ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Серия «Математика»
2020. Т. 31. С. 78—95

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.2
MSC 60E05, 60E015; 28C20, 60F99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.78

Дробная гладкость распределений тригонометрических полиномов на пространстве с гауссовской мерой

Г. И. Зеленов[1,2]

[1] *Московский государственный университет, Москва, Российская Федерация,*
[2] *Высшая школа экономики, Москва, Российская Федерация*

Аннотация. Исследуются свойства образов гауссовской меры под действием тригонометрических полиномов фиксированной степени на конечномерных пространствах произвольной размерности. Показано, что образы n-мерной гауссовской меры под действием тригонометрических полиномов являются мерами с плотностями из класса Никольского – Бесова с дробным показателем. Эти свойства образов гауссовской меры использованы для получения оценок расстояния по вариации между двумя образами n-мерной гауссовской меры под действием тригонометрических полиномов через расстояние по Форте – Мурье между этими образами. Также получены обобщения данных результатов на случай образов гауссовской меры под действием k-мерных отображений, компоненты которых являются тригонометрическими полиномами.

Ключевые слова: класс Никольского – Бесова, гауссовская мера, распределение тригонометрического полинома.

1. Введение

Пусть f, g — два многочлена степени d от n переменных, а γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Для оценивания расстояния по вариации между распределениями многочленов полезны оценки вида:

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma_n \circ f^{-1}, \gamma_n \circ g^{-1}) \leq C\|f-g\|_{L^p(\gamma_n)}^{\Theta(d)}. \tag{1.1}$$

где число C может зависеть от степени d и некоторых числовых характеристик f и g (например, некоторых норм или дисперсий).

Оценки вида (1.1) с $\Theta(d) = 1/d$ можно найти в работах [20] и [6], но необходимо заметить, что в [20] и [6] нет полного доказательства. Доказательства из [20] и [6] используют теорему I.3 из диссертации Г. В. Мартыновой [9]. Альтернативный подход к получению оценки вида (1.1) с $\Theta = 1/d$ предложен в работе автора [26].

Также оценка вида (1.1) с $\Theta = 1/2d$ была получена в [24]. Помимо (1.1), в [24] получена оценка (см. [24, доказательство теоремы 3.1]):

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1}) \leq C d_{\mathrm{FM}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1})^{\theta}, \quad \theta = \frac{1}{2d+1}, \tag{1.2}$$

где f, g — два многочлена степени d на пространстве с гауссовской мерой γ, а d_{FM} — расстояние по Форте – Мурье. Позже в [23] была получена похожая оценка для k-мерных случайных векторов f и g, составленных из многочленов степени d.

Затем в работах [3] и [18] были получены оценки типа (1.2) с лучшими (т.е. большими) показателями Θ, чем в [24] и [23]: оказалось, что можно взять $\Theta = 1/(d+1)$ в случае двух многочленов f, g и $\Theta = 1/(4k(d-1)+1+\tau)$ в случае k-мерных случайных векторов f и g, составленных из многочленов степени d. (см. [18, теорема 5.9] и [18, теорема 4.2]). Попутно в [3] и [18] было доказано, что если $f \neq \mathrm{const}$ — многочлен степени d, а γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, то мера $\gamma_n \circ f^{-1}$ лежит в классе Никольского – Бесова с дробным показателем (см. [18, теорема 5.7] и [18, теорема 4.1]; о дробных классах Соболева см. [1; 12; 13; 25]). Близкие вопросы исследуются в [2; 4; 5; 7; 8; 22].

Стоит заметить, что все константы и показатели в перечисленных выше результатах не зависят от числа n. Это позволяет устремлять n к бесконечности и переходить к измеримым полиномам от бесконечного числа переменных.

Представляют интерес свойства меры $\gamma_n \circ f^{-1}$ в том случае, когда f — не многочлен, а функция какого-нибудь другого класса. Например, можно рассмотреть случай, когда f — тригонометрический полином степени d. В частности, в [20, раздел 4] приводится следующий результат:

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma_n \circ f^{-1}, \gamma_n \circ g^{-1}) \leq C\|f-g\|_{\infty}^{\frac{1}{2d+1}} \tag{1.3}$$

где $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — тригонометрические полиномы степени d, γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$.

В данной работе мы получим обобщения результатов [3] и [18] на случай тригонометрических полиномов. Будет доказано, что в случае, когда $f \neq \mathrm{const}$ — тригонометрический полином, меры $\gamma_n \circ f^{-1}$ лежат в классах Никольского – Бесова, а также получена оценка вида (1.2) для тригонометрических полиномов (см. теорему 3 и следствие 3). Также будут получены аналоги этих результатов на случай отображений с образами в $\mathbb{R}^k$, компоненты которых составлены из тригонометрических полиномов (см. теорему 1 и следствие 4).

2. Определения и обозначения

Стандартная гауссовская мера γ_n на $\mathbb{R}^n$ задается плотностью

$$(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2).$$

Нам понадобятся стандартные нормы $\|f\|_{L^p(\gamma_n)}$ для функций f на $\mathbb{R}^n$. Для краткости мы часто будем писать $\|f\|_p$ вместо $\|f\|_{L^p(\gamma_n)}$ Также нам понадобится норма $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$.

Выражение $\mu \circ f^{-1}$ обозначает образ меры μ под действием измеримого отображения $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. По определению,

$$\mu \circ f^{-1}(A) = \mu(f^{-1}(A)),$$

для борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^k$. Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые стандартные нормальные случайные величины, а $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — измеримое отображение, то мера $\gamma_n \circ f^{-1}$ будет в точности законом распределения вектора $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Напомним определение расстояния по вариации $d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu)$ между борелевскими мерами μ, ν на $\mathbb{R}^k$. Это расстояние задается нормой

$$\|\sigma\|_{\mathrm{TV}} := \sup\Bigl\{\int \varphi\, d\sigma,\ \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k),\ \|\varphi\|_\infty \le 1\Bigr\},$$

где $C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$ — множество ограниченных бесконечно дифференцируемых функций, у которых ограничены все производные.

Для формулировки нескольких результатов нам потребуется ввести метрику Форте – Мурье (см. [21, с. 277–279]):

$$d_{\mathrm{FM}}(\mu, \nu) := \sup\Bigl\{\int \varphi\, d(\mu - \nu),\ \varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k),\ \|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty \le 1\Bigr\}.$$

Это расстояние, вообще говоря, меньше расстояния по вариации.

Введем дробный соболевский класс $B^\alpha(\mathbb{R}^k) = B^\alpha_{1,\infty}(\mathbb{R}^k)$ (см. [1], [12]). По определению, класс Никольского–Бесова $B^\alpha_{1,\infty}(\mathbb{R}^k)$ порядка $\alpha \in (0,1)$ состоит из таких $\varrho \in L^1(\mathbb{R}^k)$, что для некоторого $C(\varrho)$

$$\|\varrho(\cdot + h) - \varrho\|_{L^1} \le C(\varrho)|h|^\alpha \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^k. \tag{2.1}$$

Для класса $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ есть и другие обозначения: он обозначен символом $H^\alpha_1(\mathbb{R}^k)$ в [12], символом $B^{\alpha;1,\infty}(\mathbb{R}^k)$ в [13] и символом $\Lambda^{1,\infty}_\alpha$ в [25].

В данной работе классы $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ возникают при изучении борелевских мер. Пусть ν — ограниченная борелевская мера на $\mathbb{R}^k$, а ν_h — ее сдвиг на вектор h:

$$\nu_h(A) = \nu(A - h).$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ совпадет с множеством плотностей тех ограниченных борелевских мер ν на $\mathbb{R}^k$, которые удовлетворяют условию

$$\|\nu_h - \nu\|_{\mathrm{TV}} \le C_\nu|h|^\alpha \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^k \tag{2.2}$$

для некоторого числа C_ν. Мы будем говорить, что мера ν лежит в $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$, подразумевая, что ее плотность лежит в $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$.

Замечание 1. Наличие плотности у мер на $\mathbb{R}^k$, удовлетворяющих условию (2.2), следует из результатов [14, глава 3, предложение 3.4.3].

Введем норму $\|\cdot\|_{B^\alpha}$ на просатранстве $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$:

$$\|\nu\|_{B^\alpha} := \inf\{C\colon\ \|\nu - \nu_h\|_{\mathrm{TV}} \le C|h|^\alpha\}.$$

Заметим, что пространство $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ не является полным по этой норме.

Принадлежность меры ν к классу $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ проверяется с помощью предложения: (см. [3, предложение 3.1], [18, теорема 1], [17, §2])

Предложение 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и ν — такая борелевская мера на $\mathbb{R}^k$, что для каждой функции $\varphi \in C^\infty_b(\mathbb{R}^k)$ и каждого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^k$ верна оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \partial_e\varphi(x)\,\nu(dx) \le C\|\varphi\|^\alpha_\infty\,\|\partial_e\varphi\|^{1-\alpha}_\infty.$$

Тогда $\nu \in B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ и $\|\nu\|_{B^\alpha} \le 2^{1-\alpha}C$.

Для мер из $\nu \in B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ имеет место следующая теорема (см. [18, теорема 3.2, замечание 3.3], а также [3, теорема 2]).

Теорема 1. *Пусть $\nu, \sigma \in B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ — борелевские вероятностные меры на $\mathbb{R}^k$. Пусть $C(k,\alpha) = 1 + \|x^\alpha\|_{L^1(\gamma_k)}$. Имеет место оценка*

$$\|\sigma - \nu\|_{\mathrm{TV}} \le C(k,\alpha)\|\sigma - \nu\|^{1/(1+\alpha)}_{B^\alpha} d_{\mathrm{FM}}(\sigma,\nu)^{\alpha/(1+\alpha)}. \tag{2.3}$$

Замечание 2. Из (2.3) следует, что в множестве борелевских вероятностных мер ν с условием $\|\nu\|_{B^\alpha} \leq C_0$ ($C_0 \in \mathbb{R}$) из сходимости по метрике d_{FM} следует сходимость по вариации. Это довольно неожиданный факт, поскольку для вероятностных мер сходимость в метрике d_{FM} равносильна слабой сходимости (см. [16, §8.3, 8.10]).

Определение 1. *Пространство $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ тригонометрических полиномов степени d от n переменных — это линейное пространство функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующего вида:*

$$P(\cos x_1; \sin x_1; \ldots; \cos x_n; \sin x_n),$$

где P — полином степени не выше d от $2n$ переменных.

Пусть $f \in \mathcal{TR}_m(\mathbb{R}^n)$ для некоторого m. Скажем, что тригонометрический полином f *имеет степень в точности* d, если d — наименьшее из всех m, при которых $f \in \mathcal{TR}_m(\mathbb{R}^n)$.

3. Вспомогательные утверждения

По определению $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$, всякая $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ ограничена и все частные производные f тоже ограничены. Поэтому $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ вложено в пространство Соболева $W^{2,1}(\gamma_n)$, состоящее из таких $\varphi \in L^2(\gamma_n)$, у которых все частные производные $\partial_k\varphi$ сами лежат в $L^2(\gamma_n)$.

Отсюда, в частности, следует, что для $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство Пуанкаре (см. теорему 1.6.4 из [15]):

$$\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, d\gamma_n(y) \right)^2 d\gamma_n(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla f \rangle\, d\gamma_n(x). \quad (3.1)$$

В этом выражении σ_f^2 — дисперсия f (функция f является случайной величиной на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n; \mathcal{B}(\mathbb{R}^n); \gamma_n)$).

Пусть Δ — оператор Лапласа. Введем оператор Орнштейна–Уленбека L, ассоциированный с гауссовской мерой γ_n на $\mathbb{R}^n$:

$$L\varphi(x) = \Delta\varphi(x) - \langle x, \nabla\varphi(x)\rangle,$$

L — симметричный оператор на $L^2(\gamma_n)$. Ясно, что что L корректно определен для всех $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Известно, что для f, g из $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула:

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lf\, g\, d\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle\, d\gamma_n. \quad (3.2)$$

(См. предложение 1.5.5 в [15]; на самом деле, эта формула интегрирования по частям верна для всех $f \in W^{2,2}(\gamma_n)$, $g \in W^{2,1}(\gamma_n)$.)

Если подставить в (3.2) $g = u \cdot v$, где $u, v \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, и вспомнить, что $\nabla(u \cdot v) = u \cdot (\nabla v) + v \cdot (\nabla u)$, то можно получить формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \langle \nabla f, \nabla v\rangle \, d\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n} Lf \cdot u \cdot v \, d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} v \cdot \langle \nabla f, \nabla u\rangle \, d\gamma_n. \quad (3.3)$$

Так как $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n) \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, (3.2) и (3.3) верны при $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$.

Кроме формул (3.2) и (3.3), нам понадобятся оценки, связанные с L^p-нормами функций из $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$. В работе [10] доказана теорема:

Теорема 2 (Лемма Турана). *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Существует число A_0, что для произвольного $p(t)$ из $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^1)$, и произвольного измеримого $E \subset I$ с мерой Лебега $\mu(E) > 0$ выполнено*

$$\sup_{t\in I} |p(t)| \le C(d, |I|) \sup_{t\in E} |p(t)| (A_0 |I|)^{2d} \big(\mu(E)\big)^{-2d},$$

где $C(d, |I|)$ зависит только от $d \in \mathbb{N}$ и $|I|$ — длины I.

Пусть $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ и $f \ne \mathrm{const}$. При $0 < p < 1$ введем величины $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\gamma_n)}$ по аналогии с нормами $\|f\|_{L^q(\gamma_n)}$ с $q \ge 1$. В случае $p = 0$ положим: $\|f\|_0 = \lim_{p\to 0} \|f\|_p$. При $p \in [0, 1)$ нарушается неравенство треугольника, и поэтому $\|\cdot\|_p$ — не нормы. Введем $M(f)$ такое, что $\gamma_n(x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge M(f)) = e^{-1}$. Доказано (см. [11, п. 2]), что из леммы Турана можно вывести оценки:

Предложение 2. *Для $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ верны неравенства:*

$$\gamma_n(x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le (A_0\lambda)^{-2d} M(f)\,) \le \lambda^{-1}; \quad (3.4)$$

$$\|f\|_p \le (3A_0 \max(1, 2dp))^2 d \cdot M(f) \quad (3.5)$$

$$(eA_0)^{-2d} M(f) \le \|f\|_0 \le (3A_0)^2 d \cdot M(f). \quad (3.6)$$

Следствие 1. *Пусть $p, q \in [0, +\infty)$; $d \in \mathbb{N}$. Существуют такие $m = m(d, p, q) > 0$ и $M = M(d, p, q) > 0$, что для всех $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство*

$$m \cdot \|f\|_p \le \|f\|_q \le M \cdot \|f\|_p. \quad (3.7)$$

Доказательство. Из обычного неравенства Гёльдера, примененного к функциям $|f|^p$ и 1, следует, что $\|f\|_{L^p(\gamma_n)} \le \|f\|_{L^q(\gamma_n)}$ при $0 \le p < q \le \infty$. Теперь применим (3.5) и (3.6), и закончим доказательство . □

Замечание 3. Следует отметить тот факт, что при фиксированном d числа m и M в неравенстве (3.7) одинаковы для любого значения n.

Следующее утверждение, является аналогом неравенства Карбери–Райта (см. [19], а также [11]) для функций из $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 3. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует такое $c(d)$, что для всякого $n \in \mathbb{N}$, и всякого $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство*

$$\gamma_n(|f| \le t) \cdot \|f\|_1^{1/2d} \le c(d)t^{1/2d}, \quad t \ge 0.$$

Доказательство. В (3.4) возьмем $\lambda = M^{1/2d}(f) \cdot A_0^{-1} \cdot t^{-1/2d}$, $t \ge 0$, применим (3.5) с $p = 1$ и получим $\gamma(|f| \le t) \cdot \|f\|_1^{1/2d} \le c(A_0, d) \cdot t^{1/2d}$. Предложение доказано. □

Следствие 2. *Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $p \ge 1$. Существует такое $c(d,p)$, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ и всякого $f \ge 0$, $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ верно неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(f+\varepsilon)^p}\, d\gamma_n \le \varepsilon^{-p+1/2d} c(d,p) \|f\|_1^{-1/2d}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Функция $\xi = (f+\varepsilon)^{-1}$ является случайной величиной на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n; \mathcal{B}; \gamma)$. Мы знаем, что $f \ge 0$. Следовательно, $\xi \in (0, \varepsilon^{-1})$. Отсюда следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+\varepsilon)^{-p}\, d\gamma_n = E(\xi^p) = \int_0^{\varepsilon^{-1}} p \cdot t^{p-1} \gamma_n\big((f+\varepsilon)^{-1} \ge t\big)\, dt =$$
$$= p \int_0^{\infty} (s+\varepsilon)^{-p-1} \gamma_n\big(f \le s\big)\, ds = p \cdot \varepsilon^{-p} \int_0^{\infty} (u+1)^{-p-1} \gamma_n\big(f \le \varepsilon \cdot u\big)\, du.$$

Из этой выкладки и предложения 3 следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f+\varepsilon)^{-p}\, d\gamma_n \le \frac{\varepsilon^{1/2d} \cdot c(d,p)}{\varepsilon^p \cdot \|f\|_1^{1/2d}}; \quad c(d,p) := 2c(d)p \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2d}}{(u+1)^{1+p}}\, du.$$

Мы получили искомую оценку. □

Нам также потребуется следующая лемма, которая позволяет оценить норму градиента $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ через норму самой f.

Лемма 1. *Существует такое $C(d)$, что*

$$\|\nabla f\|_2 \le C(d) \|f\|_2$$

для всякого тригонометрического полинома $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ от произвольного числа переменных $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $n = 1$. В пространстве $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R})$ возьмем базис

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \ldots,\ \cos(d \cdot t),\ \sin(d \cdot t).$$

Применив ортогонализацию относительно скалярного произведения из $L^2(\gamma_1)$, получим $e_0 = 1$, e_1, e_{-1}, $\ldots$, e_d, e_{-d} — ортонормированный базис. При этом $e_{\pm k}$ будут лежать в $\mathcal{TR}_k(\mathbb{R})$. Заметим, что $\|\nabla f\|_2 = \|f'\|_2$ — полунорма на $(2d+1)$-мерном пространстве $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R})$, поэтому найдется число $M(d)$ такое, что

$$\|\nabla f\|_2 \leq M(d)\|f\|_2 \tag{3.9}$$

для всех $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^1)$. Мы доказали оценку для $n=1$ с $C(d) = M(d)$.

Покажем, что при $n>1$ искомая оценка выполнена с $C(d) = \sqrt{d}M(d)$. Стандартная гауссовская мера γ_n на $\mathbb{R}^n$ представима в виде

$$\gamma_n(dx_1 \ldots dx_n) = \gamma_1(dx_1) \times \gamma_1(dx_2) \times \ldots \times \gamma_1(dx_n).$$

Поэтому из теоремы Фубини следует, что в $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ можно рассмотреть ортонормированный базис

$$e_{j_1}(x_1)e_{j_2}(x_2)\ldots e_{j_n}(x_n); \quad |j_1| + \ldots + |j_n| \leq d$$

В этом базисе $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ запишется в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|J_{1n}| \leq d} a_{j_1\ldots j_n} \cdot e_{j_1}(x_1)\ldots e_{j_n}(x_n).$$

Для краткости введем обозначение $|J_{kn}| = |j_k| + \ldots + |j_n|$. Ясно, что

$$\|f\|_2^2 = \sum_{|J_{1n}| \leq d} a^2_{j_1\ldots j_n}.$$

Чтобы оценить норму градиента f, сначала оценим норму $\|\partial_1 f\|_2$. Для этого обозначим $D_j = d - |J_{2n}|$ и перепишем $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде

$$f = \sum_{|J_{2n}| \leq d} e_{j_2}(x_2)\ldots e_{j_n}(x_n) \cdot \sum_{|j_1| \leq D_j} a_{j_1\ldots j_n} \cdot e_{j_1}(x_1).$$

Поскольку $\partial_1 e_0(x_1) = \partial_1 1 = 0$, мы можем написать

$$\partial_1 f = \sum_{|J_{2n}| \leq d} e_{j_2}(x_2)\ldots e_{j_n}(x_n) \cdot \sum_{|j_1| \leq D_j} \delta_{(j_1 \neq 0)} a_{j_1\ldots j_n} \cdot \partial_1 e_{j_1}(x_1),$$

где $\delta_{(j_1 \neq 0)} = 1$ при $j_1 \neq 0$ и 0 в противном случае.

Применяя теорему Фубини и ортонормированность базиса e_k пространства $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^1)$, мы получаем, что

$$\|\partial_1 f\|_2^2 = \sum_{|J_{2n}| \leq d} 1 \cdot \Bigg\| \sum_{|j_1| \leq D_j} \delta_{(j_1 \neq 0)} a_{j_1\ldots j_n} \cdot \partial_1 e_{j_1}(x_1) \Bigg\|^2_{L^2(\gamma_1)} \tag{3.10}$$

Обозначим $F_{j_2\ldots j_n}(x_1) = \sum_{|j_1| \leq D_j} \delta_{(j_1 \neq 0)} a_{j_1\ldots j_n} \cdot e_{j_1}(x_1)$. Легко заметить, что $F_{j_2\ldots j_n}(x_1) \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^1)$, и к нему можно применить (3.9):

$$\|\partial_1 F_{j_2\ldots j_n}\|^2_{L^2(\gamma_1)} \leq M^2(d)\|F_{j_2\ldots j_n}\|^2_{L^2(\gamma_1)} = M^2(d) \sum_{|j_1| \leq D_j} \delta_{(j_1 \neq 0)} a^2_{j_1\ldots j_n}.$$

(последнее равенство получаем из того, что $\delta^2_{(j_1\neq 0)} = \delta_{(j_1\neq 0)}$) Подставляя этот результат в (3.10), получаем

$$\|\partial_1 f\|_2^2 = \sum_{|J_{2n}|\le d} \|\partial_1 F_{j_2\dots j_n}\|^2_{L^2(\gamma_1)} \le M^2(d) \sum_{|J_{1n}|\le d} \delta_{(j_1\neq 0)} a^2_{j_1\dots j_n}.$$

Для $\|\partial_k f\|_2^2$ получаются аналогичные оценки. Следовательно,

$$\|\nabla f\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_2^2 \le M^2(d) \sum_{|J_{1n}|\le d} \sum_{k=1}^n \delta_{(j_k\neq 0)} a^2_{j_1\dots j_n}.$$

Первая сумма берется по таким числам $j_1, \dots, j_n$ от $-d$ до d, что

$$|J_{1n}| = |j_1| + \ldots + |j_n| \in \{0, \dots, d\}.$$

По условию, степень f не превышает d. Поэтому для каждого набора $j_1, \dots, j_n$ найдется не более d чисел j_k, отличных от 0. Поэтому

$$\|\nabla f\|_2^2 \le M^2(d) \sum_{|J_{1n}|\le d} d \cdot a^2_{j_1\dots j_n} = d \cdot M^2(d) \cdot \|f\|_2^2.$$

Теорема доказана. □

Пусть $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, $B = (b_{ij})$ — $n \times n$-матрица. Тогда:

$$|B\overline{a}| \le \|B\|_{HS}|\overline{a}|, \ \langle B\overline{a}, \overline{a}\rangle \le \|B\|_{HS}\langle \overline{a}, \overline{a}\rangle, \tag{3.11}$$

где $\|B\|_{HS} = \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2}$ — норма Гильберта-Шмидта. $\|B\|_{HS}$ оценивается сверху многочленом от модулей $|b_{ij}|$ элементов матрицы b_{ij}.

4. Основные результаты

Пусть на пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартной гауссовской мерой γ_n задана $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ и $f \neq \mathrm{const}$. Рассмотрим меру $\gamma_n \circ f^{-1}$ и покажем, что эта мера лежит в классе Никольского – Бесова.

Теорема 3. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$. Существует такое $C(d,\tau) > 0$, что при $f \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$ для всякой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^1)$ выполнено*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f(x))\, \gamma_n(dx) \le C(d,\tau)\sigma_f^{-\alpha} \|\varphi\|_\infty^\alpha \|\varphi'\|_\infty^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{4d+\tau}.$$

Как следствие, если $f \neq \mathrm{const}$, то мера $\gamma_n \circ f^{-1}$ принадлежит всем классам $B^\alpha(\mathbb{R})$ с $\alpha < \frac{1}{4d}$ вне зависимости от числа переменных n.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $\|\varphi\|_\infty \le 1$. Заметим, что $\varphi'(f)\langle\nabla f, \nabla f\rangle = \langle\nabla(\varphi\circ f), \nabla f\rangle$. Введем параметр $\varepsilon > 0$. Интеграл, который нам надо оценить, представляется в виде (для краткости опускаем символ $\mathbb{R}^n$ при интегрировании):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f)\, d\gamma_n = \int \frac{\langle\nabla\varphi\circ f, \nabla f\rangle}{\langle\nabla f, \nabla f\rangle + \varepsilon}\, d\gamma_n + \int \frac{\varepsilon\cdot\varphi'(f)}{\langle\nabla f, \nabla f\rangle + \varepsilon}\, d\gamma_n = I_1 + I_2. \tag{4.1}$$

Оценим каждое из слагаемых. В случае первого слагаемого, интегрируя по частям по формуле (3.3), получим оценку (вспомним, что $\|\varphi\|_\infty \le 1$)

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int \varphi(f)\Big(\frac{Lf}{\langle\nabla f, \nabla f\rangle + \varepsilon} - \frac{\langle D^2 f\cdot\nabla f, \nabla f\rangle}{(\langle\nabla f, \nabla f\rangle + \varepsilon)^2}\Big)\, d\gamma_n \\ &\le \big(\|Lf\|_{L^{q'}(\gamma_n)} + \|\|D^2 f\|_{HS}\|_{L^{q'}(\gamma_n)}\big)\bigg(\int \frac{1}{(\langle\nabla f, \nabla f\rangle + \varepsilon)^q}\, d\gamma_n\bigg)^{1/q}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $q > 1$, $q' = q/(q-1)$ появляется из неравенства Гёльдера, а $\|D^2 f\|_{HS}$ обозначает норму Гильберта – Шмидта (3.11) матрицы вторых производных. При помощи леммы 1 и неравенства (3.7) можно показать, что

$$\|Lf\|_{L^{q'}(\gamma_n)} + \|D^2 f\|_{L^{q'}(\gamma_n)} \le C(d,q)\sigma_f.$$

При помощи неравенства (3.8), примененного к тригонометрическому полиному $\langle\nabla f, \nabla f\rangle \ge 0$ степени $2d$, и неравенства Пуанкаре (3.1) мы получаем, что (4.2) не превосходит

$$C(d,q)\sigma_f \varepsilon^{-1+1/4dq}\|\langle\nabla f, \nabla f\rangle\|_1^{-1/4dq} \le C(d,q)\sigma_f^{1-1/2dq}\varepsilon^{-1+1/4dq}.$$

Нам осталось оценить второе слагаемое в (4.1). Используя (3.8) и неравенство Пуанкаре, получаем

$$I_2 = \varepsilon\int \frac{\varphi'(f)}{\langle\nabla f, \nabla f\rangle + \varepsilon}\, d\gamma_n \le \int \frac{\varepsilon\|\varphi'\|_\infty}{\langle\nabla f, \nabla f\rangle + \varepsilon}\, d\gamma_n \le \frac{c(d)\|\varphi'\|_\infty}{\sigma_f^{1/2d}}\varepsilon^{1/4d}.$$

Возвращаясь к (4.1), приходим к оценке

$$\int \varphi'(f(x))\,\gamma_n(dx) \le C(d,q)\sigma_f^{1-1/2dq}\varepsilon^{-1+1/4dq} + \frac{c(d)\|\varphi'\|_\infty}{\sigma_f^{1/2d}}\varepsilon^{1/4d}$$

Подставим $\beta = \frac{1}{4d}$, $\tau = \frac{q-1}{q}$, $\varepsilon = \|\varphi'\|_\infty^\omega$, $\omega = -\frac{1}{1+\beta\tau}$. Тогда получится

$$\int \varphi'(f(x))\,\gamma_n(dx) \le (C(d,q)\sigma_f^{1-2\beta/q} + c(d)\sigma_f^{-2\beta})\|\varphi'\|_\infty^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{4d+\tau}.$$

Введем функцию $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t\sigma_f^{-1})$ и применим полученное неравенство к тригонометрическому полиному $\tilde{f} = f \cdot \sigma_f^{-1}$. Получится

$$\begin{aligned} \int \widetilde{\varphi}'(f(x))\,\gamma_n(dx) = \sigma_f^{-1} \int \varphi'(f(x)\sigma_f^{-1})\,\gamma_n(dx) \le \\ \le \sigma_f^{-1}(c_1(d,q) + c(d))\|\varphi'\|_\infty^{1-\alpha} = \sigma_f^{-\alpha}(c_1(d,q) + c(d))\|\widetilde{\varphi}'\|_\infty^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $\alpha = \frac{1}{4d+\tau}$, где $\tau > 0$ — произвольное. Неравенство из утверждения теоремы доказано. Из (4.3) следует, что мера $\gamma_n \circ f^{-1}$ удовлетворяет условиям предложения 1. Поэтому $\gamma_n \circ f^{-1}$ действительно лежит в классе Никольского – Бесова $B^\alpha(\mathbb{R})$. □

Следствие 3. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $\tau > 0$. Существует такое число $C = C(d, c, \tau)$, что для всяких двух функций $f, g \in \mathcal{TR}^d(\mathbb{R}^n)$, для которых $\sigma_f, \sigma_f \ge c > 0$, выполнена оценка*

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma_n \circ f^{-1}, \gamma_n \circ g^{-1}) \le C d_{\mathrm{FM}}(\gamma_n \circ f^{-1}, \gamma_n \circ g^{-1})^\theta, \quad \theta = \frac{1}{4d+1+\tau}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\nu_1 = \gamma_n \circ f^{-1}$ и $\nu_2 = \gamma_n \circ g^{-1}$. По теореме 3 меры ν_1 и ν_2 лежат во всех классах $B^\alpha(\mathbb{R})$ с $\alpha = \frac{1}{4d+\tau}$. При этом в силу теоремы 3 и предложения 1 имеет место оценка

$$\|\nu_1 - \nu_2\|_{B^\alpha} \le \|\nu_1\|_{B^\alpha} + \|\nu_2\|_{B^\alpha} \le C(d,\tau)(\sigma_f^{-\alpha} + \sigma_g^{-\alpha}) \le 2C(d,\tau)c^{-\alpha}$$

Применяя теорему 1 нашим мерам ν_1 и ν_2, получаем искомое утверждение. Следствие доказано. □

Теперь разберем k-мерный случай. Пусть на $\mathbb{R}^n$ со мерой γ_n задано k функций $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим следующее $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$f(x) = f\big(x_1, \ldots, x_n\big) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Попробуем подобрать f так, чтобы мера $\gamma_n \circ f^{-1}$ попадет в $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$.

Введем матрицу Маллявэна M_f для отображения f:

$$M_f(x) = (m_{i,j}(x))_{i,j\le k}, \quad m_{i,j}(x) := \langle \nabla f_i(x), \nabla f_j(x)\rangle.$$

Введем $\Delta_f := \det M_f$. Заметим, что $\Delta_f \ge 0$ и $\Delta_f \in \mathcal{TR}_{2kd}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $M^{i,j}$ — алгебраическое дополнение к элементу $m_{i,j}$. Составим матрицу $A_f := (a_{i,j})_{i,j\le k}$, где $a_{i,j} = M^{j,i}$ из этих алгебраических дополнений. Заметим, что $a_{i,j}$ — это полином степени $k-1$ от переменных $m_{s,t}$. Из формул Крамера следует:

$$\Delta_f \cdot M_f^{-1} = A_f. \tag{4.4}$$

Теорема 4. *Пусть $k, d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\tau > 0$. Тогда найдется такое число $C(d,k,a,b,\tau) > 0$, что для всякого отображения*

$$f = (f_1, \dots, f_k)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,$$

где все компоненты f_i лежат в $\mathcal{TR}_d(\mathbb{R}^n)$, $\|\Delta_f\|_1 \geq a$ и $\max_{i\leq k} \sigma_{f_i} \leq b$, для всякой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$ и всякого вектора $e \in \mathbb{R}^k$ с $|e| = 1$ выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_e \varphi(f(x))\,\gamma_n(dx) \leq C(d,k,a,b,\tau)\|\varphi\|_\infty^\alpha \|\partial_e\varphi\|_\infty^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{8kd+\tau}.$$

Следовательно, $\gamma_n \circ f^{-1} \in B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ для каждого $\alpha < 1/8kd$.

Доказательство. Не теряя общности можно считать, что $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Если $\|\partial_e\varphi\|_\infty \leq 1$, то для всякого $\alpha > 0$ мы имеем (снова опускаем индекс $\mathbb{R}^n$ у всех интегралов в этом доказательстве)

$$\int \partial_e\varphi(f(x))\,\gamma_n(dx) \leq \|\partial_e\varphi\|_\infty \leq \|\partial_e\varphi\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Теперь разберем случай $\|\partial_e\varphi\|_\infty \geq 1$. Введем числовой параметр $\varepsilon \in (0,1)$. Интеграл, который мы хотим оценить, можно представить в виде суммы

$$\int \partial_e\varphi(f)\,d\gamma_n = \int \frac{\partial_e\varphi(f)\cdot\Delta_f}{\Delta_f+\varepsilon}\,d\gamma_n + \varepsilon\int\frac{\partial_e\varphi(f)}{\Delta_f+\varepsilon}\,d\gamma_n = I_1 + I_2. \quad (4.5)$$

Оценим каждое слагаемое из этой суммы. Введем вектор

$$V = \big(\langle\nabla(\varphi\circ f), \nabla f_1\rangle, \dots, \langle\nabla(\varphi\circ f), \nabla f_k\rangle\big),$$

где ∇ обозначает градиент функции n переменных Из свойств произведения матриц следует, что

$$M_f \times (\partial_{x_1}\varphi(f), \dots, \partial_{x_k}\varphi(f))^T = V^T. \quad (4.6)$$

Левую часть этого выражения следует понимать как произведение матрицы на вектор-столбец с компонентами $\partial_{x_i}\varphi(f)$, правую — как вектор-столбец. Из (4.6) и (4.4) мы получаем

$$(\partial_e\varphi)(f)\Delta_f = \big\langle V, A_f e\big\rangle = \sum_{i=1}^k \langle\nabla\varphi\circ f, \nabla f_i\rangle h_i,$$

где h_i — это компонента вектора $h(x) = A_f(x)e$. Поэтому первое слагаемое из (4.5) перепишется в виде

$$I_1 = \int\frac{\partial_e\varphi(f)\cdot\Delta_f}{\Delta_f+\varepsilon}\,d\gamma_n = \int\sum_{i=1}^k\frac{\langle\nabla\varphi\circ f, \nabla f_i\rangle h_i}{\Delta_f+\varepsilon}\,d\gamma_n,$$

Проинтегрируем по частям это выражение по формуле (3.3):

$$I_1 = -\sum_{i=1}^{k} \int \varphi \circ f \cdot \Big(\frac{h_i L f_i}{\Delta_f + \varepsilon} - \frac{h_i \langle \nabla f_i, \nabla(\Delta_f) \rangle}{(\Delta_f + \varepsilon)^2} + \frac{\langle \nabla f_i, \nabla h_i \rangle}{\Delta_f + \varepsilon} \Big) \, d\gamma_n$$

Поскольку $\Delta_f \geq 0$ и $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, отсюда следует:

$$I_1 \leq \int \frac{\left|\sum_{i=1}^k U_i\right|}{0+\varepsilon} \, d\gamma_n + \int \frac{\left|\sum_{i=1}^k V_i\right|}{(\Delta_f + \varepsilon)^2} \, d\gamma_n + \int \frac{\left|\sum_{i=1}^k W_i\right|}{0+\varepsilon} \, d\gamma_n, \qquad (4.7)$$

где $U_i = h_i L f_i$, $V_i = h_i \langle \nabla f_i, \nabla(\Delta_f) \rangle$, $W_i = \langle \nabla f_i, \nabla h_i \rangle$. Нужно оценить каждое из трех слагаемых в (4.7). Оценим первое слагаемое:

$$\int \frac{\left|\sum_{i=1}^k h_i L f_i\right|}{0+\varepsilon} \, d\gamma_n \leq \varepsilon^{-1} \int \|A_f\|_{HS} \Big(\sum_{i=1}^k |L f_i|^2 \Big)^{1/2} d\gamma_n.$$

Здесь $\|A_f\|_{HS}$ – норма Гильберта–Шмидта матрицы A_f (см (3.11)). Мы применили неравенство $|h| = |A_f e| \leq \|A_f\|_{HS} \cdot |e| = \|A_f\|_{HS}$.

Теперь мы оценим второе слагаемое из правой части (4.7). Сначала получим вспомогательное неравенство. Применяя два раза неравенство Коши – Буняковского и один раз оценку $|h| \leq \|A_f\|_{HS}$, получаем

$$\Big| \sum_{i=1}^k V_i(x) \Big| \leq \Phi(x); \quad \Phi(x) = \|A_f\|_{HS} \cdot |\nabla \Delta_f| \cdot \Big(\sum_{i=1}^k |\nabla f_i|^2 \Big)^{1/2}$$

Взяв $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2kd} = \frac{1}{4kd}$, для второго слагаемого (4.7) получаем:

$$\int \frac{\left|\sum_{i=1}^k V_i(x)\right|}{(\Delta_f + \varepsilon)^2} \, d\gamma_n \leq \|(\Delta_f + \varepsilon)^{-2}\|_q \|\Phi\|_{q'} \leq \varepsilon^{-2+\beta/q} \frac{c(2q, 2kd)^2 \cdot \|\Phi\|_{q'}}{\|\Delta_f\|_1^{\beta/q}}$$

где число $q' = q/(q-1)$ возникает из неравенства Гёльдера, а число $c(2q, 2kd)$ — из неравенства (3.8), примененного к $\Delta_f \in \mathcal{TR}_{2kd}(\mathbb{R}^n)$.

Наконец, используя неравенство Коши – Буняковского и неравенство $2xy \leq x^2 + y^2$, получим оценку для третьего слагаемого из (4.7):

$$\int \frac{\left|\sum_{i=1}^k \langle \nabla f_i, \nabla h_i \rangle\right|}{\Delta_f + \varepsilon} \, d\gamma_n \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int \sum_{i=1}^k \Big(|\nabla f_i|^2 + |\nabla h_i|^2 \Big) \, d\gamma_n.$$

Оценив сверху все три слагаемые правой части (4.7), мы оценили первое слагаемое из (4.5). При этом у нас имеет место неравенство $\varepsilon^{-1} \leq \varepsilon^{-2+\beta/q}$, поскольку $-2 + \beta/q < -1$ и $\varepsilon \leq 1$, .

Теперь мы применим (3.8) к тригонометрическому полиному Δ_f, чтобы оценить второе слагаемое из (4.5):

$$\int \frac{\partial_e \varphi(f)}{\Delta_f + \varepsilon} \, d\gamma_n \leq \|\partial_e \varphi\|_\infty c(1, 2kd) \varepsilon^{-1+\beta} \|\Delta_f\|_1^{-\beta},$$

Положим $\tau = \frac{q-1}{q}$ и возьмем $\varepsilon = \|\partial_e\varphi\|_\infty^\omega$, $\omega = -\frac{1}{2+\tau\beta} = -\frac{4kd}{8kd+\tau}$. Из неравенств (4.7) и (4.5) получаем

$$\int \partial_e\varphi(f)\,d\gamma_n \le (C_1+C_2+C_3+C_4)\|\partial_e\varphi\|_\infty^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{8kd+\tau}, \tag{4.8}$$

с громоздкими выражениями для C_k:

$$C_1 = \int \|A_f\|_{HS}\Big(\sum_{i=1}^k |Lf_i|^2\Big)^{1/2} d\gamma_n; \qquad C_2 = \frac{c(2q,2kd)^2\cdot\|\Phi\|_{q'}}{\|\Delta_f\|_1^{\beta/q}}$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\int\sum_{i=1}^k\Big(|\nabla f_i|^2 + |\nabla h_i|^2\Big)\,d\gamma_n; \qquad C_4 = \frac{c(1,2kd)}{\|\Delta_f\|_1^\beta}.$$

Лемма 1, неравенство (3.7) и неравенство Пуанкаре (3.1) позволяют заменить число $(C_1+C_2+C_3+C_4)$ на число $C(d,k,a,b,\tau)$, зависящее только от d, k, a, b и τ. Здесь мы используем то, что $\|A_f\|_{HS}$ оценивается многочленом от функций $m_{i,j}(x)$. Поэтому L^p-нормы $\|A_f\|_{HS}$ ограничены степенями b.

Выбирая $q > 1$ достаточно близким к 1, можно получить любое положительное $\tau = \frac{q-1}{q}$ в выражении (4.8). Принадлежность $\gamma_n\circ f^{-1}$ к классу Бесова – Никольского следует из предложения 1. Теорема доказана. □

Следствие 4. *Пусть $k,d\in\mathbb{N}$, $a>0$, $b>0$, $\tau>0$. Тогда найдется такое $C = C(d,k,a,b,\tau)$, что для всяких отображений $f=(f_1,\dots,f_k)$ и $g=(g_1,\dots,g_k)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$ с компонентами f_i, g_i из $\mathcal{TR}^d(\mathbb{R}^n)$, для которых выполнены условия $\|\Delta_f\|_1\ge a$, $\|\Delta_g\|_1\ge a$, $\max_{i\le k}\sigma_{f_i}\le b$, $\max_{i\le k}\sigma_{g_i}\le b$, выполнено неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma_n\circ f^{-1},\gamma_n\circ g^{-1}) \le C d_{\mathrm{FM}}(\gamma_n\circ f^{-1},\gamma_n\circ g^{-1})^\theta, \quad \theta = \frac{1}{8kd+1+\tau}.$$

Доказательство. По теореме 4 меры $\gamma_n\circ f^{-1}$ и $\gamma_n\circ g^{-1}$ лежат во всех классах $B^\alpha(\mathbb{R})$ где $\alpha = \frac{1}{8kd+\tau}$. Далее действуем по аналогии с доказательством следствия 3. □

5. Заключение

Мы показали, что образы n-мерной гауссовской меры γ_n под действием тригонометрических полиномов имеют плотность из класса Никольского – Бесова $B^\alpha(\mathbb{R})$. Также мы доказали аналогичный результат для образов γ_n под действием k-мерных отображений, компоненты которых являются тригонометрическими полиномами. Используя принадлежность к классам $B^{\alpha}(\mathbb{R}^k)$, мы установили оценки расстояния по вариации между двумя такими образами через расстояние по Форте – Мурье.

При этом все параметры (показатели у классов Никольского – Бесова, а также коэффициенты в оценках) оказались не зависящими от числа n. Таким образом, те свойства, которыми обладают образы n-мерной гауссовской меры γ_n под действием многочленов, характерны и для образов γ_n под действием тригонометрических полиномов.

Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01058 (выполняемым при МГУ им. М.В. Ломоносова).

Список литературы

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Т. 1, 2. 2-е изд. М. : Наука, 1996. 480 с.
2. Богачев В. И. Распределения многочленов на многомерных и бесконечномерных пространствах с мерами // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 4. С. 107–154.
3. Богачев В.И., Зеленов Г.И., Косов Е.Д. Принадлежность распределений многочленов к классам Никольского – Бесова // Доклады Академии наук. 2016. Т. 469, № 6. С. 651–655. https://doi.org/10.1134/S1064562416040293
4. Богачев В.И., Косов Е. Д., Попова С. Н. Характеризация классов Никольского – Бесова через интегрирование по частям // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 3. С. 251–255. https://doi.org/10.1134/S106456241705012X
5. Богачев В. И., Косов Е. Д., Попова С. Н. О гауссовских классах Никольского – Бесова // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476, № 6. С. 609–613. https://doi.org/10.1134/S1064562417050295
6. Давыдов Ю. А., Мартынова Г. В. Предельное поведение распределений кратных стохастических интегралов // Статистика и управление случайными процессами : сб. ст. М. : Наука, 1989, С. 55–57.
7. Косов Е. Д. Классы Бесова на пространстве с гауссовской мерой // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 2. С. 133–136.
8. Косов Е. Д. Классы Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах // Математический сборник. 2019. Т. 210, № 5. С. 41–71. https://doi.org/10.1134/s1064562418010076
9. Мартынова Г. В. Предельные теоремы для функционалов от случайных процессов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ленинград : ЛГУ, 1987.
10. Назаров Ф. Л. Локальные оценки экспоненциальных полиномов и их приложения к неравенствам типа принципа неопределенности // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5, № 4. С. 3–66.
11. Назаров Ф. Л., Содин М. Л., Вольберг А. Л. Геометрическая лемма Каннана – Ловаса – Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14, № 2. С. 214–234.
12. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977. 456 с.
13. Adams R. A., Fournier J. J. Sobolev spaces. New York : Academic Press, 2003. 310 p.

14. Bogachev V. I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2010. 510 p.
15. Bogachev V. I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998. 450 p.
16. Bogachev V.I. Measure theory. Vol. 1, 2. New York, Springer, 2007. 1170 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5
17. Bogachev V.I., Kosov E.D., Popova S.N. A new approach to Nikolskii – Besov classes // Moscow Math. J. 2019. Vol. 19, N 4. P. 619–654. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2019-19-4-619-654
18. Bogachev V., Kosov E., Zelenov G. Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy – Landau – Littlewood inequality // Trans. Amer. Math. Soc. 2018. Vol. 370, N 6. P. 4401–4432. https://doi.org/10.1090/tran/7181
19. Carbery A., Wright J. Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$ // Math. Research Lett. 2001. Vol. 8, N 3. P. 233–248. https://doi.org/10.4310/MRL.2001.v8.n3.a1
20. Davydov Y. A. On distance in total variation between image measures // Statistics & Probability Letters. 2017. Vol. 129. P. 393–400. https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.06.022
21. Fortet R., Mourier E. Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1953. Vol. 70, N 3. P. 267–285. https://doi.org/10.24033/asens.1013
22. Kosov E. D. Fractional smoothness of images of logarithmically concave measures under polynomials // J. Math. Anal. Appl. 2018. Vol. 462, N 1. P. 390–406. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.02.016
23. Nourdin I., Nualart D., Poly G. Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos // Electron. J. Probab. 2013. Vol. 18, N 22. P. 1–19. https://doi.org/10.1214/ejp.v18-2181
24. Nourdin I., Poly G. Convergence in total variation on Wiener chaos // Stochastic Process. Appl. 2013. Vol. 123, N 2. P. 651–674. https://doi.org/10.1016/j.spa.2012.10.004
25. Stein E. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton : Princeton University Press, 1970. 287 p.
26. Zelenov G. I. On distances between distributions of polynomials // Theory Stoch. Processes. 2017. Vol. 22, N 2. P. 79–85.

Георгий Ильич Зеленов, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1; доцент, факультет компьютерных наук, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Российская Федерация, 101000, Москва, Мясницкая ул., 20,
e-mail: `zelenovyur@gmail.com`,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-6419-9819

Поступила в редакцию 27.11.19

Fractional Smoothness of Distributions of Trigonometric Polynomials on a Space with a Gaussian Measure

G. I. Zelenov[1,2]

[1] *Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

Abstract. In this paper we study properties of images of a gaussian measure under trigonometric polynomials of a fixed degree, defined on finite-dimensional space with fixed number of dimensions. We prove that the images of the n-dimensional Gaussian measure under trigonometric polynomials have densities from the Nikolskii – Besov class of fractional parameter. This property of images of a gaussian measure is used for estimating the total variation distance between such images via the Fortet–Mourier distance. We also generalize these results to the case of k-dimensional mappings whose components are trigonometric polynomials.

Keywords: Nikolskii – Besov class, Gaussian measure, distribution of a trigonometric polynomial.

References

1. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skiĭ S.M. *Integral representations of functions and imbedding theorems.* V. I, II, Winston & Sons, Washington; Halsted Press, New York, Toronto, London, 1978, 1979, 480 p.
2. Bogachev V.I. Distributions of polynomials on multidimensional and infinite-dimensional spaces with measures. *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 4, pp. 703-749.
3. Bogachev V.I., Zelenov G.I., Kosov E.D. Membership of distributions of polynomials in the Nikolskii – Besov class, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 2, pp. 453-457. https://doi.org/10.1134/S1064562416040293
4. Bogachev V.I., Kosov E.D., Popova S.N. Characterization of Nikolskii–Besov classes in terms of integration by parts. *Dokl. Math.,* 2017, vol. 96, no 2, pp. 449–453. https://doi.org/10.1134/S106456241705012X
5. Bogachev V.I., Kosov E.D., Popova S.N. On Gaussian Nikolskii–Besov classes. *Dokl. Math.,* 2017, vol. 96, no. 2, pp. 498-502. https://doi.org/10.1134/S1064562417050295
6. Davydov Y.A., Martynova G.V. Limit behavior of multiple stochastic integral. *Statistics and Control of Random Processes*. Nauka, Preila, Moscow, 1987, pp. 55-57 (in Russian).
7. Kosov E.D. Besov classes on a space with a Gaussian measure. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 1, pp. 20-22. https://doi.org/10.1134/s1064562418010076
8. Kosov E.D. Besov classes on finite- and infinite-dimensional spaces. *Sb. Math. 2019,* vol. 210, no. 5, pp. 663-692. https://doi.org/10.1070/SM9058
9. Martynova G.V. *Limit theorems for the functionals of random procceses*, Cand. sci. dis. Leningrad, LGU Publ., 1987 (in Russian).
10. Nazarov F.L. Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. *St. Petersburg Math. J.,* 1994, vol. 5, no. 4, pp. 663-717.

11. Nazarov F., Sodin M., Volberg A. The geometric Kannan – Lovasz – Simonovits lemma, dimension-free estimates for the distribution of the values of polynomials, and the distribution of the zeros of random analytic functions. *St. Petersburg Math. J.,* 2003, vol. 14, no. 2, pp. 351-366.
12. Nikol'skiĭ S.M. *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1975, 456 p.
13. Adams R.A., Fournier J.J. *Sobolev spaces*. New York, Academic Press, 2003, 310 p.
14. Bogachev V.I. *Differentiable measures and the Malliavin calculus*. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2010, 510 p.
15. Bogachev V.I. *Gaussian measures*. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998, 450 p.
16. Bogachev V.I. *Measure theory*. Vol. 1,2. New York, Springer, 2007, 1170 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34514-5
17. Bogachev V.I., Kosov E.D., Popova S.N. A new approach to Nikolskii–Besov classes. *Moscow Math. J.*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 619-654. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2019-19-4-619-654
18. Bogachev V., Kosov E., Zelenov G. Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy–Landau–Littlewood inequality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2018, vol. 370, no. 6., pp. 4401–4432. https://doi.org/10.1090/tran/7181
19. Carbery A., Wright J. Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$. *Math. Research Lett.*, 2001, vol. 8, no. 3. pp. 233-248. https://doi.org/10.4310/MRL.2001.v8.n3.a1
20. Davydov Y.A. On distance in total variation between image measures. *Statistics & Probability Letters*, 2017, vol. 129, pp. 393-400. https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.06.022
21. Fortet R., Mourier E. Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique, Ann. Sci. École Norm. Sup., 1953, vol. 70, no. 3, pp. 267-285. https://doi.org/10.24033/asens.1013
22. Kosov E.D. Fractional smoothness of images of logarithmically concave measures under polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 462, no. 2, pp. 390-406. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.02.016
23. Nourdin I., Nualart D., Poly G. Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos. *Electron. J. Probab.*, 2013, vol. 18, no. 22, pp. 1-19. https://doi.org/10.1214/ejp.v18-2181
24. Nourdin I., Poly G. Convergence in total variation on Wiener chaos. *Stochastic Process. Appl.*, 2013, vol. 123, no. 2, pp. 651-674. https://doi.org/10.1016/j.spa.2012.10.004
25. Stein E. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton: Princeton University Press, 1970, 287 p.
26. Zelenov G.I. On distances between distributions of polynomials. *Theory Stoch. Processes*, 2017, vol. 22, no 2, pp. 79-85.

Georgii Zelenov, PhD in Physics and Mathematics, Junior Research Fellow, Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation; Associate Professor, National Research University Higher School of Economics, 20, Myasnitskaya ulitsa, Moscow, 101000, Russian Federation,
e-mail: zelenovyur@gmail.com,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-6419-9819.

Received 27.11.2019