Серия «Математика»
2020. Т. 32. С. 94—100

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.57
MSC 08A99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.94

Алгебраические множества широких алгебр

А. Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация. Работа посвящена вопросам алгебраической геометрии универсальных алгебр, а более точно, вопросам строения алгебраических множеств этих алгебр. Вводится понятие широкой универсальной алгебры. Приводится ряд естественных примеров подобных универсальных алгебр, как то: решетки функциональных клонов на множествах, группы перестановок на множествах, решетки разбиений множеств, счетные свободные булевы алгебры, прямые степени универсальных алгебр и др. Рассматриваются особенности строения алгебраических множеств широких универсальных алгебр. Доказывается алгебраическая n-полнота широких универсальных алгебр для любого натурального числа n. Представлены результаты о строении квазипорядка на широкой универсальной алгебре индуцированного внутренними гомоморфизмами (гомоморфизмами между подалгебрами) этой алгебры. Приводятся оценки мощностей алгебраических множеств широких универсальных алгебр. Получен ряд результатов о минимальных совокупностях порождающих алгебраических множеств широких универсальных алгебр.

Ключевые слова: алгебраическое множество, широкая алгебра, n-полная алгебра.

1. Введение

Одним из основных понятий алгебраической геометрии универсальных алгебр является понятие алгебраического множества (см., к примеру, [1; 4], [6; 10]) и связанное с ним понятие алгебраического замыкания для подмножеств универсальных алгебр. В настоящей работе описаны особенности строения алгебраических множеств для введенных в этой работе $\aleph$-широких алгебр к каковым, в частности, относятся $\aleph$-

степени любых алгебр, решетки функциональных клонов на множествах мощности $\aleph$ (для бесконечных кардиналов $\aleph$) и целый ряд других алгебр.

2. Широкие алгебры: примеры, особенности строения их алгебраических множеств.

Напомним, что множество $B \subseteq A^n$ называется алгебраическим для алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, если B есть совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) системы σ-термальных уравнений

$\{t_i^1(x_1, \cdots, x_n) = t_i^2(x_1, \cdots, x_n) | i \in I\}$:

$B = \{\overline{b} =< b_1, \cdots, b_n >\in A^n | \ \mathfrak{A} \models t_i^1(\overline{b}) = t_i^2(\overline{b})$ для всех $i \in I\}$.

В работе [4] введено понятие алгебраического замыкания $Alg_{\mathfrak{A}} B$ множества $B \subseteq A^n$ для алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ как наименьшего алгебраического множества алгебры $\mathfrak{A}$, включающего в себя B.

Для любого кортежа $\overline{b} =< b_1, \cdots, b_n >$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ через $D^+_{\mathfrak{A},\overline{b}}$ обозначим позитивную диаграмму кортежа $\overline{b}$ в алгебре $\mathfrak{A}$, т.е. $D^+_{\mathfrak{A},\overline{b}} = \{t_i^1(x_1, \cdots, x_n) = t_i^2(x_1, \cdots, x_n) | t_i^j(x_1, \cdots, x_n)$ — термы сигнатуры σ такие, что $\mathfrak{A} \models t_i^1(\overline{b}) = t_i^2(\overline{b})\}$.

Таким образом, для любого $B \subseteq A^n$ $Alg_{\mathfrak{A}} B = \{\overline{c} \in A^n | \mathfrak{A} \models t'(\overline{c}) = t''(\overline{c})$ для любого $t'(\overline{x}) = t''(\overline{x}) \in \bigcap\limits_{\overline{b} \in B} D^+_{\mathfrak{A},\overline{b}}\}$.

Алгебраическое множество B алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ назовем $\aleph$-*порожденным* (здесь $\aleph$ — произвольный кардинал), если для некоторого $C \subseteq B$, мощности не превышающей $\aleph$, имеет место равенство $Alg_{\mathfrak{A}} C = B$.

Напомним также, что внутренним гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой гомоморфизм какой-либо подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ на ее же подалгебру. Для любого кортежа $\overline{a} =< a_1, \cdots, a_n >$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ через $< \overline{a} >_{\mathfrak{A}}$ обозначим подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$ порожденную множеством $\{a_1, \cdots, a_n\}$.

В той же работе [4] на декартовых степенях A^n основного множества A алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ введены отношения квазипорядков $\leq_{Ihm_n \mathfrak{A}}$: для $\overline{b}, \overline{c} \in A^n$: $\overline{b} \leq_{Ihm_n \mathfrak{A}} \overline{c}$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм φ алгебры $< \overline{c} >_{\mathfrak{A}}$ на $< \overline{b} >_{\mathfrak{A}}$ такой, что $\varphi(c_i) = b_i$ для любого $i \leq n$. Очевидным образом имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. [5] *Для любых $\overline{b}, \overline{c} \in A^n$ следующие условия равносильны:*

1) $\overline{b} \leq_{Ihm_n \mathfrak{A}} \overline{c}$;

2) $\mathfrak{A} \models D^+_{\mathfrak{A},\overline{c}} \overline{b}$;

3) $\overline{b} \in Alg_{\mathfrak{A}} \{\overline{c}\}$.

Для любого кардинала $\aleph$ алгебру $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ назовем $\aleph$-*широкой*, если ее прямая $\aleph$-степень $\mathfrak{A}^{\aleph}$ вложима в $\mathfrak{A}$. Алгебру $\mathfrak{A} =< A; \sigma >

назовем *ω-широкой*, если она n-широка для любого натурального n (очевидно, что для этого ей достаточно быть 2-широкой).

Заметим, что определение $\aleph$-широкой алгебры $\mathfrak{A}$ может быть сформулировано не выходя за пределы этой самой алгебры - в терминах ее внутренних гомоморфизмов: алгебра $\mathfrak{A}$ является $\aleph$-широкой тогда и только тогда, когда существуют изоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ на некоторую ее подалгебру $\mathfrak{A}'$, подалгебра $\mathfrak{A}''$ алгебры $\mathfrak{A}$ включающая в себя $\mathfrak{A}'$ и набор гомоморфизмов $\pi_i (i \in \aleph)$ алгебры $\mathfrak{A}''$ на алгебру $\mathfrak{A}'$ таких, что для любой совокупности a_i элементов из $\mathfrak{A}'$ существует и при этом единственный элемент $a \in \mathfrak{A}''$ такой, что $\pi_i(a) = a_i$ для любого $i \in \aleph$.

Простейшим примером $\aleph$-широких алгебр для (бесконечных $\aleph$) служат $\aleph$-степени $\mathfrak{A}^{\aleph}$ любых алгебр $\mathfrak{A}$. Столь же очевидно, что $\aleph$-широкими (для бесконечных $\aleph$) являются решетки разбиений множеств мощности $\aleph$ и группы перестановок подобных множеств. Другим примером $\aleph$-широких алгебр служат решетки функциональных клонов на множествах мощности $\aleph$ для бесконечных кардиналов $\aleph$. В качестве ω-широких алгебр укажем к примеру на счетно порожденные свободные булевы алгебры и таковые же для абелевых многообразий групп.

Утверждение 1. *Для любого бесконечного кардинала $\aleph$ решетка $L_\aleph$ функциональных клонов на множестве мощности $\aleph$ является $\aleph$-широкой.*

Доказательство. Пусть B_i $(i \in \aleph)$ и $\{e\}$ — попарно дизъюнктные множества такие, что $|B_i| = \aleph$ для любого $i \in \aleph$ и $B = \bigcup\limits_{i\in\aleph} B_i \cup \{e\}$. Покажем, что $L_\aleph^\aleph = \prod\limits_{i\in\aleph} L_{B_i}$ изоморфно вложима в решетку $L_B \cong L_\aleph$. Пусть для $i \in \aleph$ ϕ_i — некоторая биекция кардинала $\aleph$ на множество B_i. Пусть $h \in L_\aleph^\aleph$, т.е. для $i \in \aleph$ $h_(i)$ - функциональный клон на множестве $\aleph$. Функциональный клон $\phi(h)$ на множестве B определим условием: функция $g(x_1, \cdots, x_n) \in B^{B^n}$ входит в $\phi(h)$ тогда и только тогда, когда ограничение g на любое из множеств B_i $(i \in \aleph)$ есть ϕ_i-сопряжение некоторой функции из клона $h(i)$; в случае же когда элементы $a_1, \cdots, a_n$ множества B не входят ни в одно из B_i $(i \in \aleph)$ полагаем $g(a_1, \cdots, a_n)$ равным e.

Непосредственно замечается, что отображение φ является вложением решетки $L_\aleph^\aleph$ в решетку $L_B \cong L_\aleph$ и утверждение 1 доказано. $\square$

Алгебру $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ назовем алгебраически n-$\aleph$-*полной*, если для любого $B \subseteq A^n$ такого, что $|B| \leq \aleph$ существует $\overline{a} \in A^n$ такой, что $Alg_{\mathfrak{A}} B = Alg_{\mathfrak{A}}\{\overline{a}\}$. Иначе говоря, алгебра $\mathfrak{A}$ является n-$\aleph$-полной для любого $n \in \omega$ тогда и только тогда когда все ее $\aleph$-порожденные алгебраические множества являются 1-порожденными. Отметим, что алгебраически n - $\aleph$-полные алгебры $\mathfrak{A}$, в случае, когда $\aleph = |\mathfrak{A}|$ суть алгебраически n-полные алгебры (см., [5]).

Для любого квазиупорядоченного множества $< A; \leq >$ через $\sim$ обозначим отношение эквивалентности на A порожденное квазипорядком $\leq$ (из контекста всегда будет ясно о каком квазипорядке на A идет речь). Естественным образом перенесем на квазипорядок $< A; \leq >$ основные понятия связанные с частичными порядками, имея в виду апелляцию к частично упорядоченному множеству $< A/\sim; \leq >$. В частности, будем говорить о супремумах в квазиупорядоченных множествах. А под *квазирешеткой* будем понимать любой квазипорядок $< A; \leq >$ такой, что $< A/\sim; \leq >$ является решеткой при добавлении к $< A/\sim; \leq >$, при необходимости, внешнего наименьшего элемента. Квазиупорядоченное множество $< A; \leq >$ будем называть $\aleph$-полной квазирешеткой, если $< A; \leq >$ квазирешетка и любое его подмножество мощности не более чем $\aleph$ имеет супремум в $< A; \leq >$. Из утверждений леммы 1 вытекает, что любая алгебра $\mathfrak{A} =< A; \sigma > n$ - $\aleph$-полна тогда и только тогда, когда квазипорядок $< A^n; \leq_{Ihm_n \mathfrak{A}} >$ является $\aleph$-полной квазирешеткой.

Теорема 1. *Любая $\aleph$-широкая алгебра n-$\aleph$-полна для любого $n \in \omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ является $\aleph$-широкой алгеброй, $B \subseteq A^n$ и $|B| = \aleph$. Пусть φ— некоторое вложение алгебры $\mathfrak{A}^B$ в $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}_0$ - диагональная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}^B$ (т.е. $\mathfrak{A}_0 = \{f \in \mathfrak{A}^B|$ для любых $b_1, b_2 \in B$ $f(b_1) = f(b_2)\}$) и пусть ψ - некоторый изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}_0$, а $B_0 = \psi(B)$. Тогда, очевидно, что $\psi(Alg_{\mathfrak{A}} B) = Alg_{\mathfrak{A}_0} B_0$. Пусть $\bar{b} =< b_1, \cdots, b_n > \in (\mathfrak{A}^B)^n$ таково, что для любого $\bar{d} \in B$ $\bar{b}(\bar{d}) =< b_1(\bar{d}), \cdots, b_n(\bar{d}) >= \bar{d}$. Тогда $D^+_{\mathfrak{A}^B, \bar{b}} = \bigcap\limits_{\bar{d} \in B} D^+_{\mathfrak{A}, \bar{b}(\bar{d})}$, но $D^+_{\mathfrak{A}, \varphi(\bar{b})} = D^+_{\mathfrak{A}^B, \bar{b}}$ и, значит, $D^+_{\mathfrak{A}, \varphi(\bar{b})} = \bigcap\limits_{\bar{d} \in B} D^+_{\mathfrak{A}, \bar{b}(\bar{d})}$. А так как $\{\bar{b}(\bar{d}) | \bar{d} \in B\} = B$, то $D^+_{\mathfrak{A}, \varphi(\bar{b})} = D^+_{\mathfrak{A}, B}$. Таким образом $Alg_{\mathfrak{A}}\{\varphi(\bar{b})\} = Alg_{\mathfrak{A}} B$. То есть $\mathfrak{A}$ n-$\aleph$-полна и теорема доказана. $\square$

Из утверждения теоремы 1 и замеченного выше о квазипорядках $\leq_{Ihm_n \mathfrak{A}}$ вытекает

Следствие 1. *Для любой $\aleph$ -широкой алгебры $\mathfrak{A}$ и любого натурального n квазипорядок $< A^n; \leq_{Ihm_n \mathfrak{A}} >$ является $\aleph$-полной квазирешеткой.*

Доказательство теоремы 1 позволяет так же сделать заключение о мощностях $\aleph$-порожденных алгебраических множеств $\aleph$-широких алгебр.

Следствие 2. *Для любого бесконечного $\aleph$ любое алгебраическое $\aleph$ -порожденное неодноэлементное множество $\aleph$ -широкой алгебры имеет мощность не менее чем $2^{\aleph}$ и, при этом, не менее чем $2^{\aleph}$ его элементов будут его однопорождающими.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в обозначениях доказательства теоремы 1 таковыми будут являться элементы вида $\bar{b}(\pi(\bar{d}))$, где ϕ — любая перестановка на множестве B. $\square$

Покажем также, что имеет место

Следствие 3. *Для любой ω-широкой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, для любого конечного не одноэлементного $B \subseteq A^n$ его алгебраическое замыкание $Alg_{\mathfrak{A}} B$ будет не менее чем счетно и не менее чем счетное число элементов из $Alg_{\mathfrak{A}} B$ его порождают.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ ω-широкая алгебра и B_0 некоторое m-элементное подмножество множества B и $m > 1$. Тогда, как следует из доказательства теоремы 1, $|Alg_{\mathfrak{A}} B_0| \geq m^m > m$. Пусть $B_1 \subseteq Alg_{\mathfrak{A}} B_0$ некоторое подмножество множества $Alg_{\mathfrak{A}} B$ включающее в себя B_0 и $|B_1| = m^m$. Итерируя эту процедуру строим счетную цепочку множеств $B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_k \subset B_{k+1} \subset \cdots Alg_{\mathfrak{A}} B$ и доказывающую, в конечном итоге, утверждение этого следствия. $\square$

Заметим, что ограничение, что $Alg_{\mathfrak{A}} B$ порождается некоторым конечным не одноэлементным множеством B существенно. Пусть $B = \{a_i | i \in \omega\}$, $C = \{b_i | i \in \omega\}$ два счетных дизъюнктных множества и $D = \{d\}$ — одноэлементное множество дизъюнктное с $B \cup C$. На множестве $A = B \cup C \cup D$ определим алгебру $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ сигнатуры состоящей из одной одноместной функции $f(x) : f(a_i) = b_i, f(b_i) = a_i$ (для $i \in \omega$) и $f(d) = d$. Очевидным образом алгебра $\mathfrak{A}$ является ω-широкой, но в то же время $Alg_{\mathfrak{A}}\{d\} = \{d\}$.

3. Заключение

В силу естественности примеров широких алгебр представляет интерес дальнейшее исследование алгебро-логических свойств подобных алгебр.

Список литературы

1. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Универсальная алгебраическая геометрия // Доклады АН РФ. 2011. Т. 439, № 6. С. 730–732.
2. Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия алгебраических систем. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2016. 244 с.
3. Пинус А. Г. Алгебраическая и логическая геометрии универсальных алгебр (унифицированный подход) // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, № 1. С. 189–204.

4. Пинус А. Г. О квазипорядке, индуцированным внутренними гомоморфизмами и об операторе алгебраического замыкания // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, № 3. С. 629–636. https://doi.org/10.17377/smzh 2015.56.313.
5. Пинус А. Г. n-алгебраически полные алгебры, псевдопрямые произведения и оператор алгебраического замыкания на подмножествах универсальных алгебр // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, № 4. С. 97–102. https://doi.org/10.377/PAM 2016.16.409
6. Пинус А. Г. Об алгебраических множествах универсальных алгебр // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 156–162. https://doi.org/10.17377/semi 2017.14.016.
7. Плоткин Б. И. Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 224–248.
8. Плоткин Б. И. Проблемы алгебры инспирированные универсальной алгебраической геометрией // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 3. С. 181–197.
9. Pinus A. G. Algebraic sets of universal algebras and algebraic closure operator // Lobachevskii Journal of Math. 2017. Vol. 38, N 4. P. 719-723. https:/doi.org/10.1134/SI 995080217040163.
10. Plotkin B. Varieties of algebras and algebraic varieties // Israel J. Math. 1996. Vol. 96, N 2. P. 511-522.

Александр Георгиевич Пинус, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, Российская Федерация, 630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел. (383)3461166, email: ag.pinus@gmail.com,
ORCIDiD https://orcid.org/000-0001-9764-3034

Поступила в редакцию 05.05.2020

The Algebraic Sets of Broad Algebras

A. G. Pinus

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

Abstract. The paper is devoted to the questions of algebraic geometry of universal algebras, more precisely, to the structures of algebraic sets of this algebras. It is introduced the concept of broad universal algebra. Some natural examples of such universal algebras are given including the lattices of functional clones on sets, the groups of permutations on sets, the lattices of partitions on sets, the countable free Boolean algebras, and the direct powers of universal algebras and others. Some special features of the structures of algebraic sets of broad universal algebras are considered. We prove the algebraic n-completnes of broad universal algebras. The results on the structure of the quasiorder which is generated on the broad universal algebra by its inner homomorphisms (homomorphisms between subalgebras) are presented. Some estimations of the powers of algebraic sets of the broad universal algebras are given. Some results on the minimal sets which are generated of algebraic sets of the broad universal algebras are obtained.

Keywords: algebraic set, broad algebra, n-completeness algebra.

References

1. Daniyarova E.Yu., Myasnikov A.G., Remeslennikov V.N. Universal algebraic geometry. *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, no. 1, pp. 545-547.
2. Daniyarova E.Yu., Myasnikov A.G., Remeslennikov V.N. *Algebraic geometry of algebraic systems*. Novosibirsk, SB RAS Publ., 2016, 244 p. (in Russian)
3. Pinus A.G. Algebraic and logical geometry of universal algebras(a unified approach). *Journal of Mathematices Sciences*, 2012. vol. 185, no. 3, pp. 473-483.
4. Pinus A.G. On the quasiorder induced by inner homomorphisms and the operator of algebraic closure. *Siberian Math. Journal*, 2015, vol. 56, no. 3, pp. 499-504. https:/doi.org/10.17377/smzh 2015.56.313.
5. Pinus A.G. n-Algebraic complete algebras, pseudodirect products and the operator of algebraic closure on the subsets of universal algebras. *Journal of Mathematices Sciences,* 2018, vol. 230, no. 1, pp. 141-145. https:/doi.org/10.17377/PAM 2016.16.409.
6. Pinus A.G. On algebraic sets of universal algebras. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 156-162. (in Russian) https:/doi.org/10 17377/semi 2017.14.016.
7. Plotkin B.I. Some concepts of algebraic geometry in universal algebra. *St. Petersburg Math. Journal,* 1997, vol. 9, no. 4, pp. 869-879.
8. Plotkin B.I. Problems in algebra inspired by universal algebraic geometry. *Journal of Mathematices Sciences,* 2004, vol. 139, no. 4, pp.6780-6791.
9. Pinus A.G. Algebraic sets of universal algebras and algebraic closure operator. *Lobachevskii Journal of Math.,* 2017, vol. 38, no. 4, pp. 719-723. https:/doi.org/10.1134/SI 995080217040163.
10. Plotkin B. Varieties of algebras and algebraic varieties. *Israel Journal of Math.,* 1996, vol. 96, no. 2, pp. 511-522.

Alexandr Pinus, Doctor of Sciences (Phisics and Mathematics), Professor, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx av., 630073, Novosibirsk, Russian Federation, tel. (383)3461166,
email: ag.pinus@gmail.com,
ORCIDiD https://orcid.org/000-0001-9764-3034

Received 05.05.2020