Серия «Математика»
2020. Т. 34. С. 67—76

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.98
MSC 47H99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.67

О роли априорных оценок в методе нелокального продолжения решений по параметру

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается итерационный метод продолжения решений по параметру. Изучается нелокальный случай, когда параметр принадлежит отрезку вещественной оси. Строится итерационная схема продолжения решения для линейного уравнения в банаховых пространствах с линейным оператором, зависящим от параметра и удовлетворяющим условию Липшица относительно параметра. Дается обобщение этого результата на нелинейное уравнение в банаховых пространствах. Предполагается, что нелинейное отображение зависит от вещественного параметра. Приводится итерационная схема метода продолжения решения по параметру с использованием метода Ньютона – Канторовича. В работе используется наличие априорных оценок решений, позволяющее строить решение при любых значениях параметра.

Ключевые слова: глобальная разрешимость, метод продолжения по параметру, метод гомотопии, метод Ньютона – Канторовича, операторное уравнение, единственность решения.

Введение

Метод продолжения по параметру развивался начиная с XX столетия многими выдающимися математиками (С. Бернштейн, Г. Вейль, Г. Леви, Ж. А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, А. И. Некрасов и др.). Метод применялся для доказательства конструктивных теорем существования, позволил решить ряд сложных прикладных задач, стимулировал развитие новых областей нелинейного анализа. Этапы этих исследований отражены в обзоре Л. А. Люстерника [6]. В последнее время метод продолжения по параметру получил дальнейшее развитие в соответствии с последними достижениями компьютерных реализаций, см., например, работы [8; 9; 11; 13] и их библиографию. Находит метод приложения и в исследованиях моделей в экономике [2].

Некоторые варианты этого метода называют методом гомотопических возмущений. Это демонстрирует популярность и усиление эффективности метода как в нелинейном анализе, так и в ряде прикладных областей современной науки и техники. В связи с этим его строгое обоснование с указанием границ сходимости относительно параметров является актуальной задачей. К практическим достоинствам метода относится простота его алгоритмизации. Особо отметим, что сходимость соответствующих методов последовательных приближений параметрических ветвей решений, как правило, устанавливалась только в локальной ситуации. В теории глобальной обратимости операторов с параметрами имеются лишь отдельные частные результаты, см., например, [14; 21]. Основы аналитических, топологических, вариационных, групповых и приближенных методов в теории продолжения решений нелинейных уравнений в нерегулярных случаях изложены в ряде работ (см., например, [15–17]). Подробную библиографию можно найти в монографиях [1; 3–5; 18].

В данной работе рассмотрен метод последовательных приближений параметрических решений в случае, когда параметр принадлежит отрезку вещественной оси. В доказательстве сходимости используется наличие априорной оценки решения. Отметим, что априорные оценки, как правило, используются в работах по глобальной разрешимости [3].

Структура работы. В п. 1 излагается метод нелокального продолжения решения линейного уравнения. В п. 2 проведено обобщение результатов п. 1 на нелинейные уравнения с использованием метода Ньютона – Канторовича. В п. 3 рассмотрено приложение метода продолжения по параметру при выборе начального приближения решения линейного уравнения. Перспективы метода продолжения по параметру в нерегулярном случае обсуждаются в п. 4.

1. О продолжении по параметру решений линейных уравнений

Рассмотрим линейное уравнение

$$B(\lambda)x = f. \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda \in [0, \rho] \subset \mathbb{R}^1$, $B : [0, \rho] \to \mathcal{L}(X \to Y)$ — линейный ограниченный оператор, X, Y — банаховы пространства, $f \in Y$. Требуется построить решение $x(\lambda)$ в точках $\lambda_i = ih$, $i = 1, \ldots, N$, где $h = \frac{\rho}{N}$ и указать способ вычисления обратных операторов $B^{-1}(\lambda_i)$.

Теорема 1. *Пусть существует ограниченный обратный оператор* $B^{-1}(0)$ *и выполнено условие Липшица* $||B(\lambda) - B(\mu)|| \le l|\lambda - \mu|$ *при* λ, μ *из отрезка* $[0, \rho]$. *Пусть*

$$||B(\lambda)x||_Y \ge \gamma ||x||_X \tag{1.2}$$

при $\lambda \in [0, \rho]$ *и* $x \in X$. *Тогда существует* $N_0 < \infty$, *такое, что в точках* $\lambda_i = ih$, $i = 1, \ldots, N$, *где* $h = \frac{\rho}{N}$ *и* $N \ge N_0$ *существуют ограниченные обратные операторы* $B^{-1}(\lambda_i)$ *и их можно построить, используя последовательные приближения*

$$B^{-1}(h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (B^{-1}(0)(B(0) - B(h))^k) B^{-1}(0), \tag{1.3}$$

$$B^{-1}(jh) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big(B^{-1}((j-1)h)(B((j-1)h) - B(jh)) \Big)^k B^{-1}((j-1)h),\ j = 2, \ldots, N. \tag{1.4}$$

Доказательство. Так как $B^{-1}(0) \in \mathcal{L}(Y \to X)$ и выполнена априорная оценка (1.2), то

$$||B^{-1}(0)|| \le 1/\gamma.$$

Фиксируем $q < 1$. Используя тождество $B(h) = B(0)[I + B^{-1}(0)(B(h) - B(0))]$, где $h \le \frac{\gamma}{l} q$, построим на основании известных свойств линейных операторов линейный обратный оператор (1.3).

Для доказательства сходимости последовательности (1.3) в смысле нормы банахова пространства $\mathcal{L}(Y \to X)$ нетрудно установить с помощью неравенства Липшица оценку $||B^{-1}(0)(B(0) - B(h))|| \le q < 1$ при $h \le \frac{\gamma}{l} q$. Отметим, что при этом в силу априорной оценки (1.2), очевидно, получим оценку

$$||B^{-1}(h)|| \le 1/\gamma.$$

Доказательство завершается применением метода математической индукции. Действительно, пусть $||B(ih)||^{-1} \le 1/\gamma$, $i = 1, \ldots, j-1$. Тогда $B(jh) = B((j-1)h)[I - (B^{-1}((j-1)h)(B((j-1)h) - B(jh))]$, где $||B^{-1}((j-1)h)(B((j-1)h) - B(jh))|| \le \frac{1}{\gamma} lh \le q < 1$. Следовательно, $B^{-1}(jh) \in \mathcal{L}(Y \to X)$, причем, в силу (1.2)

$$||B^{-1}(jh)|| \le \frac{1}{\gamma}.$$

Следовательно, искомые обратные операторы существуют и строятся по формуле (1.4), где сходимость к линейному ограниченному оператору вытекает из полноты пространства $\mathcal{L}(Y \to X)$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда при достаточно малом* $h > 0$ *для решений уравнения* (1.1) *в точках* $\{ih\}_{i=1}^{N}$ *из* $[0, \rho]$ *справедливы рекуррентные формулы*

$$x(0) = B^{-1}(0)f,$$

$$x(h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(I + B^{-1}(0)(B(h) - B(0))\big)^k x(0),$$

$$x(jh) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(I + B^{-1}((j-1)h)(B(jh) - B((j-1)h))\big)^k x((j-1)h), \quad (1.5)$$

$$j = 2, 3, \dots, N.$$

Для вычисления обратных операторов можно использовать формулу (1.4).

Замечание 1. Так как в силу теоремы 1 операторы $B(jh)$ непрерывно обратимы, то для построения последовательности элементов

$$x(0), x(h), x(2h), \dots,$$

кроме последовательных итераций (1.5), можно использовать и другие известные методы.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оператор* $B(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный при* $\forall\lambda \in [0, \rho]$.

Доказательство. Доказательство очевидно, так как при выполнении условий теоремы 1 множество точек λ_i, в которых оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный открыто и замкнуто на отрезке $[0, \rho]$. □

2. О сходимости последовательных приближений в методе Ньютона – Канторовича при продолжении решения по параметру

Рассмотрим уравнение

$$F(x, \lambda) = f, \quad (2.1)$$

где $F : X \times [0, \rho] \to Y$: нелинейное отображение, X, Y — банаховы пространства, $\lambda \in [0, \rho]$, $f \in Y$.

Пусть выполнены условия:

1) отображение $F(x,\lambda)$ и его производные $F_x(x,\lambda)$, $F_\lambda(x,\lambda)$ определены при $x \in X$, $\lambda \in [0,\rho]$, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по x и λ в области $D = \{\lambda, x | \lambda \in [0,\rho], ||x - x_0|| < R\}$, где элемент x_0 удовлетворяет уравнению

$$F(x,0) = f; \tag{2.2}$$

2) существует ограниченный обратный оператор

$$F_x^{-1}(x_0, 0) \in \mathcal{L}(Y \to X).$$

Требуется построить решение $x(\lambda)$ уравнения (1.1) в точках $\lambda_i = ih$, $i = 1, 2, \ldots, N$ при $h = \frac{\rho}{N}$. Если h достаточно мало, то при $\forall \lambda \in [0, h]$ на основании теоремы о неявном отображении [7], последовательность $\{x_n(\lambda)\}$, вычисляемая однозначно из линейных уравнений

$$F_x(x_0, 0)[x_n(\lambda) - x_{n-1}(\lambda)] + F(x_{n-1}(\lambda), \lambda) = f \tag{2.3}$$

при начальном приближении $x_0(\lambda) = x_0$, сходится к решению $x(\lambda)$ уравнения (2.1). Более того, функция $x(\lambda)$ в силу условия 1 будет удовлетворять условию Липшица. Таким образом, $x(h) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(h)$, где $\{x_n(h)\}$ строится, используя формулу (2.3) метода Ньютона – Канторовича. С целью гарантированной сходимости этого метода при дальнейшем продолжении решения по параметру λ, введем условие:

3) Пусть оценка $||x - x_0|| \le R$ является априорной оценкой искомого непрерывного решения уравнения (2.1) при $\lambda \in [0,\rho]$ и $||F_x(x,\lambda)u|| \ge \gamma||u||$ при $||x - x_0|| \le R$, $\lambda \in [0,\rho]$.

Тогда $||F_x^{-1}(x(h), h)|| \le \frac{1}{\gamma}$ и можно построить элемент $x(2h)$, решая последовательность уравнений

$$F_x(x(h), h)[x_n(2h) - x_{n-1}(2h)] + F(x_{n-1}(2h), 2h) = f,\ n = 1, 2, \ldots$$

при начальном приближении $x_0(2h) = x(h)$. Элементы $x_n(2h)$ остаются в области притяжения метода и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(2h) = x(2h)$ на основании теоремы Канторовича.

Таким образом, условие 3 позволяет гарантировать возможность продолжения решения уравнения (2.1) по параметру λ. Используя метод Ньютона – Канторовича, можно последовательно вычислять элементы $x(ih)$, $i = 1, \ldots, N$, где $h = \frac{\rho}{N}$ и достаточно мало.

3. Приложение метода продолжения по параметру при выборе начального приближения решения линейного уравнения

Пусть требуется решить линейное уравнение

$$Ax = f, \tag{3.1}$$

где $A \in \mathcal{L}(X \to Y)$, $f \in Y$.

Введем вспомогательный непрерывно-обратимый линейный оператор $B \in \mathcal{L}(X \to Y)$. Уравнение

$$Bx = f \tag{3.2}$$

имеет единственное решение $x_0 = B^{-1}f$, которое будем предполагать построенным. Отметим возможность широкого выбора оператора B, так как $||B - A||$ может быть сколь угодно большой.

Введем линейное уравнение

$$B(\lambda)x = f, \tag{3.3}$$

где $B(\lambda) = B + \lambda(A - B)$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$||B(\lambda_1) - B(\lambda_2)|| = ||B - A|||\lambda_1 - \lambda_2| \tag{3.4}$$

для $\forall \lambda_1, \lambda_2$.

Оператор $B(\lambda)$ называют гомотопией для операторов B и A, см. [9; 10]. Следуя п. 1, предполагаем, что оператор B выбран так, что удается получить априорную оценку

$$||B(\lambda)x||_Y \geq \gamma ||x||_X \tag{3.5}$$

для $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\gamma > 0$. Тогда очевидно

$$||B^{-1}||_{\mathcal{L}(Y \to X)} \leq \frac{1}{\gamma},$$

а уравнение (3.3) и при $0 < \lambda \leq 1$ может иметь не более одного решения.

Фиксируем $0 < q < 1$ и выберем $h \leq q\frac{\gamma}{||B-A||}$. Тогда при $0 < \lambda \leq h$ последовательность $\{x_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая единственным образом из линейного уравнения

$$Bx_n(\lambda) + \lambda(B - A)x_{n-1}(\lambda) = f \tag{3.6}$$

при начальном приближении $x_0(\lambda) \equiv x_0$, сходится равномерно к решению $x(\lambda)$ уравнения (3.3). Этот процесс можно продолжить далее и построить решение исходного уравнения (3.1) при $\forall \lambda$ из отрезка $[0, 1]$.

Действительно, выберем на отрезке $[0,1]$ точки $\lambda_i = ih_0$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $h_0 = \frac{1}{N} \leq h$. Тогда на основании Теоремы 1 из п. 1 все операторы $B(\lambda_i)$ будут непрерывно обратимы, а при решении i-го уравнения $B(\lambda_i)x_i = f$, $i = 2, 3, \ldots, N$ можно использовать в качестве начального приближения решение x_{i-1} предыдущего уравнения. Так, для нахождения x_1 в качестве начального приближения используется решение x_0 вспомогательного уравнения (3.2). Изложенный метод был использован нами в работе [13] при решении интегральных уравнений Вольтерра. Метод гомотопических возмущений с успехом использовался и при численном решении некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений [8; 9].

Заключение

В статье рассмотрен метод продолжения по параметру в регулярном случае, когда оператор $B(0)$ (соответственно оператор $F_x(x_0, 0)$) непрерывно обратим. Если оператор $B(0)$ не обратим и имеет место оценка $||B(\lambda)x|| \geq c\lambda^n ||x||$ при $\lambda \in (0, \rho]$, то решение нелинейного уравнения (2.1) может иметь в точке $\lambda = 0$ полюс n-го порядка. Если в нелинейном уравнении (3.1) оператор $F_x(x_0, 0)$ не является обратимым, то точка $\lambda = 0$ будет точкой ветвления решения, а уравнение (3.1) может иметь несколько решений $x(\lambda)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{\lambda \to 0} x(\lambda) = x_0$. Вопрос о выборе оптимального шага продолжения по параметру требует отдельного рассмотрения с учетом специфики задачи.

Разработка приближенных методов построения решений уравнения (3.1) в нерегулярных случаях представляет особый интерес и требует привлечения тонких методов, включая методы скелетных разложений операторов, групповой симметрии, теории бифуркации, современных методов регуляризации (см. [12; 19; 20]).

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. : Наука, 1969. 528 с.
2. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. 2012. Т. 48, № 2. С. 95–107.
3. Корпусов М. О., Панин А. А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Нелинейные классы. Т. 3. М. : Физическиий факультет МГУ, 2016. 259 с.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных уравнений. М. : Гостехиздат, 1956. 392 с.

5. Логинов Б. В. Теория ветвления решений нелиненйных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент : ФАН, 1985. 184 с.
6. Люстерник Л. А. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа // УМН, 1956. Т. 11, № 6 (72). С.145–168.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. 3-е изд., испр. М. : Физматлит, 2002. 488 с.
8. Fedorov A. A., Berdnikov A. S., Kurochkin V. E. The polymerase chain reaction model analyzed by the homotopy perturbation method // Journal of Mathematical Chemistry. 2019. Vol. 57. P. 971–985. https://doi.org/10.1007/s10910-018-00998-8.
9. He J. H. Homotopy perturbation technique // Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 1999. 178. P. 257–262. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00018-3
10. He J. H. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique // Applied Mathematics and Computation. 2003. Vol. 135, No. 1. P. 73–79. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00312-5
11. Liao S. On the homotopy analysis method for nonlinear problems // Applied Mathematics and Computation. 2004. Vol. 147, N 2. P. 499–513 https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00790-7
12. Loginov B.V., Sidorov N.A. Group symmetry of the Lyapunov-Schmidt branching equation and interative methods in the problem of a bifurcation point // Mathematics of the USSR - Sbornik. 1992. Vol. 73, N 1. P. 67–77.
13. Error estimation of the homotopy perturbation method to solve second kind Volterra integral equations with piecewise smooth kernels: application of the CADNA library / S. Noeiaghdam, A. Dreglea, J. He, Z. Avazzadeh, M. Suleman, M. A. F. Araghi, D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Symmetry. 2020. Vol. 1730, 12. 10. P. 1–20. https://doi.org/10.3390/sym12101730
14. Sidorov N. A., Sidorov D. N., Dreglea A. I. Solvability and bifurcation of solutions of nonlinear equations with Fredholm operator // Symmetry. 2020. Vol. 12, N 6. P. 912. https://doi.org/10.3390/sym12060912
15. Sidorov N. A., Trufanov V. A. Nonlinear operator equations with a functional perturbation of the argument of neutral type // Differential Equations. 2009. Vol. 45, 1840. P. 1840–1844. https://doi.org/10.1134/S0012266109120155
16. Sidorov N. A. A class of degenerate differential equations with convergence // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1984. Vol. 35. P. 300–305. https://doi.org/10.1007/BF01139992
17. Sidorov N. A., Sidorov D. N., Krasnik A. V. Solution of Volterra operator-integral equations in the nonregular case by the successive approximation method // Differential Equations. 2010. Vol. 46. P. 882–889. https://doi.org/10.1134/S001226611006011X
18. Sidorov N. A., Sidorov D. N., Sinitsyn A. V. Toward general theory of differential-operator and kinetic models. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science Series A. Vol. 97 / eds. L. Chua. S'pore : World Scientific, 2020. 400 p. https://doi.org/10.1142/11651
19. Sidorov D. N., Sidorov N. A. Solution of irregular systems of partial differential equations using skeleton decomposition of linear operators // South Ural State University Bulletin. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2017. Vol. 10, N 2. P. 63–73. https://doi.org/10.14529/mmp170205
20. Sidorov N. A., Leont'ev R. Yu., Dreglea A. I. On small solutions of nonlinear equations with vector parameter in sectorial neighborhoods // Mathematical Notes. 2012. Vol. 91. P. 90–104. https://doi.org/10.1134/S0001434612010105
21. Trenogin V. A. Locally invertible operators and the method of continuation with respect to parameter // Functional Analysis and its Applications. 1996. Vol. 30, N 2. P. 93–95. https://doi.org/10.1007/BF02509460

Известия Иркутского государственного университета.
2020. Т. 34. Серия «Математика». С. 67–76

Николай Александрович Сидоров, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521296, email: sidorov@math.isu.runnet.ru.

Поступила в редакцию 28.10.2020

The Role of a Priori Estimates in the Method of Non-local Continuation of Solution by Parameter

N. A. Sidorov

Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation

Abstract. An iterative method for continuation of solutions with respect to a parameter is proposed. The nonlocal case is studied when the parameter belongs to the segment of the real axis. An iterative scheme for continuing the solution is constructed for a linear equation in Banach spaces with a linear operator continuously depending on the parameter, satisfying the Lipschitz condition with respect to the parameter. The generalization of this result on a nonlinear equation in Banach spaces is proposed. The iterative scheme of the method of continuation of the solution by parameter using the Newton-Kantorovich method is constructed. An priori estimates of solutions enable solution construction for arbitrary parameters.

Keywords: global solvability, parameter continuation method, homotopy analysis method, Newton-Kantorovich method, operator equation, uniqueness of solution.

References

1. Vainberg M.M., Trenogin V.A. *Theory of branching of solutions of nonlinear equations.* Groningen, Wolters-Noordhoff B.V., 1964, 510 p.
2. Gorbunov V.K., L'vov A.G. Postroenie proizvodstvennyh funkcij po dannym ob investiciyah [The Construction of Production Functions Using Investment Data]. *Ekonom. i Matem. Metody*, 2012, vol. 48, no. 2, pp. 95–107. (in Russian)
3. Korpusov M.O., Panin A.A. *Lekcii po lineinomu i nelineinomu funkcional'nomu analizu* [Lectures on linear and nonlinear functional analysis], vol. 3, Nonlinear classes. Moscow, Physics Faculty MSU Publ., 2016, 259 p. (in Russian)
4. Krasnosel'skii M.A. *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations.* Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1964, 395 p.
5. Loginov B.V. *Teoriya vetvleniya reshenij nelinejnyh uravnenij v usloviyah gruppovoj invariantnosti* [Branching solutions theory of nonlinear equations under group invariance conditions]. Tashkent, FAN Publ., 1985, 185 p. (in Russian)
6. Lusternik L.A. Some issues of nonlinear functional analysis. *Russian math. surveys.*, 1956, vol. 6, no. 11, pp.145-168.
7. Trénoguine V.A. *Analyse fonctionnelle* [traduit du russe par V. Kotliar]. Moscow, Mir Publ., 1985.
8. Fedorov A.A., Berdnikov A.S., Kurochkin V.E. The polymerase chain reaction model analyzed by the homotopy perturbation method. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2019, vol. 57, pp. 971-985. https://doi.org/10.1007/s10910-018-00998-8.

9. He J.H. Homotopy perturbation technique. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 1999, vol. 178, pp. 257-262. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00018-3.
10. He J.H. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, vol. 135, pp. 73-79. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00312-5
11. Liao S. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, vol. 147, no. 2, pp. 499-513. https://doi.org/S0096-3003(02)00790-7
12. Loginov B.V., Sidorov N.A. Group symmetry of the Lyapunov-Schmidt branching equation and interative methods in the problem of a bifurcation point. *Mathematics of the USSR - Sbornik,* 1992, vol. 73, no. 1, pp. 67-77. https://doi.org/10.1070/SM1992v073n01ABEH002535
13. Noeiaghdam S., Dreglea A., He J., Avazzadeh Z., Suleman M., Araghi M.A.F., Sidorov D.N., Sidorov N.A. Error estimation of the homotopy perturbation method to solve second kind Volterra integral equations with piecewise smooth kernels: application of the CADNA Library. *Symmetry*, 2002, vol. 12, 1730, 10, pp. 1-20. https://doi.org/10.3390/sym12101730
14. Sidorov N.A., Sidorov D.N., Dreglea A.I. Solvability and bifurcation of solutions of nonlinear equations with Fredholm operator. *Symmetry*, 2020, vol. 12, 912. https://doi.org/10.3390/sym12060912.
15. Sidorov N.A., Trufanov A.V. Nonlinear operator equations with a functional perturbation of the argument of neutral type. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, pp. 1840-1844. https://doi.org/10.1134/S0012266109120155
16. Sidorov N.A. A class of degenerate differential equations with convergence. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1984, vol. 35, pp. 300-305. https://doi.org/10.1007/BF01139992
17. Sidorov N.A., Sidorov D.N., Krasnik A.V. *Solution of Volterra operator-integral equations in the nonregular case by the successive approximation method. Differential Equations*, 2010, vol. 46, pp. 882-889. https://doi.org/10.1134/S001226611006011X
18. Sidorov N.A., Sidorov D.N., Sinitsyn A.V. *Toward general theory of differential-operator and kinetic models.* Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science Series A vol. 97. Eds. L. Chua. S'pore, World Scientific, 2020, 400 p. https://doi.org/10.1142/11651
19. Sidorov D.N., Sidorov N.A. Solution of irregular systems of partial differential equations using skeleton decomposition of linear operators. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model Progr.*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 63-73. https://doi.org/10.14529/mmp170205
20. Sidorov N.A., Leont'ev R.Yu., Dreglea A.I. On small solutions of nonlinear equations with vector parameter in sectorial neighborhoods. *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, pp. 90-104. https://doi.org/10.1134/S0001434612010105
21. Trenogin V.A. Locally invertible operators and the method of continuation with respect to parameter. *Functional Analysis and its Applications*, 1996, vol. 30, no. 2, pp. 93-95. https://doi.org/10.1007/BF02509460

Nikolai Sidorov, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: +7 (3952) 521296, email: sidorov@math.isu.runnet.ru.

Received 28.10.2020