Серия «Математика»
2021. Т. 35. С. 103—119

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.54
MSC 20E25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.103

О двух свойствах группы Шункова *

А. А. Шлепкин[1], И. В. Сабодах[1]
[1] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация*

Аннотация. Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Доказано, что фактор-группа G/N является группой Шункова при условии, что нормальная подгруппа N локально конечна и порядки элементов подгруппы N взаимно просты с порядками элементов фактор-группы G/N.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Доказано, что группа Шункова, насыщенная конечными линейными и унитарными группами степени 3 над конечными полями, обладает периодической частью, которая изоморфна либо линейной, либо унитарной группе степени 3 на подходящим локально конечным полем.

Ключевые слова: группы с условиями насыщенности, группа Шункова, периодическая часть группы.

1. Введение

Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [8]. Если G — группа Шункова и N — ее нормальная подгруппа, то в каких случаях фактор- группа G/N является группой Шункова? Частичный ответ на этот вопрос дает

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 19-71-10017.

Теорема 1. *Пусть G — группа Шункова, N — нормальная локально конечная подгруппа группы G такая, что $\pi(N) \cap \pi(G/N) = \varnothing$. Тогда фактор-группа G/N — группа Шункова.*

Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается $T(G)$ [1, стр. 90]. Группа Шункова не обязана обладать периодической частью [12]. Вопросы строения групп Шункова рассматривались в [4;9;10;19]. Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ (множество $\mathfrak{X}$ будем называть насыщающим множеством для G) [15]. Устанавливается структура группы Шункова с насыщающим множеством — $\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируется. Получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна либо $L_3(Q)$, либо $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — насыщающее множеством для G, 1 – единичная подгруппа группы G. Тогда $\mathfrak{X}(1)$ обозначает множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$.

2. Некоторые свойства группы $SL_3(q)$

Предложение 1. *Пусть F — поле порядка $q = 2^m, m \geqslant 1, S = SL_3(F) = SL_3(q)$ — группа матриц размерности 3 над F с определителем, равным 1. Тогда :*

1. *Центр C группы S состоит из скалярных матриц, $|C| = (3, q-1)$.*

2. *Группа $L = L_3(F) = L_3(q) = S/C$ — простая группа, имеющая порядок*
$q^3(q^3-1)(q^2-1)/(3, q-1)$. *Пусть* $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \alpha, \beta, \gamma \in F \right\}$ *— группа верхних унитреугольных матриц из S.*

3. *T — силовская 2-подгруппа порядка q^3 из S. Центр T — это элементарная абелева подгруппа* $Z = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \gamma \in F \right\}$ *порядка q, которая одновременно является коммутантом и подгруппой Фраттини группы T . В частности, T — двуступенно нильпотентна, период T равен 4.*

4. *Любая инволюция из T содержится либо в подгруппе*
$A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \alpha, \gamma \in F \right\}$, *либо в подгруппе* $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \beta, \gamma \in F \right\}$, *каждая из которых является элементарной абелевой подгруппой по-*

рядка q^2, *инвариантной в* $N_S(T)$. *При этом* $A \cap B = Z$ *и* $AB = T$,

$$A = A_Z \times Z, \text{ где } A_Z = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha \in F \right\},$$

$$B = B_Z \times Z, \text{где} B_Z = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha \in F \right\}.$$

Если X *— любая из подгрупп* A, B *и* $x \in X \setminus Z$, *то* $C_T(x) = X$. *Кроме того,* $S = \langle N_S(A), N_S(B) \rangle$.

5. *Если элемент* y *из* T *имеет порядок* 4, *то* $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$, *где*

$$\alpha, \beta \in F \setminus \{0\}, a\ \gamma \in F, \ и\ C_T(y) = \langle y \rangle Z(T).$$

Если y *перестановочен с некоторой инволюцией* $x \in T$, *то* $x \in Z$.

6. *Пусть* $U = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1}\beta^{-1} \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha, \beta \in F \setminus \{0\} \right\}$. *Тогда*

$$U = V \times W_A = V \times W_B, где$$

$$V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha \in F \setminus \{0\} \right\}, W_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{smallmatrix} \right) \middle| \beta \in F \setminus \{0\} \right\},$$

$$W_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| \beta \in F \setminus \{0\} \right\}, V, W_A, W_B \ -$$

циклические группы порядка $q - 1$,

$$\overline{U} = U/C = \overline{V} \times \overline{W_A} = \overline{V} \times \overline{W_B}, \overline{W_A} = W_A C/C, \overline{W_B} = W_B C/C \ -$$

циклические группы порядка $q-1$, $\overline{V} = VC/C$ *есть циклическая группа порядка* $(q-1)/(3, q-1)$.

7. $U = H_A \times W_A$ *— прямое произведение двух циклических групп порядка* $q - 1$,

$$H_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha \in F \setminus \{0\} \right\}, W_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{smallmatrix} \right) \middle| \beta \in F \setminus \{0\} \right\}.$$

$\overline{U} = U/C = \overline{H_A} \times \overline{W_A}$ *— прямое произведение циклической группы* $\overline{W_A} = W_A C/C$ *порядка* $q - 1$ *и циклической группы* $\overline{H_A} = H_A C/C$ *порядка* $(q-1)/(3, q-1)$.

8. $U = H_B \times W_B$ *— прямое произведение двух циклических групп порядка* $q - 1$,

$$H_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha \in F \setminus \{0\} \right\}, W_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \beta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| \beta \in F \setminus \{0\} \right\}.$$

$\overline{U} = U/C = \overline{H_B} \times \overline{W_B}$ *— прямое произведение циклической группы* $\overline{W_B} = W_B C/C$ *порядка* $q - 1$ *и циклической группы* $\overline{H_B} = H_B C/C$ *порядка* $(q-1)/(3, q-1)$.

9. *При естественном гомоморфизме S на L образ $\overline{T}$ группы T изоморфен T (мы будем отождествлять T и $\overline{T}$), и $N_L(T) = T\overline{U}$. Если $q > 4$, то $C_L(\overline{U}) = \overline{U}$.*

10. *Если $1 \neq z$ — элемент из Z, то $C_L(z) = C_L(Z) = T \rightthreetimes \overline{V}$, $\overline{V}$ нормализует T, A_Z, B_Z, централизует Z, каждый нетривиальный элемент из $\overline{V}$ действует на $A_Z, B_Z, T/Z$ при сопряжении без неподвижных точек.*

11. *Любая инволюция из L сопряжена с инволюцией из Z. В частности, централизатор любой инволюции из L содержит ровно одну силовскую 2-подгруппу из L. Для любой нетривиальной подгруппы Z_1 из Z справедливо включение $N_L(Z_1) \leqslant N_L(T)$.*

12. *$N_L(T) = T \rightthreetimes (\overline{H_A} \times \overline{W_A})$, где $\overline{W_A}$ нормализует A, Z, A_Z и действует регулярно и транзитивно на Z, A_Z, $\overline{H_A}$ нормализует A, Z, A_Z, действует регулярно на Z, A_Z и централизует B_Z.*

13. *$N_L(T) = T \rightthreetimes (\overline{H_B} \times \overline{W_B})$, где $\overline{W_B}$ нормализует B, Z, B_Z и действует регулярно и транзитивно на Z, B_Z, $\overline{H_B}$ нормализует B, Z, B_Z, действует регулярно на Z, B_Z и централизует A_Z.*

14. *$N_L(A) = A \rightthreetimes (F_A \times \overline{H_A})$ — максимальная подгруппа в L, где*

$$F_A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha, \gamma, \beta, \delta \in F \right\},$$

$$F_A \simeq L_2(q), W_A < F_A, B_Z < F_A, T = A \rightthreetimes B_Z, N_L(T) < N_L(A).$$

Для любого $1 \neq \overline{h} \in \overline{H_A}, C_L(\overline{h}) = F_A \times \overline{H_A}$.

15. *$N_L(B) = B \rightthreetimes (F_B \times \overline{H_B})$ — максимальная подгруппа в L, где*

$$F_B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| \alpha, \gamma, \beta, \delta \in F \right\},$$

$$F_B \simeq L_2(q), W_B < F_B, A_Z < F_B, T = B \rightthreetimes A_Z, N_L(T) < N_L(B).$$

Для любого $1 \neq \overline{h} \in \overline{H_B}, C_L(\overline{h}) = F_B \times \overline{H_B}$.

Приведенные выше свойства групп $SL_3(F), L_3(F)$ хорошо известны и приведены, например, в [4, § 1]: пп. 1 — 4 предложения 1 — это пп. 1— 4 из [4, § 1]; п. 5 предложения 1 доказывается непосредственными вычислениями; пп. 6 — 8 предложения 1 являются следствием п. 5 из [4, § 1]; пп. 9, 10 предложения 1 — это пп. 6, 7 из [4, § 1]; п. 11 предложения 1 — это п. 8 из [4, § 1]; пп. 12, 13 предложения 1 — следствие п. 9 из [4, § 1]; пп. 14, 15 предложения 1 — следствие п. 10 из [4, § 1].

3. Доказательство теоремы 1

Предположим, что теорема неверна. В дальнейшем G — контрпример к утверждению теоремы. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/N$.

Лемма 1. *Пусть* $\overline{H}$ *— конечная подгруппа группы* $\overline{G}$. *В группе* G *существует конечная подгруппа* $H = \{h_1, \cdots, h_{|H|}\}$ *такая, что* $N \leftthreetimes H$ *— подгруппа группы* G *и* $(N \leftthreetimes H)/N = \overline{H} = \{h_1N, \cdots, h_{|H|}N\}$.

Доказательство. Обозначим через R полный прообраз группы $\overline{H}$ в G. По [1, теорема 23.1.1] R — локально конечная группа. Так как $\overline{H}$ — конечная группа, то $\overline{H} = \{k_1N, \cdots, k_{|\overline{H}|}N\}$ для некоторых элементов $k_1, \cdots, k_{|\overline{H}|}$ из R. Ввиду локальной конечности R, $\langle k_1, \cdots, k_{|\overline{H}|}\rangle = M$ — конечная подгруппа из R. Возьмем в M нормальную подгруппу $N \cap M$. Ясно, что $M/M \cap N \simeq \overline{H}$ и $\pi(M \cap N) \cap \pi(M/(M \cap N)) = \varnothing$. По [2, теорема 15.2.4] в M найдется подгруппа $H = \{h_1, \cdots, h_{|H|}\}$ такая, что $M = (M \cap N) \leftthreetimes H$. Следовательно, $NM = N((M \cap N) \leftthreetimes H) = N \leftthreetimes H-$ подгруппа группы G и $(N \leftthreetimes H)/N = \overline{H} = \{h_1N, \cdots, h_{|H|}N\}$. $\square$

Зафиксируем группы $H, \overline{H}$ из условия и утверждения леммы 1.

Лемма 2. *Пусть группа* $\overline{G}$ *содержит такой элемент* $\overline{a}$, *что* $\overline{a} \in N_{\overline{G}}(\overline{H}) \setminus \overline{H}$, $\overline{a}^p \in \overline{H}$, *и* $p \in \pi(\overline{G})$. *Тогда группа* G *содержит элемент* $a \in N_G(H) \setminus H$, $a^p \in H$ *и* $\overline{H\langle a\rangle} = \overline{H}\langle\overline{a}\rangle$.

Доказательство. По лемме 1 в G найдется элемент b конечного порядка такой, что $N \leftthreetimes \langle b\rangle$ подгруппа в G и $(N \leftthreetimes \langle b\rangle)/N = \overline{a}$. По условию леммы $\overline{a} \in N_{\overline{G}}(\overline{H}) \setminus \overline{H}$. Следовательно, $N \leftthreetimes H$ нормальная подгруппа в $(N \leftthreetimes H)\langle b\rangle$ и $H^b < (N \leftthreetimes H)$. По [2, теорема 15.2.4] $H^b = H^x$ для некоторого $x \in N$ и $H = H^{xb^{-1}}$. Так как $xb^{-1} \in N_{(N \leftthreetimes H)\langle b\rangle}(H)$ и $\pi(N) \cap \pi(N \cap \langle xb^{-1}\rangle)) = \varnothing$, то без ограничения общности можно считать, что $(xb^{-1})^p \in H$. Положим $a = xb^{-1}$. Несложно видеть, что все утверждения леммы для элемента a выполняются. $\square$

Лемма 3. *Пусть группа* $\overline{G}$ *содержит элемент* $\overline{g} \in N_{\overline{G}}(\overline{H}) \setminus \overline{H}$. *Тогда группа* G *содержит элемент* $g \in N_G(H) \setminus H$ *и* $\overline{H\langle g\rangle} = \overline{H}\langle\overline{g}\rangle$.

Доказательство. Пусь f — некоторый прообраз элемента $\overline{g}$ в группе G. Ясно, что $H^f < N \leftthreetimes H$. Очевидно, $\langle H, H^f\rangle$ — конечная подгруппа из $N \leftthreetimes H$ и $(|\langle H, H^f\rangle \cap N : H|, |H|) = 1$. По [2, теорема 15.2.4] $H = H^{fx}$ для некоторого $x \in \langle H, H^f\rangle \cap N$. Положим $fx = g$. В силу определения элемента g, $\overline{H\langle g\rangle} = \overline{H}\langle\overline{g}\rangle$. $\square$

Завершим доказательство теоремы. Пусть $\overline{H}$ — конечная подгруппа группы $\overline{G}$, элементы $\overline{a}, \overline{g}$ взяты из $N_{\overline{G}}(\overline{H})$ причем $\overline{a}^p \in \overline{H}$. В соответствии с утверждениями лемм 1 — 3 в качестве прообразов группы $\overline{H}$ и элементов $\overline{a}, \overline{g}$ можно выбрать группу H и элементы a, g такие, что H — конечная подгруппа группы G, $|H| = |\overline{H}|, a, g \in N_G(H), a^p \in H$. Ввиду условия теоремы фактор-группа $\langle a, a^g, H\rangle/H$ конечна. Переходя к фактор-группе $\overline{G}$, получаем конечность фактор-группы $\langle \overline{a}, \overline{a}^{\overline{g}}, \overline{H}\rangle/\overline{H}$, а так как $\overline{a}, \overline{g} \in N_{\overline{G}}(\overline{H}), \overline{a}^p \in \overline{H}$, то теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Положим

$$\mathfrak{A} = \{L_3(q), U_3(q) \mid q \text{ нечетно}\}, \mathfrak{B} = \{L_3(2^n), U_3(2^m) \mid n \geqslant 1, m \geqslant 2\}.$$

Тогда $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$ — насыщающее множество для группы G. Имеют место три взаимоисключающих варианта структуры $\mathfrak{M}(1)$.

$$\text{I. } \mathfrak{A}(1) \neq \varnothing,\ \mathfrak{B}(1) = \varnothing.$$

$$\text{II. } \mathfrak{A}(1) = \varnothing,\ \mathfrak{B}(1) \neq \varnothing.$$

$$\text{III. } \mathfrak{A}(1) \neq \varnothing,\ \mathfrak{B}(1) \neq \varnothing.$$

Рассмотрим эти варианты в отдельности.

Вариант I. $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing,\ \mathfrak{B}(1) = \varnothing$.

В этом случае $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1)$ – насыщающее множество для группы G, и по [14, Теорема 1] G обладает периодической частью $T(G)$, которая локально конечна и изоморфна либо $L_3(P)$, либо $U_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле нечетной характеристики. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Вариант II. $\mathfrak{A}(1) = \varnothing,\ \mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Лемма 4. $\mathfrak{B}(1)$ *содержит конечную подгруппу* $K \simeq L_3(2^m)$, *где* $m \geqslant 1$.

Доказательство. В противном случае случае для любой группы $K \in \mathfrak{M}(1), K \simeq U_3(2^l)$, и по [18, Теорема 1.5] G обладает периодической частью $T(G)$, которая локально конечна и изоморфна $U_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле характеристики 2. Противоречие с тем, что G — контрпример. □

Лемма 5. *Пусть* S – *силовская* 2*-подгруппа группы* G. *Тогда* :

1. S – *бесконечная локально конечная группа периода* 4.
2. S *двуступенно нильпотентна,* $Z = Z(S) = S'$ – *группа периода* 2.
3. *Для любого* $x \in S,\ x^2 \in Z$.
4. *Пусть* z — *инволюция из* G. *Тогда* $C_G(z)$ *обладает единственной силовской* 2*-подгруппой.*
5. *Силовские* 2*-подгруппы в группе* G *сопряжены с* S.
6. $N = N_G(S)$ *обладает счетной периодической частью* $T = T(N) = S \leftthreetimes P$, *где группа* P – *локально конечная абелева группа ранга* 2 *без инволюций.*

Доказательство. По лемме 4 в $\mathfrak{B}(1)$ существует конечная подгруппа $K \simeq L_3(2^m)$, где $m \geqslant 1$. Пусть S_K — силовская 2-подгруппа из K. Тогда $S_K < S^*$ — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G ([14, предложение 9]). Для любой конечной подгруппы $X < S_K$ очевидны включения $X < \langle X, S_K\rangle$ — конечная подгруппа группы S^* и $\langle X, S_K\rangle < K_{X,S_K} \in \mathfrak{B}(1), K_{X,S_K} \simeq L_3(2^n)$, где $n > m$ (условие насыщенности). Отсюда и из того факта, что в группе Шункова любая инволюция конечна, вытекает, что утверждение леммы имеет место (доказывается точно также как и [13, Теорема] с использованием схем доказательств из [6, леммы 2.1 — 2.7]. □

В дальнейшем, если не оговорено особо, под T, P, S будут пониматься подгруппы из условия и утверждения леммы 5.

Лемма 6. *Существует последовательность подгрупп* $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ *группы* G *такая, что для неё имеют место следующие свойства* :

1. *Для любого* n *существует* k_n *такое, что* $M_n \simeq L_3(2^{k_n})$.
2. $S_{M_1} < S_{M_2} < \ldots < S_{M_n} < \ldots$ *для некоторых силовских* 2*-подгрупп* S_{M_n} *из* M_n.
3. $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{M_n}$ *— силовская* 2*-подгруппа группы* G.
4. $Z(S_{M_1}) < Z(S_{M_2}) < \ldots < Z(S_{M_n}) < \ldots$.
5. $Z = Z(S) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z(S_{M_n})$,
6. $N_{M_1}(S_{M_1}) < N_{M_2}(S_{M_2}) < \ldots < N_{M_n}(S_{M_n}) < \ldots$.
7. $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(S_{M_n})$.

Доказательство. По лемме 4 в $\mathfrak{B}(1)$ существует конечная подгруппа $K \simeq L_3(2^{m_1})$, где $m_1 \geqslant 1$. Положим $M_1 = K$. Пусть S_{M_1} — силовская 2-подгруппа из M_1, и инволюция z из центра S_{M_1} (п. 11 предложения 1). По пп. 4, 6 леммы 5 $N_{M_1}(S_{M_1}) < T = \{c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots\}$ – бесконечная счетная локально конечная группа. Следовательно, для любого натурального m_1 $\langle N_{M_1}(S_{M_1}), c_1, c_2, ..., c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. Выберем элемент $c_{m_1} \in N \setminus N_{M_1}(S_{M_1})$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку N — локально конечная группа, то $\langle N_{M_1}(S_{M_1}), c_{m_1}\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle N_{M_1}(S_{M_1}), c_{m_1}\rangle < M_2 \in \mathfrak{B}(1), M_2 \simeq L_3(2^{m_2})$. Пусть S_{M_2} — силовская 2-подгруппа из M_2, содержащая S_{M_1}. Тогда $S_{M_1} < S_{M_2}$, $Z(S_{M_1}) < Z(S_{M_2})$ и по п. 11 предложения 1 $N_{M_1}(S_{M_1}) < N_{M_2}(S_{M_2})$. Действуя подобным образом, получаем последовательность $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, обладающую требуемыми свойствами, перечисленными в пп. 1 — 7 заключения леммы. □

Определим множество значений индекса $i \in \{1, 2\}$.

Лемма 7. *Для групп цепочки $S_{M_1} < S_{M_2} < \ldots < S_{M_n} < \ldots$ имеют место следующие свойства* :

1. $S_{M_n} = S^{(1)}_{M_n} S^{(2)}_{M_n} = S^{(2)}_{M_n} S^{(1)}_{M_n}$, *где* $S^{(1)}_{M_n}, S^{(2)}_{M_n}$ *— максимальные элементарные абелевы подгруппы из* S_{M_n}.

2. $S^{(1)}_{M_n} \cap S^{(2)}_{M_n} = Z(S_{M_n})$.

3. $S^{(1)}_{M_n} = S^{(1)}_{M_n\, Z(S_{M_n})} \times Z(S_{M_n})$.

4. $S^{(2)}_{M_n} = S^{(2)}_{M_n\, Z(S_{M_n})} \times Z(S_{M_n})$.

5. *Любая элементарная абелева подгруппа из* S_{M_n} *содержится либо в* $S^{(1)}_{M_n}$, *либо в* $S^{(2)}_{M_n}$.

6. $S_{M_n} = S^{(1)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(2)}_{M_n\, Z(S_{M_n})} = S^{(2)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(1)}_{M_n\, Z(S_{M_n})}$.

7. $N_{M_n}(S_{M_n}) < N_{M_n}(S^{(i)}_{M_n})$.

8. $S^{(i)}_{M_1} < S^{(i)}_{M_2} < \ldots < S^{(i)}_{M_n} < \ldots$.

9. *Без ограничения общности можно считать, что*

$$S^{(i)}_{M_1\, Z(S_{M_1})} < S^{(i)}_{M_2\, Z(S_{M_2})} < \ldots < S^{(i)}_{M_n\, Z(Z_{M_n})} < \ldots .$$

Доказательство. Группы S_{M_n} определены и зафиксированы в п. 2 леммы 6. По условию насыщенности $M_n \simeq L = L_3(2^{k_n})$ (L из п. 2 предложения 1). В соответствии с п. 4 предложения 1 и определением $S^{(1)}_{M_n}, S^{(2)}_{M_n}$, как максимальных элементарных абелевых подгрупп из силовской 2-подгруппы S_{M_n} группы M_n (п. 1 заключения леммы), положив (в обозначениях п. 4 предложения 1) $S^{(1)}_{M_n} \simeq A, S^{(2)}_{M_n} \simeq B, S_{M_n} \simeq T, Z(S_{M_n}) \simeq Z, S^{(1)}_{M_n\, Z(S_{M_n})} \simeq A_Z, S^{(2)}_{M_n\, Z(S_{M_n})} \simeq B_Z$, получаем доказательство свойств, сформулированных в пп. 1-5 утверждения леммы.

Свойства, сформулированные в пп. 6 – 9 утверждения леммы – непосредственное следствие утверждений, приведенных в пп. 14-15 предложения 1. □

Лемма 8. *Имеют место следующие свойства группы* S :

1. $S^{(i)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(i)}_{M_n}$ *— максимальные элементарные абелевы подгруппы группы* S.

2. $S = S^{(1)} S^{(2)} = S^{(2)} S^{(1)}$.

3. $S^{(1)} \bigcap S^{(2)} = Z$.

4. $S^{(i)} = S^{(i)}_Z \times Z$, *где* $S^{(i)}_Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^{(i)}_{M_n\, Z(S_{M_n})}$.

5. $S = S^{(1)} \leftthreetimes S^{(2)}_Z = S^{(2)} \leftthreetimes S^{(1)}_Z$.

6. *Любая элементарная абелева подгруппа из* S *лежит либо в* $S^{(1)}$, *либо в* $S^{(2)}$.

7. $T = T(N) < N_G(S^{(i)})$.

Доказательство. Перечисленные в утверждении леммы свойства группы S вытекают из лемм 6, 7. □

Определим множество значений индекса $j \in \{1,2\} \setminus i$.

Лемма 9. *$N_{M_n}(S_{M_n}) = (S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}}))$, где $H_{S^{(i)}_{M_n}}$ – циклическая группа порядка $(2^{k_n}-1)/(3, 2^{k_n}-1)$, действующая регулярно на $S^{(i)}_{M_n}$ и централизующая группу $S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})} \leftthreetimes W_{S^{(i)}_{M_n}}$; $W_{S^{(i)}_{M_n}}$ – циклическая группа порядка $(2^{k_n}-1)$, действующая регулярно и транзитивно на $Z(S_{M_n})$, $S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}$.*

Доказательство. . Учитывая соответствие, введенное в доказательстве леммы 7, между обозначениями подгрупп группы L из п.2 предложения 1 и обозначениями подгрупп группы S_{M_n} и дополнительно положив $\overline{H_A} \simeq H_{S^{(1)}_{M_n}}$, $\overline{H_B} \simeq H_{S^{(2)}_{M_n}}$, $\overline{W_A} \simeq W_{S^{(1)}_{M_n}}$, $\overline{W_B} \simeq W_{S^{(2)}_{M_n}}$ (группы $\overline{H_A}, \overline{H_B}, \overline{W_A}, \overline{W_B}$ из пп. 7, 8 1), получаем, что утверждение леммы имеет место по п. 4 леммы 7 и пп. 12, 13 предложения 1. □

Лемма 10. *Без ограничения общности можно считать, что $P = (H_{S^{(i)}} \times W_{S^{(i)}})$, где $H_{S^{(i)}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_{S^{(i)}_{M_n}}$ – максимальная локально циклическая подгруппа без инволюций из $T < N_G(S^{(i)})$ с тем свойством, что она действует регулярно на $S^{(i)}$ и централизует $S^{(j)}_Z$, $W_{S^{(i)}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_{S^{(i)}_{M_n}}$ – максимальная локально циклическая подгруппа без инволюций из $T < N_G(S_i)$, действующая регулярно на $S^{(i)}$ и $S^{(j)}_Z$.*

Доказательство. Ввиду леммы 9 и п. 6 леммы 6

$$(S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_n\,Z(S_{M_n})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}}) <$$

$$< (S^{(i)}_{M_{n+1}} \leftthreetimes S^{(j)}_{M_{n+1}\,Z(S_{M_{n+1}})}) \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}} \times W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}})$$

для любого n. По [1, Теорема (Ф. Холл) 20.1.1]

$$(H_{S^{(i)}_{M_n}} \times W_{S^{(i)}_{M_n}}) < (H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}} \times W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}})^x$$

для некоторого $x \in S_{M_{n+1}}$. По п. 4 леммы 6, пп. 8, 9 леммы 7 $x \in S^{(i)}_{M_{n+1}}$, и подгруппа $H^x_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ централизует подгруппу $S^{(j)}_{M_{n+1}\,Z(S_{M_{n+1}})}$ (пп.12, 13 предложения 1). Возьмем в качестве $H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ подгруппу $H^x_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$. Так как $S^{(i)}_{M_n\,Z(M_n)} < S^{(i)}_{M_{n+1}\,Z(M_{n+1})}$, то по построению $H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$. Выберем в качестве $W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ подгруппу, являющуюся прямым дополнением к подгрупе $H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ в группе $(H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}} \times W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}})^x$ и содержащую $W_{S^{(i)}_{M_n}}$ (по пп.12, 13 предложения 1 такое прямое дополнение существует). Используя индукцию по n получаем, что группы $H_{S^{(i)}_{M_n}}, W_{S^{(i)}_{M_n}}$ можно выбрать так, что $H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$, $W_{S^{(i)}_{M_n}} < W_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$. Положим $H_{S^{(i)}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_{S^{(i)}_{M_n}}, W_{S^{(i)}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_{S^{(i)}_{M_n}}$. Возьмем в качестве P группу $H_{S^{(i)}} \times W_{S^{(i)}}$. $\square$

Лемма 11. *Пусть z — инволюция из Z, $K \in \mathfrak{A}(1)$, S_K — силовская 2-подгруппа из K, содержащая инволюцию z в $Z(S_K)$. Тогда $N_K(S^{(i)}_K) < N_G(S^{(i)})$, $S^{(i)}_K$ — максимальные элементарные абелевы подгруппы группы S_K. В частности, $N_{M_n}(S^{(i)}_{M_n}) < N_G(S^{(i)})$.*

Доказательство. Ясно, что $S_K < S$, $S^{(i)}_K < S^{(i)}$ (п. 4 леммы 5, п. 6 леммы 8). Пусть $g \in N_K(S^{(i)}_K)$. Тогда $S^{(i)}_K = (S^{(i)}_K)^g < (S^{(i)})^g$. Так как $z \in Z(S_K) < S^{(i)}_K = S^{(i)}_K \cap S^{(i)g}_K < S^{(i)} \cap S^{(i)g}$, и $S^{(i)}, S^{(i)g}$ — элементарные абелевы группы, то $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle < C_G(z)$. По п. 4 леммы 5 $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle < S$. Тогда $\langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle$ — элементарная абелева группа и $S^{(i)} = \langle S^{(i)}, S^{(i)g}\rangle = S^{(i)g}$. $\square$

Лемма 12. *$T(C_{(N_G(S^{(i)}))}(H_{S^{(i)}}) = (H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}})$, где $F_{S^{(i)}} \simeq L_2(Q)$, для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

Доказательство. Фактор-группа $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}$, ввиду [14, предложение 5], [17, следствие 2.4.4], является группой Шункова. Покажем, что она насыщена группами из множества $\{L_2(2^n) | n \geqslant 2\}$.

Действительно, пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}$, и K — ее конечный прообраз из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$. Зафиксируем некоторую подгруппу M_n из утверждения леммы 6. По условию насыщенности $M_n \simeq L_3(2^n)$ для некоторого n. Возьмем в M_n подгруппу $S^{(i)}_{M_n} < S^{(i)}$ (п.1 леммы 8). Так как $H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}}$, то $\langle K, H_{S^{(i)}_{M_n}}\rangle$ — конечная подгруппа из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$. Следовательно, $D = \langle S^{(i)}_{M_n}, H_{S^{(i)}_{M_n}}, K\rangle$ — конечная подгруппа из $N_G(S^{(i)})$.По условию насыщенности $D < D_1 \in \mathfrak{A}(1)$. Пусть S_{D_1} — силовская 2-подгруппа группы D_1 такая, что $Z(S_{M_n}) \leq Z(S_{D_1})$. Следовательно, $S_{D_1} < S$ (п. 11 предложения 1). По п.4 предложения 1 $S_{D_1} = S^{(1)}_{D_1} \cdot S^{(2)}_{D_1}$, где $S^{(1)}_{D_1}, S^{(2)}_{D_1}$ — максимальные элементарные абелевы подгруппы группы $S_{D_1}, S^{(1)}_{D_1} < S^{(1)}, S^{(2)}_{D_1} < S^{(2)}$ (п.6 леммы 8). По пп. 4, 14, 15 предложения 1 и лемме 11

$$N_{D_1}(S^{(i)}_{D_1}) = S^{(i)}_{D_1} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_1}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}}) < S^{(i)} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{D_1}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}}),$$

$$N_{D_1}(S_{D_1}^{(i)}) \cap T = S_{D_1}^{(i)} \leftthreetimes (H_{S_{D_1}^{(i)}} \times (S_{D_1 Z(S_{D_1})}^{(j)} \leftthreetimes W_{S_{D_1}^{(i)}})),$$

где

$$S_{M_n Z(S_{M_n})}^{(j)} < S_{D_1 Z(S_{D_1})}^{(j)}, H_{S_{M_n}^{(i)}} < H_{S_{D_1}^{(i)}} < H_{S^{(i)}}, W_{S_{M_n}^{(i)}} < W_{S_{D_1}^{(i)}} < W_{S^{(i)}},$$

$F_{S_{D_1}^{(i)}} \simeq L_2(2^n)$, $S_{D_1 Z(S_{D_1})}^{(j)}$ — силовская 2 подгруппа в $F_{S_{D_1}^{(i)}}$ такая, что $S_{D_1} = S_{D_1}^{(i)} S_{D_1 Z(S_{D_1})}^{(j)}$.

Покажем, что $F_{S_{D_1}^{(i)}} < C_G(H_{S^{(i)}})$. Возьмем элемент

$$1 \neq h \in \{H_{S^{(i)}} \setminus H_{S_{D_1}^{(i)}}\}$$

такой, что для некоторого простого $p, h^p \in H_{S_{D_1}^{(i)}}$. Возьмем инволюцию $v \in F_{S_{D_1}^{(i)}} \setminus S_{D_1 Z(S_{D_1})}^{(j)}$. Так как G — группа Шункова, то из того факта, что $\langle h, v\rangle < C_G(H_{S_{D_1}^{(i)}})$ вытекает, что $\langle h, v\rangle$ — конечная группа ([14, предложение 4], [17, следствие 2.4.4]), а $\langle S_{D_1}^{(i)}, h, v\rangle$ — конечная группа из $N_G(S^{(i)})$. По условию насыщенности $\langle S_{D_1}^{i}, h, v\rangle < D_2 \simeq L_3(2^m)$ для некоторого $m > n$. Так как $Z(S_{M_n}) < Z(S_{D_1}) < S_{D_1}^{(i)} < D_2$, то можно так выбрать силовскую 2-подгруппу S_{D_2} группы D_2, что $S_{D_1}^{(i)} < S_{D_2} < S$. По лемме 11 $N_{D_2}(S_{D_2}^{(i)}) < S^{(i)} \leftthreetimes (H_{S_{D_2}^{(i)}} \times F_{S_{D_2}^{(i)}})$. По пп. 4, 14, 15 предложения 1 $N_{D_2}(S_{D_2}^{(i)}) = S_{D_2}^{(i)} \leftthreetimes (H_{S_{D_2}^{(i)}} \times F_{S_{D_2}^{(i)}})$,

$$N_{D_2}(S_{D_2}^{(i)}) \cap T = S_{D_2}^{(i)} \leftthreetimes (H_{S_{D_2}^{(i)}} \times (S_{D_2 Z(S_{D_2})}^{(j)} \leftthreetimes W_{S_{D_2}^{(i)}})) \text{ где,}$$

$$S_{M_n Z(S_{M_n})}^{(j)} < S_{D_2 Z(S_{D_2})}^{(j)}, H_{S_{M_n}^{(i)}} < H_{S_{D_2}^{(i)}} < H_{S^{(i)}}, W_{S_{M_n}^{(i)}} < W_{S_{D_2}^{(i)}} < W_{S^{(i)}},$$

$S_{D_2 Z(S_{D_2})}^{(j)}$ — силовская 2 подгруппа в $F_{S_{D_2}^{(i)}} \simeq L_2(2^m)$ такая, что $S_{D_2} = S_{D_2}^{(i)} S_{D_2 Z(S_{D_2})}^{(j)}$. В силу выбора элемент h и группа $H_{S_{D_1}^{(i)}}$ лежат в

$$N_{D_2}(S_{D_2}^{(i)}) \cap H_{S^{(i)}} = H_{S_{D_2}^{(i)}}.$$

Как отмечалось выше, $v \in N_G(S^{(i)})$. Следовательно, $v \in N_{D_2}(S_{D_2}^{(i)})$, $v = ws$, где w — инволюция из $F_{S_{D_2}^{(i)}} \setminus S_{D_2 Z(S_{D_2})}^{(j)}$, s — инволюция из $S_{D_2}^{(i)}$. Тогда для любого $x \in H_{S_{D_2}^{(i)}}$ $x^v = x^{ws} = (x^w)^s = x^s \neq x$, но это невозможно, если $x \in H_{S^{(i)}_{M_n}}$, так как в этом случае, согласно выбору x, $x^v = x$. Следовательно, $s = 1$, $v = w \in F_{S^{(i)}_{D_2}}$ и v перестановочна с h. Так как $F_{S^{(i)}_{D_1}}$ порождается такими инволюциями, то $F_{S^{(i)}_{D_1}}$ централизует h и $K \leq C_{N_{D_1}(S^{(i)}_{D_1})}(H^{(i)}_{D_1})$. Далее, используя индукцию по порядку h ($H_{S^{(i)}}$ — локально циклическая групп), получаем, что $(H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}})$ – подгруппа из $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$, содержащая конечную подгруппу K. Переходя к фактор-группе $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}$, получаем, что $\overline{K} < (H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}_{D_1}})/H_{S^{(i)}} \simeq F_{S^{(i)}_{D_1}} \simeq L_2(2^n)$, что и требовалось. Следовательно, $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$ обладает периодической частью $T(C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})/H_{S^{(i)}}) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2 ([11, Теорема 1]. Отсюда вытекает существование периодической части в $C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})$ со следующей структурой: $T(C_{N_G(S^{(i)})}(H_{S^{(i)}})) = H_{S^{(i)}} \times F_{S^{(i)}}$, где $F_{S^{(i)}} \simeq L_2(Q)$ ([7, теорема 6.15]). □

Зафиксируем группу $F_{S^{(i)}}$ из утверждения леммы 12.

Лемма 13. *В G существует подгруппа M, обладающая следующими свойствами:*

1. *$M \simeq L_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q характеристики 2.*
2. *$T < M$.*
3. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа группы G.*
4. *$T(N_G(M)) = M$.*

Доказательство. В дополнение к соответствию, установленному между подгруппами группы L из п. 2 предложения 1 и подгруппами группы M_n (леммы 7, 9) положим $F_A \simeq F_{S^{(1)}_{M_n}}, F_A \simeq F_{S^{2)}_{M_n}}$ (группы F_A, F_B из пп. 14, 15 предложения 1). По лемме 12 $F_{S^{(i)}_{M_n}} \simeq L_2(2^{k_n})$ и $F_{S^{(i)}_{M_n}} < F_{S^{(i)}}$. По пп. 14, 15 предложения 1 $S^{(j)}_{M_n Z(S_{M_n})} = S_{M_n} \cap F_{S^{(i)}_{M_n}}$ – силовская 2-подгруппа из $F_{S^{(i)}_{M_n}}$. По п. 9 леммы 7 $N_{F_{S^{(i)}_{M_n}}}(S^{(j)}_{M_n Z(M_n)}) < N_{F_{S^{(1)}_{M_{n+1}}}}(S^{(j)}_{M_{n+1} Z(M_{n+1})})$. Так как $F^{(i)}_{S_{M_n}} < F_{S^{(i)}}$, то по [5, лемма 19] $F_{S^{(i)}_{M_n}} < F_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ Как отмечалось выше (лемма 10), $H_{S^{(i)}_{M_n}} < H_{S^{(i)}_{M_{n+1}}}$ По пп. 14, 15 предложения 1 $N_{M_n}(S^{(i)}_{M_n}) = S^{(i)}_{M_n} \leftthreetimes (H_{S^{(i)}_{M_n}} \times F_{S^{(i)}_{M_n}})$. Тогда, $N_{M_n}(S^{(1)}_{M_n}) < N_{M_{n+1}}(S^{(1)}_{M_{n+1}})$, $N_{M_n}(S^{(2)}_{M_n}) < N_{M_{n+1}}(S^{(2)}_{M_{n+1}})$, и $M_n = \langle N_{M_n}(S^{(1)}_{M_n}), N_{M_n}(S^{(2)}_{M_n}) \rangle$ (п. 4 предложения 1). Следовательно, $M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots$. В этом случае $\{M_1,\ M_2,\ \ldots, M_n,\ \ldots\}$ — насыщающее множество для группы $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$, и по [6, теорема 3] $M \simeq L_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q характеристики 2.

2. По п. 1, доказанному выше, $M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$. По пп. 6,7 леммы 6 $N_{M_1}(S_{M_1}) < \ldots < N_{M_n}(S_{M_n}) < \ldots$ и $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(S_{M_n})$. Следовательно, $T < M$.

3. По построению $S < M$. Пусть K — другая силовская 2-подгруппа из M, и K не является силовской 2-подгруппой в G. Тогда $K < K_1$ — силовская 2-подгруппа в G. Ясно, что $K_1 \not< M$. Так как силовские 2-подгруппы в M сопряжены, то для некоторого $g \in M, S^g = K, S^g < K_1$. Противоречие с тем, что S — силовская 2-подгруппа в группе G (лемма 5).

4. Пусть $c \in N_G(M) \setminus M$, и c — элемент конечного порядка. Если $S^c = S$, то по пункту 2, доказанному выше, $c \in M$, что противоречит выбору c. Если $S^c \neq S$, то для некоторого $x \in M$ выполнено $S^{cx} = S$ и $cx \in N_G(S)$. Так как cx — элемент конечного порядка из $N_G(M)$,то по пункту 2, доказанному выше, $cx \in M$. Следовательно, $c \in M$, что противоречит выбору c. $\square$

Завершим рассмотрение вариант II. Так как G — контрпример, то найдутся инволюции z, w такие, что $w \in G \setminus M,\ z \in Z(S) < M$. По условию насыщенности $\langle z, w\rangle < R \in \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $R \not< M$. Пусть K — силовская 2-подгруппа из R такая, что $z \in Z(K)$.

Рассмотрим случай $R \simeq L_3(2^n))$. Так как $z \in Z(S) < S < M$, то по лемме 5 (пункт 4.) $K < S$. Выберем в K инволюцию $v \in K \setminus Z(K)$. Так как в M все инволюции сопряжены, и $T(C_G(z)) < M$ (леммы 5 (пункт 4.), 13 (пункт 2)), то $T(C_G(v)) < M, C_R(v) < M$. Ввиду того, что R порождается централизаторами всех инволюций из K, получаем, в силу произвольности выбора инволюции v из $K \setminus Z(K)$, что $\langle C_R(x) \mid x \in K^{\#}, x^2 = 1\rangle = R < M$. Противоречие с тем, что $R \not< M$.

Рассмотрим случай $R \simeq U_3(q),\ q = 2^k \geqslant 4$. Так как $z \in Z(S)$ и K содержит элементы порядка 4, то $N_R(K) < M$. По [5, Предложение 1 (пункты 2,4)] $N_R(K) = K \leftthreetimes (H)$, где $H = (H_1 \times H_0)$, H — циклическая группа порядка $\frac{2^{2n}-1}{d}$, $d = 3$, если 3 делит число $2^n + 1$, и $d = 1$ в противном случае; $|H_0| = 2^n - 1$ и $|H_1| = \frac{2^n+1}{d}$. Возьмем в R инволюцию v такую, что $N_R(H) = H \leftthreetimes \langle v\rangle$, причем v инвертирует H_0 и централизует H_1 ([5, Предложение 1 (пункт 7)]). Ввиду того, что $N_R(K)$ — максимальная подгруппа в R, $v \notin M$ (в противном случае $R = \langle N_R(K), v\rangle < M$, что невозможно). Без ограничения общности можно считать, что инволюция $t = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ лежит в $N_{M_n}(S_{M_n})$. Следовательно, $t \in N_{M_n}(H)$, причем t инвертирует H_0 и централизует H_1. По условию насыщенности $\langle H, v, t\rangle < W \in \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $W \not< M$. Пусть

K_t — силовская 2-подгруппа из W такая, что $t \in Z(K_t)$. В этом случае $N_W(K_t) < M$. Если теперь $N_W(K_t)$ — максимальная подгруппа в W, то $W \simeq U_3(2^m), m > 1$ и $W = \langle N_W(K_t), H \leftthreetimes \langle t \rangle \rangle < M$. Противоречие с тем, что $W \not< M$. Следовательно, $N_W(K_t)$ — не максимальная подгруппа в W и $W \simeq L_3(2^m)$). Противоречие.

Вариант III. $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing, \mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Следовательно, в $\mathfrak{M}(1)$ найдутся подгруппы A и B, где $A \in \mathfrak{A}(1)$, $B \in \mathfrak{B}(1)$ такие, что $|A \cap B|$ делится на 2^5 [3, Предложение 2]. Это невозможно, поскольку силовская 2-подгруппа из $A \cap B$, с одной стороны (как подгруппа B), содержит элементарную абелеву секцию порядка 2^5, а с другой стороны, ранг любой элементарной абелевой 2-секции из A не превосходит двух. Таким образом, любой из трех возможных вариантов для структуры $\mathfrak{M}(1)$ приводит к противоречию. Теорема доказана.

5. Заключение

Класс групп Шункова не замкнут относительно взятия фактор-групп. В связи с чем актуален вопрос выделения условий, при которых переход к фактор-группе, оставляет группу в классе групп Шункова (теорема 1). В работе получил развитие метод доказательства существования периодической части в группе Шункова, насыщенной конечными простыми неабелевыми группами, на основе анализа бесконечных последовательностей конечных простых неабелевых подгрупп группы Шункова. Получено описание групп Шункова, насыщенных линейными и унитарными группами степени 3 над конечными полями (теорема 2).

Список литературы

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М. : Наука, 1982. 288 с.
2. Кондратьев А. С. Теория групп и алгебр Ли. Екатеринбург : Изд. Уро РАН, 2009. 309 с.
3. Лыткина Д. В., Шлепкин А. А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами типов U_3 и L_3 // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 441–448. https://doi.org/10.17377/alglog.2016.55.404
4. Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 606–626.
5. Лыткина Д. В, Тухватулина Л. Р., Филиппов К. А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 288–306.
6. Лыткина Д. В. О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 5. С. 628–653.
7. Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск : ИПК СФУ, 2011. 148 с.

8. Сенашов В. И., Шунков В. П. Группы с условиями конечности. Новосибирск : Изд. СО РАН, 2001.
9. Сенашов В. И., Шунков В. П. Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 3. С. 91–104.
10. Сенашов В. И. Характеризация групп с обобщенно черниковской периодической частью // Математические заметки. 2000. Т. 67, № 2. С. 270–275.
11. Филиппов К. А. О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$ // Вестник СибГАУ. 2012. № 1 С. 611-617.
12. Череп А. А. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.
13. Шлепкин А. А. О силовских 2-подгруппах групп Шункова, насыщенных группами $L_3(2^n)$ // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 275–282. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-4-275-282
14. Шлепкин А. А. Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 341–351. https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.029
15. Шлепкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Математические труды ИМ СО РАН. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
16. Шлепкин А. К. О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. С. 226–231.
17. Шлепкин А. К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 163 с.
18. Шлепкин А. К. О периодической части некоторых групп Шункова // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. С. 96–125.
19. Senashov V. I. On periodic groups of Shunkov with the Chernikov centralizers of involutions // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 32. P. 101–117. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.101
20. Shlepkin A. A. On a Sufficient Condition for the Existence of a Periodic Part in the Shunkov Group // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2017. Vol. 22. P. 90–105. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.22.90
21. Shlepkin A. A. Groups with a strongly embedded subgroup saturated with finite simple non-abelian groups // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 31. P. 132–141. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.132

Алексей Анатольевич Шлепкин, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, тел.: +7(3912)91-28-64, email: shlyopkin@gmail.com, ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-2241-2842.

Ирина Валерьевна Сабодах, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт управления бизнес-процессами, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, г. Красноярск, 660041, пр. Свободный, 79, тел.: +7(3912)91-28-64, email: sabodakh@mail.ru, ORCID iD https://orcid.org/0000-0001-8469-3761.

Поступила в редакцию 23.01.2021

On Two Properties of Shunkov Group

A. A. Shlepkin[1], I. V. Sabodakh[1]

[1] *Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation*

Abstract. One of the interesting classes of mixed groups (i.e. groups that can contain both elements of finite order and elements of infinite order) is the class of Shunkov groups. The group G is called Shunkov group if for any finite subgroup H of G in the quotient group $N_G(H)/H$, any two conjugate elements of prime order generate a finite group. When studying the Shunkov group G, a situation often arises when it is necessary to move to the quotient group of the group G by some of its normal subgroup N. In which cases is the resulting quotient group G/N again a Shunkov group? The paper gives a positive answer to this question, provided that the normal subgroup N is locally finite and the orders of elements of the subgroup N are mutually simple with the orders of elements of the quotient group G/N.

Let $\mathfrak{X}$ be a set of groups. A group G is saturated with groups from the set $\mathfrak{X}$ if any finite subgroup of G is contained in a subgroup of G that is isomorphic to some group of $\mathfrak{X}$. If all elements of finite orders from the group G are contained in a periodic subgroup of the group G, then it is called the periodic part of the group G and is denoted by $T(G)$. It is proved that the Shunkov group saturated with finite linear and unitary groups of degree 3 over finite fields has a periodic part that is isomorphic to either a linear or unitary group of degree 3 on a suitable locally finite field.

Keywords: Shunkov group, groups saturated with a given set of groups, periodic part of group.

References

1. Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I. *Osnovy teorii grupp.* [Foundations of group theory.] Moscow, Nauka Publ., 1982, 288 p.
2. Kondrat'ev A.S. *Teorija grupp i algebr Li.* [Theory of Lie groups and Lie algebras]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2009, 309 p.
3. Lytkina D.V., Shlepkin, A.A. Periodic groups saturated with finite simple groups of types Y_3 and A_3. *Algebra and logic,* 2016, vol. 55, no. 4, pp. 441-448. https://doi.org/10.17377/alglog.2016.55.404
4. Lytkina D.V., Mazurov V.D. Periodic Groups saturated with $L_3(2^m)$ groups. *Algebra and Logic,* 2007, vol. 46, no. 5, pp. 606–626.
5. Lytkina D.V, Tuhvatulina L.R., Filippov K.A. Periodicheskie gruppy, nasyshhennye konechnymi prostymi gruppami $U_3(2^m)$. *Algebra and Logic,* 2008, vol. 47, no. 3, pp. 288-306.
6. Lytkina D.V. Groups saturated with finite simple groups. *Algebra and logic,* 2009, vol. 48, no. 5, pp. 628–653.
7. Sozutov A.I., Suchkov N.M., Suchkova N.G. *Beskonechnye gruppy s involjucijami.* [Infinite groups with involutions.] Krasnoyarsk, IPK SFU Publ., 2011, 148 p.
8. Senashov V.I., Shunkov V.P *Gruppy s uslovijami konechnosti.* [Groups with finiteness conditions.] Novosibirsk, SB RAS Publ., 2001. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.101
9. Senashov V.I., Shunkov V.P. Almost layer finiteness of the periodic part of a group without involutions. *Discrete Math.,* 2003, vol. 15, no. 3, pp. 91–104.

10. Senashov V.I. Characterization of groups with a generalized Chernikov periodic part. *Math notes,* 2000. vol. 67, no. 2, pp. 270–275.
11. Filippov K.A. On the periodic part of the Shunkov group saturated with $L_2(p^n)$. *Bulletin of SibGAU,* 2012, pp. 611–617.
12. Cherep A.A. On the set of elements of finite order in a biprimitively finite group. On the set of elements of finite order in a biprimitively finite group. *Algebra and Logic,* 1987, vol. 26, no. 4, pp. 518-521.
13. Shlepkin A.A. Sylow 2-subgroups of Shunkov groups saturated with groups $L_3(2^n)$. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,* 2019, vol. 25, no. 4, pp. 275–282. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-4-275-282
14. Shlepkin A.A. Shunkov groups saturated with linear and unitary groups of degree 3 over fields of odd orders. *Siberian electronic mathematical reports,* 2016, vol. 13, pp. 341–351. https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.029
15. Shlepkin A.K. On some periodic groups saturated with finite simple subgroups. *Mathematical works, IM SB RAS,* vol. 1, no. 1, pp. 129–138.
16. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitively finite groups with the condition of primary minimality. *Algebra and Logic,* 1983, vol. 22, pp. 226–231.
17. Shlepkin A.K. *Shunkov groups with additional restrictions.* Dr. Sci. Dis. Krasnoyarsk, 1998, 163 p.
18. Shlepkin A.K. On the periodic part of some Shunkov groups. *Algebra and Logic,* 1999, vol. 38, pp. 96–125.
19. Senashov V.I. On periodic groups of Shunkov with the Chernikov centralizers of involutions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2020, vol. 32, pp. 101–117. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.101
20. Shlepkin A.A. On a Sufficient Condition for the Existence of a Periodic Part in the Shunkov Group. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2017, vol. 22, pp. 90–105. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.22.90
21. Shlepkin A.A. Groups with a strongly embedded subgroup saturated with finite simple non-abelian groups. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics,* 2020, vol. 31, pp. 132–141. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.132

Aleksei Shlepkin, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Siberian Federal university, 79, Svobodny av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, tel.: +7(3912)91-28-64,
email: shlyopkin@gmail.com,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-2241-2842

Irina Sabodakh, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Siberian Federal University, 79, Svobodny av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, tel.: +7(3912)91-28-64,
email: sabodax@mail.ru,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0001-8469-3761.

Received 23.01.2021