambda = 0$ в пространстве V для функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ очевидна.

Покажем, что требуемая оценка имеет место.

Пусть вначале p есть четное число: $p = 2p_1$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega Lw(w - \Delta^{p-1}w)dxd\tau = \tag{4.8}$$

$$= \lambda \int_0^t \int_\Omega \Phi_2(x,\tau,\mathcal{R}_2^{-1}w)(w - \Delta^{p-1}w)dxd\tau - \int_0^t \int_\Omega g(w - \Delta^{p-1}w)dxd\tau.$$

Используя интегрирование по частям и учитывая граничные условия, нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [w^2(x,t) + \sum_{i=1}^n (\Delta^{p_1-1}w_{x_i}(x,t))^2]dx+$$

$$+\int_0^t \int_\Omega ((\Delta^{p_1}w)^2 + \sum_{i=1}^n [\Delta^{p-1}w_{x_i}]^2)dxd\tau = \int_0^t \int_\Omega cw(\Delta^{p-1}w - w)dxd\tau+$$

$$+\lambda \int_0^t \int_\Omega (\int_\Omega \tilde{N}_{p-1}(x,y)(\mathcal{R}_2^{-1}w)(y,\tau)dy)(w - \Delta^{p-1}w)dxd\tau+$$

$$+\lambda \int_0^t \int_\Omega (\int_\Omega \tilde{R}_2(x,y,\tau)(\mathcal{R}_2^{-1}w)(y,\tau)dy)dxd\tau+$$

$$+\int_\Omega R_2(x,y)(\int_\Omega \Delta_y^p R_2(y,z)(\mathcal{R}_2^{-1}w)(z,\tau)dz)dy-$$

$$-\sum_{i=1}^n \int_\Omega (\int_\Omega R_{2y_i}(x,y)\Delta_y^{p-1}w_{y_i}(y,\tau)dy-$$

$$-\int_\Gamma R_2(x,y)(\int_\Omega \tilde{N}_{p-1}(y,z)(\mathcal{R}_2^{-1}w)(z,\tau)dz)ds_y)(w - \Delta^{p-1}w)dx+$$

$$+\lambda \int_0^t \int_\Omega g(w - \Delta^{p-1}w)dxd\tau. \tag{4.9}$$

Оценивая правую часть (4.9) с помощью неравенства Гельдера и Юнга, неравенств (3.7) и (3.8), условий III–IV и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получим, что следствием равенства (4.8) будет априорная оценка

$$\int_\Omega (w^2(x,t) + \sum_{i=1}^n [\Delta^{p_1-1} w_{x_i}(x,t)]^2) dx +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega [(\Delta^{p_1} w)^2 + \sum_{i=1}^n (\Delta^{p-1} w_{x_i})^2] dx d\tau \le K_1 ||g||^2_{L_Q}, \tag{4.10}$$

постоянная K_2 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $N_0(x,y)$,. . . , $N_{p-1}(x,y)$, числом T и областью Ω.

Заметим, что из оценки (4.10) следует неравенство

$$\int_0^t \int_\Omega \Phi_3^2(x,\tau,\mathcal{R}_2^{-1} w) dx d\tau \le K_3 ||g||^2_{L_2(Q)}, \tag{4.11}$$

постоянная K_3 в котором вновь определяется лишь функциями $c(x,t)$, $N_0(x,y)$,.., $N_{p-1}(x,y)$, числом T и областью Ω.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega Lw(w_t - \Delta^{p-1} w) dx d\tau =$$

$$= \lambda \int_0^t \int_\Omega \Phi_2(x,\tau,\mathcal{R}_2^{-1} w)(w_t - \Delta^{p-1} w) dx d\tau - \int_0^t \int_\Omega g(w_t - \Delta^{p-1} w) dx d\tau.$$

После интегрирования по частям это равенство преобразуется к виду

$$\int_0^t \int_\Omega [w_\tau^2(x,t) + (\Delta^p w)^2] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta^{p_1} w)^2 dx =$$

$$= -\int_0^t \int_\Omega cw(w_\tau + \Delta^p w) dx d\tau - \int_0^t \int_\Omega (\int_\Omega \tilde{N}_{p-1}(x,y)(\mathcal{R}_2^{-1} w)(y,\tau) dy) dx d\tau +$$

$$+ \int_\Omega (\int_\Omega \tilde{N}_{p-1}(x,y)(\mathcal{R}_2^{-1} w)(y,t) dy) w(x,t) dx +$$

$$+ \lambda \int_0^t \int_\Omega \Phi_3^2(x,\tau,\mathcal{R}_2^{-1} w)[w_\tau + \Delta^p w] dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega g(w_t - \Delta^{p-1} w) dx d\tau.$$

Используя далее неравенство Юнга, оценки (4.10) и (4.11), а также условия III–VI, нетрудно получить, что для функций $w(x,t)$ выполняется оценка

$$\int_0^t \int_\Omega [w_\tau^2(x,t) + (\Delta^p w)^2] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta^{p_1} w)^2 dx \le K_4 ||g||^2_{L_2(Q)} \tag{4.12}$$

с постоянной K_4, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$, $N_0(x,y)$,.., $N_{p-1}(x,y)$, числом T и областью Ω.

Из оценок (4.10) и (4.12) вытекает требуемая оцена (4.7) всевозможных решений $w(x,t)$ краевой задачи (4.5), (4.2), (4.3), (4.6). Как уже говорилось выше, из этой оценки и из разрешимости задачи (4.5), (4.2), (4.3), (4.6) при $\lambda = 0$ следует, что краевая задача (4.1)-(4.4) будет иметь решение, принадлежащее пространству V.

В задаче (4.1)–(4.4) положим $g(x,t) = (\mathcal{R}_2 f)(x,t)$. По решению $w(x,t)$ этой задачи определим функцию $u(x,t)$, которая будет принадлежать пространству V и представлять собой решение нелокальной задачи 2.

В случае нечетного числа p все построения, выкладки и выводы вполне аналогичны вышеприведенным.

Единственность решений нелокальной задачи 2 очевидна.

Теорема доказана. □

5. Комментарии и замечания

1. Существование функций $R_1(x,y)$ и $R_2(x,y)$, для которых выполняются условия I и IV соответственно, нетрудно обеспечить условиями гладкости функций $N_0(x,y)$,..,$N_{p-1}(x,y)$. Например, функцию $R_1(x,y)$ можно определить как решение задачи.

$$\Delta^p R_1(x,y) = 0 \quad \text{\it при} \quad x \in \Omega, \quad y \in \overline{\Omega},$$

$$\Delta^k R_1(x,y) = N_k(x,y) \quad \text{\it при} \quad x \in \Gamma, \quad y \in \overline{\Omega}, \quad k = 0,..,p-1.$$

В данной задаче переменная y является параметром, и если функции $N_k(x,y)$ гладкие, то решение $R_1(x,y)$ также будет гладкой функцией.

Функцию $R_2(x,y)$ также можно определить как решение краевой задачи для подходящего эллиптического уравнения с данными Неймана

$$\frac{\partial(\Delta_x^k R_2(x,y))}{\partial\nu} = N_k(x,y) \quad \text{\it при} \quad x \in \Gamma, \quad y \in \overline{\Omega}, \quad k = 0,..,p-1.$$

Если функции $N_k(x,y)$ будут гладкими, то и функция $R_2(x,y)$ будет гладкой.

2. Оператор Лапласа в уравнении (2.1) можно заменить более общим эллиптическим оператором — например, оператором A вида

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\big),$$

или же еще более общим. Наличие младших коэффициентов в уравнении (1) также не влияет на суть полученных в работе результатов.

3. Пусть $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$. Рассмотрим задачу для уравнения (2.1) с начальным условием (2.2) и интегральным условием

$$\int_\Omega N_k(y)u(y,t)dy = 0, \qquad k = 0,..,p-1 \tag{5.1}$$

($N_k(y)$ — заданные функции). Для этой задачи нетрудно указать условия, при выполнении которых она сводится либо к нелокальной задаче 1, либо к нелокальной задаче 2. Тем самым теоремы 1 и 2 дадут критерии разрешимости нелокальной задачи для одномерного параболического уравнения произвольного порядка с чисто интегральными условиями (5.1). И заметим, что условия II и VI при этом будут легко проверяемыми, поскольку соответствующие операторы Фредгольма будут иметь вырожденное ядро, и тем самым обратный к ним оператор легко строится.

4. Условия гладкости I и IV на функции $R_1(x, y)$ и $R_2(x, y)$ можно ослабить (авторы не ставили себе цель найти минимальные условия гладкости, указав лишь достаточные).

5. Функции N_k в нелокальных задачах 1 и 2 могут зависеть и от переменной t, но условия и выкладки при этом станут существенно более громоздкими.

6. Заключение

В статье представлены новые результаты о существовании регулярных решений нелокальных задач с интегральными по пространственным переменным условиями интегрального вида для линейных параболических уравнений высокого порядка с многими пространственными переменными. Эти результаты существенно обобщают результаты предшественников. Метод, представленный в настоящей статье, может использоваться и в других задачах.

Список литературы

1. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Известия вузов. Математика. 2007. Т. 51, № 5. С. 1–10.
2. Абдрахманов А. М. Разрешимость краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка // Математические заметки. 2010. Т. 88, № 2. С. 163–172. https://doi.org/10.4213/mzm4065
3. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. О разрешимости начально-краевых задач с граничным условием интегрального вида для некоторых неклассических дифференциальных уравнений // Математические заметки СВФУ. 2013. Т. 20, № 2. С. 3–14.

4. Дженалиев М. Т. К теории краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы : Институт теоретической и прикладной математики, 1995. 269 с.
5. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 5. С. 589–592.
6. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42., № 9. С. 1166–1179.
7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 538 с.
8. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 231 с.
9. Попов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 79–86.
10. Попов Н. С. О разрешимости краевой задачи для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 69–80.
11. Попов Н. С. Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 359-372.
12. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 488 с.
13. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физики. М. : Наука, 1988. 251 с.
14. Bazant Z., Jirasek M. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress // J. Eng. Mech. 2002. N 128, P. 1–20.
15. Egorov I. E. Vragov boundary value problem with integral boundary condition for a mixed type equation // AIP Conference Proceedings. 2019, 2172, 030005.
16. Lions J. L. Quelques Methodes de Resolution des Problems aux Limites non Lineaires. Paris, Dunod, 1969. 570 p.
17. Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam : North-Holland, 1978. 519 p.

Александр Иванович Кожанов, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4; Самарский государственный технический университет, Российская Федерация, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, тел.: (383)333-28-92, email: kozhanov@math.nsc.ru,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-4376-4003.

Александра Владимировна Дюжева, кандидат физико-математических наук, доцент, Самарский государственный технический университет, Российская Федерация, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, тел.: (846)278-43-53, email: aduzheva@rambler.ru, ORCID iD https: //orcid.org/0000-0002-3284-5302.

Поступила в редакцию 15.04.2021

Non-local Problems with Integral Displacement for High-order Parabolic Equations

A.I. Kozhanov[1,2], A.V. Dyuzheva[2]

[1] *S. L. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation*
[2] *Samara State Technical University, Samara, Russian Federation*

Abstract. The aim of this paper is to study the solvability of solutions of non-local problems with integral conditions in spatial variables for high-order linear parabolic equations in the classes of regular solutions (which have all the squared derivatives generalized by S. L. Sobolev that are included in the corresponding equation) . Previously, similar problems were studied for high-order parabolic equations, either in the one-dimensional case, or when certain conditions of smallness on the coefficients are met equations. In this paper, we present new results on the solvability of non-local problems with integral spatial variables for high-order parabolic equations a) in the multidimensional case with respect to spatial variables; b) in the absence of smallness conditions. The research method is based on the transition from a problem with non-local integral conditions to a problem with classical homogeneous conditions of the first or second kind on the side boundary for a loaded integro-differential equation. At the end of the paper, some generalizations of the obtained results will be described.

Keywords: high-order parabolic equations, non-local problems, integral boundary conditions, regular solutions, uniqueness, existence.

References

1. Abdrakhmanov A.M., Kozhanov A.I. A problem with a non-local boundary condition for a class of odd-order equations. *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, no. 5, pp. 1-10. https://doi.org/10.3103/S1066369X07050015
2. Abdrakhmanov A.M. Solvability of a boundary-value problem with an integral boundary condition of the second kind for equations of odd order. *Mathematical Notes*, 2010, vol. 88, no. 2, pp. 163-172. https://doi.org/10.1134/S000143461007014X
3. Abdrakhmanov A.M., Kozhanov A.I. O razreshimosti nachal'no-kraevyh zadach s granichnym usloviem integralnogo vida dlya nekotoryh neklassicheskih differencialnyh uravnenij [On the solvability of initial boundary value problems with an integral boundary condition for some non-classical differential equations]. *Matematicheskie zametki SVFU* [NEFU Mathematical Notes], 2013, vol. 20, no. 2, pp. 3-14.
4. Genaliev M.T. *On the theory of boundary value problems for loaded differential equations*. Almaty: Institute of Theoretical and Applied Mathematics, 1995. 269 p.
5. Kozhanov A.I., Pulkina L.S. Kraevye zadachi s integral'nym granichnym usloviem dlya mnogomernyh giperbolicheskih uravnenij [Boundary value problems with an integral boundary condition for multidimensional hyperbolic equations]. *Dokl. RAS* [RAS reports], 2005, vol. 404, no. 5, pp. 589-592.

6. Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equationsю *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233-1246. https://doi.org/10.1134/S0012266106090023
7. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Linejnye i kvazilinejnye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasi-linear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 538 p. (in Russian)
8. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie* [Loaded equations and their application]. Moscow, Nauka Publ., 2012, 231 p. (in Russian)
9. Popov N.S. O razreshimosti kraevyh zadach dlya mnogomernyh parabolicheskih uravnenij chetvertogo poryadka s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida [On the solvability of boundary value problems for multidimensional parabolic equations of the fourth order with a nonlocal boundary condition of the integral form]. *Matematicheskie zametki SVFU* [NEFU Mathematical Notes], 2016, vol. 23, no. 1, pp. 79-86.
10. Popov N.S. O razreshimosti kraevoj zadachi dlya mnogomernyh psevdogiperbolicheskih uravnenij s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida [O solvability of a boundary value problem for multidimensional pseudo-hyperbolic equations with a nonlocal boundary condition of integral form]. *Matematicheskie zametki SVFU* [NEFU Mathematical Notes], 2014, vol. 21, no. 2, pp. 69-80.
11. Popov N.S. Solvability of a boundary value problem for a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions. *Differential Equations*, 2015. vol. 51, no. 3, pp. 362-375. https://doi.org/10.1134/S0012266115030076
12. Trenogin V.A. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 488 p. (in Russian)
13. Sobolev C.L. *Nekotorye primeneniya funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fiziki* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 251 p. (in Russian)
14. Bazant Z., Jirasek M. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *J. Eng. Mech.,* 2002, no. 128, pp. 1-20.
15. Egorov I.E. *Vragov boundary value problem with integral boundary condition for a mixed type equation.* AIP Conference Proceedings. 2019, 2172, 030005.
16. Lions J.L. *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites non Lineaires.* Paris, Dunod Publ., 1969, 570 p.
17. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* Amsterdam, North–Holland Publ., 1978, 519 p.

Alexander Kozhanov, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, S.L. Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Koptyuga Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation; Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation, tel.: (383)333-28-92, email: kozhanov@math.nsc.ru,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-4376-4003.

Alexandra Dyuzheva, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation, tel.: (846)278-43-53,
email: aduzheva@rambler.ru, ORCID iD https: //orcid.org/0000-0002-3284-5302.

Received 15.04.2021