Серия «Математика»
2020. Т. 31. С. 49—61

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.977.5
MSC 49K25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.31.49

К необходимым условиям оптимальности в дискретных системах управления*

М. Дж. Марданов[1], Т. К. Меликов[1,2]

[1] *Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан*
[2] *Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан*

Аннотация. При ослабленных предположениях исследуется проблема необходимых условий оптимальности высокого порядка в дискретных задачах оптимального управления со свободным правым концом траектории. Здесь используется, во-первых, понятие относительной внутренности множества в широком смысле, во-вторых, сочетание линейной (т. е. равномерно малой) и игольчатой вариаций допустимого управления. В результате получается новая формула приращения функционала качества с членами нулевого, первого и второго порядков малости. Она и служит источником известного необходимого условия оптимальности нулевого порядка, если отсутствует линейная вариация допустимого управления, или известных необходимых условий оптимальности первого и второго порядков, если на некотором подмножестве области допустимых управлений приращение функционала качества нулевого порядка отсутствует. Следуя полученной формуле приращения функционала качества, вводятся понятия нулевой, первой и второй вариаций функционала качества в более общем виде, из которых в частности следуют известные вариации функционала качества. На основе полученных формул для вариаций функционала качества с помощью игольчатой вариации допустимого управления получаются более конструктивные необходимые условия оптимальности нулевого, первого и второго порядков, имеющие широкую сферу действия.

Ключевые слова: дискретные системы управления, оптимальное управление, необходимые условия, вариации функционала качества.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Азербайджанского Государственного Нефтяного Фонда Науки № 05 LR – AMEA.

1. Введение

В течение более чем полувека, начиная с [7; 15], дискретные задачи оптимального управления были основательно исследованы многими авторами и в этом направлении опубликованы сотни статей и монографий, содержащих ряд важных результатов. Более подробный обзор по дискретным проблемам оптимизации приводится, например, в [1; 2; 6; 10; 12–14; 16; 18].

Известно, что (см. например, [3; 6, с. 431]) непосредственное перенесение принципа максимума Л. С. Понтрягина на дискретные задачи оптимального управления в общем случае невозможно. В отличие от непрерывного в дискретном случае аналог уравнения Эйлера не всегда является следствием дискретного принципа максимума. Поэтому получение дискретного аналога уравнения Эйлера имеет самостоятельное значение. Естественно возникает теоретический и практический интерес получения конструктивных и имеющих широкую сферу действия необходимых условий оптимальности первого (в форме уравнения Эйлера) и второго порядков. Получению таких необходимых условий оптимальности и посвящена настоящая статья, которая является существенным обобщением [8].

В данной работе, используя понятие относительной внутренности множества в широком смысле, введенное в [9], и применяя специальный вид вариации допустимого управления, получается формула приращения функционала качества с членами нулевого, первого и второго порядков малости. На основе этой формулы, введя понятия нулевой, первой и второй вариаций функционала качества, получаются конструктивные необходимые условия оптимальности нулевого, первого (в форме уравнения Эйлера) и второго (типа Габасова [4]) порядков, имеющие широкую сферу действия.

2. Постановка задачи, определение и предположения

Пусть R^m $-$ m-мерное евклидово пространство, $R-$ множество действительных чисел, $I := \{t_0,\, t_0+1, ..., t_1-1\} \subset R, I_{-1} := I \setminus \{t_1-1\}, I_1 := I \cup \{t_1\}$. Пусть, кроме того, заданы функции $f(x,u,t) : R^n \times R^r \times I \to R^n, \Phi(x) : R^n \to R$ и конечная последовательность множеств $U(t) \subset R^r, t \in I$.

Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления:

$$S(u(\cdot)) = \Phi(x(t_1)) \to \min_{u(\cdot)}, \tag{2.1}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t),\; t \in I,\; x(t_0) = x^*, \tag{2.2}$$

$$u(t) \in U(t),\; t \in I. \tag{2.3}$$

Векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$ и $u = (u_1, u_2, ..., u_r)^T \in R^r$ будем называть, соответственно, вектором состояния и вектором управления системы (2.2), начальное состояние x^*, а также моменты t_0, t_1 будем предполагать фиксированными.

Допустимым процессом в задаче (2.1)–(2.3) будем называть пару $(u(\cdot),\ x(\cdot))$, такую, что $u(\cdot)$ удовлетворяет условию (2.3), а $x(\cdot)$ является решением системы (2.2). Компоненту $u(\cdot)$ допустимого процесса $(u(\cdot),\ x(\cdot))$ будем называть допустимым управлением, а компоненту $x(\cdot)$ — соответствующей траекторией.

Допустимый процесс $(u^0(\cdot),\ x^0(\cdot))$ назовем оптимальным процессом в задаче (2.1)–(2.3), если он доставляет минимум функционалу (2.1).

Напомним следующее определение.

Определение 1. [9] *Пусть $Z \subset R^m, z_0 \in Z$ и $\hat{z} \in Z \backslash \{z_0\} \neq \varnothing$. Точку z_0 назовем относительной внутренней точкой множества Z вдоль прямой $\ell(z_0, \hat{z}) := \{\tilde{z} : \tilde{z} = z_0 + \tau(\hat{z} - z_0),\ \tau \in R\}$, если существует число $\gamma = \gamma(\hat{z}) \in (0, 1]$, такое, что при всех $\varepsilon \in (-\gamma, \gamma)$ справедливо включение $z_0 + \varepsilon(\hat{z} - z_0) \in Z$. Точку z_0 назовем относительной внутренней точкой множества Z в широком смысле, если точка z_0 является относительной внутренней точкой множества Z вдоль любых прямых из множества $\{\ell(z_0; z) : z \in Z \backslash \{z_0\}\}$. Совокупность таких точек назовем относительной внутренностью множества $Z^{|0|}$. Множество Z назовем относительно открытым в широком смысле, если $Z^{|0|} = Z$.*

При исследовании допустимого процесса $(u^0(\cdot),\ x^0(\cdot))$ будем использовать следующие предположения:

(A1) функционал $\Phi(\cdot)$ непрерывно дифференцируем в R^n;

(A2) функционал $\Phi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируем в R^n;

(B1) для каждого $t \in I$ функции $f(\cdot, \cdot, t), f_x(\cdot, \cdot, t)$ и для каждого $t \in I_{-1}$ функция $f_u(\cdot, \cdot, t)$ непрерывны по x, u в $R^n \times R^r$;

(B2) для каждого $t \in I$ функции $f(\cdot, \cdot, t), f_x(\cdot, \cdot, t), f_{xx}(\cdot, \cdot, t)$ и для каждого $t \in I_{-1}$ функции $f_u(\cdot, \cdot, t), f_{xu}(\cdot, \cdot, t), f_{uu}(\cdot, \cdot, t)$ непрерывны по x, u в $R^n \times R^r$;

$(C1)$ для каждого $t \in I_{-1}$ имеет место включение $u^0(t) \in U^{|0|}(t)$.

Особо отметим, что при исследовании задачи (2.1)–(2.3) множество $U\,(t_1 - 1)$ может быть произвольным.

3. Формула приращения функционала качества

Пусть $u^0(\cdot)$ –допустимое управление такое, что $u^0(t) \in U^{|0|}(t), t \in I_{-1}$, т. е. выполняется предположение (C1). Пусть выполняются предположения (A2) и (B2).

Для каждого $t \in I_{-1}$ определяем следующее множество:

$$K\left(u^0(\cdot),\ U(\cdot)\right)(t) =$$

$$= \left\{ v \in R^r : v = u^0(t) + \beta \left(u - u^0(t) \right), u \in U(t), \beta \in R \right\}. \quad (3.1)$$

Ясно, что $U(t) \subseteq K\left(u^0(\cdot), U(\cdot)\right)(t), t \in I_{-1}$ и если $u^0(t) \in \mathrm{intU(t)}$, $t \in I_{-1}$, то $K\left(u^0(\cdot), U(\cdot)\right)(t) = R^r, t \in I_{-1}$.

Наряду с $u^0(\cdot)$ рассмотрим функцию $u(\cdot;\varepsilon)$ вида

$$u(t;\varepsilon) = \begin{cases} \hat{u}, & t = t_1 - 1, \\ u^0(t) + \varepsilon(v(t) - u^0(t)), & t \in I_{-1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь $\widehat{u} \in U(t_1 - 1)$ и $v(t) \in K\left(u^0(\cdot), U(\cdot)\right)(t), t \in I_{-1}$ −произвольные фиксированные точки, далее $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, где число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $t \in I_{-1}$ и для всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ имеет место включение $u(t;\varepsilon) \in U(t)$. Подчеркнем, что так как $u^0(t) \in U^{|0|}(t), \quad t \in I_{-1}$, то в силу определения множества $K(u^0(\cdot), U(\cdot))(\cdot)$ такое число ε_0 существует.

Очевидно, что при всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ функция $u(\cdot;\varepsilon)$ является допустимым управлением.

Рассмотрим допустимый процесс $(u(\cdot;\varepsilon), x(\cdot;\varepsilon))$ и приращение

$$x(t;\varepsilon) - x^0(t) =: \Delta_\varepsilon x(t), t \in I_1.$$

Тогда $\Delta_\varepsilon x(\cdot)$ является решением системы

$$\begin{cases} \Delta_\varepsilon x(t+1) = f(x^0(t) + \Delta_\varepsilon x(t), u(t;\varepsilon), t) - f(x^0(t), u^0(t), t), \ t \in I, \\ \Delta_\varepsilon x(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Согласно (3.2) и по формуле Тейлора из (3.3) с помощью метода шагов нетрудно получить

$$\|\Delta_\varepsilon x(t)\| \le q_1 \varepsilon, \quad t \in I, \quad (3.4)$$

где $q_1 = const > 0, \|\Delta_\varepsilon x(\cdot)\|$ − евклидова норма вектора $\Delta_\varepsilon x(\cdot)$.

Отметим, что решение системы (3.3) в точке $t = t_1$ является конечным относительно $\varepsilon : \|\Delta_\varepsilon x(t)\| \sim \varepsilon^0$.

Из (3.3), выделяя главную часть приращения $\Delta_\varepsilon x(t_1)$, имеем

$$\Delta_\varepsilon x(t_1) = \Delta_{\widehat{u}} f(x^0(t), u^0(t), t)\big|_{t=t_1-1} +$$

$$+ \Delta_{\widetilde{x}} f(x^0(t), \widehat{u}, t)\big|_{t=t_1-1}, \ \widehat{u} \in U(t_1 - 1), \quad (3.5)$$

где

$$\Delta_{\widetilde{x}} f(x^0(t), \widehat{u}, t)\big|_{t=t_1-1} = f(x^0(t) + \Delta_\varepsilon x(t), \widehat{u}, t)\big|_{t=t_1-1} -$$

$$- f(x^0(t), \widehat{u}, t)\big|_{t=t_1-1}. \quad (3.6)$$

Далее, учитывая (3.4) и (3.6), получаем, что второй член в (3.5) имеет порядок ε, т.е.

$$\left\| \Delta_{\widetilde{x}} f(x^0(t_1 - 1), \widehat{u}, t_1 - 1|) \right\| \le q_2 \varepsilon, \quad q_2 = const > 0. \quad (3.7)$$

Теперь вычисляем приращение

$$S(u(t;\varepsilon)) - S(u^0(\cdot)) =: \Delta_\varepsilon S(u^0(\cdot); v(\cdot), \widehat{u})$$

функционала (2.1), вызванное (3.2).

Следуя [11], введем в рассмотрение вектор-функцию $\overset{\circ}{\psi}(t;\widehat{u}),\quad t\in I$ и симметричную матричную функцию $\overset{\circ}{\Psi}(t;\widehat{u}),\quad t\in I$ как решение линейных дискретных систем:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\psi}(t-1;\widehat{u}) = f_x^T(t)\overset{\circ}{\psi}(t;\widehat{u}), \\ \quad \overset{\circ}{\psi}(t_1-2;\widehat{u}) = f_x^T(x^0(t_1-1),\widehat{u},t_1-1)\overset{\circ}{\psi}(t_1-1;\widehat{u}), \\ \\ \ \overset{\circ}{\psi}(t_1-1;\widehat{u}) = -\Phi_x(f(x^0(t_1-1),\widehat{u},t_1-1)) \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\Psi}(t-1;\widehat{u}) = f_x^T(t)\overset{\circ}{\Psi}(t;\widehat{u})f_x(t) + H_{xx}(\overset{\circ}{\psi}(t;\widehat{u}),\overset{\circ}{x}(t),\overset{\circ}{u}(t),t) \\ \overset{\circ}{\Psi}(t_1-2;\widehat{u}) = f_x^T(x^0(t),\widehat{u},t)\ \overset{\circ}{\Psi}(t;\widehat{u})f_x(x^0(t),\widehat{u},t)\Big|_{t=t_1-1} + \\ \qquad +H_{xx}(\overset{\circ}{\psi}(t;\widehat{u}),x^0(t),\widehat{u},t)\Big|_{t=t_1-1}, \\ \ \overset{\circ}{\Psi}(t_1-1;\widehat{u}) = -\Phi_{xx}(f(x^0(t_1-1),\widehat{u},t_1-1)), \end{cases} \tag{3.9}$$

где $f_x(t) := f_x(x^0(t),u^0(t),t)$, $\widehat{u}\in U(t_1-1), H(\psi,x,u,t) = \psi^T f(x,u,t)-$ функция Гамильтона – Понтрягина.

Следуя [8] с учетом (3.2)–(3.9), для $\Delta_\varepsilon S(u^0(\cdot);v(\cdot),\widehat{u})$ нетрудно получить следующее представление:

$$\Delta_\varepsilon S(u^0(\cdot);v(\cdot),\widehat{u}) = \Delta_{\widehat{u}}\Phi(f(t_1-1)) - \overset{\circ}{\psi}{}^T(t_1-2;\widehat{u})\Delta_\varepsilon x(t_1-1)-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta_\varepsilon x^T(t_1-1)\overset{\circ}{\Psi}(t_1-2;\widehat{u})\Delta_\varepsilon x(t_1-1) + o(\varepsilon^2),\ \varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0), \tag{3.10}$$

где $\varepsilon^{-2}o(\varepsilon^2)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$,

$$\Delta_{\widehat{u}}\Phi(f(t_1-1)) := \Phi(f(x^0(t),\,\widehat{u},t))\big|_{t=t_1-1}$$

$$-\Phi(f(x^0(t),\,u^0(t),t))\big|_{t=t_1-1},\quad \widehat{u}\in U(t_1-1). \tag{3.11}$$

Используя тождество вида

$$\overset{\circ}{\psi}{}^T(t_1-2;\widehat{u})\Delta_\varepsilon x(t_1-1) = \sum_{t=t_0}^{t-2}\overset{\circ}{\psi}{}^T(t;\widehat{u})\Delta_\varepsilon x(t+1)-$$

$$-\sum_{t=t_0+1}^{t_1-2}\overset{\circ}{\psi}{}^T(t-1;\widehat{u})\Delta_\varepsilon x(t),$$

учитывая (3.2)−−(3.4),(3.8) и применяя формулу Тейлора, имеем

$$\overset{\circ}{\psi}{}^T(t_1-2;\widehat{u})\Delta_\varepsilon x(t_1-1)=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-2}H_u^T(t;\widehat{u})(v(t)-u^0(t))+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-2}\left[\Delta_\varepsilon x^T(t)H_{xx}(t;\widehat{u})\Delta_\varepsilon x(t)+2\varepsilon\Delta_\varepsilon x^T(t)H_{xu}(t;\widehat{u})(v(t)-u^0(t))+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^2(v(t)-u^0(t))^TH_{uu}(t;\widehat{u})(v(t)-u^0(t))\right], \tag{3.12}$$

где $H_u(t;\widehat{u}) := H_u(\overset{\circ}{\psi}(t,\widehat{u}),x^0(t),u^0(t),t)$ (аналогично определяются и функции $H_{xx}(t;\widehat{u}),H_{xu}(t;\widehat{u}),H_{uu}(t;\widehat{u})$).

Для достижения цели осталось выделить в $\Delta_\varepsilon x(t),\ \ t\in I$ главный член по ε, ибо справедливо свойство (3.4). С помощью метода шагов (последовательно по $t: t=t_0,t_0+1,...,t_1-2$) и формулы Тейлора для $\Delta_\varepsilon x(t),\ \ t\in I$ получаем справедливость представления вида

$$\Delta_\varepsilon x(t)=\varepsilon\delta x(t)+o(\varepsilon;t),\quad t\in I, \tag{3.13}$$

где $\delta x(t),\ t\in I-$ решение линейной дискретной системы

$$\begin{cases}\delta x(t+1)=f_x(t)\delta x(t)+f_u(t)\left(v(t)-u^0(t)\right),\ t\in I,\\ \delta x(t_0)=0.\end{cases} \tag{3.14}$$

Согласно (3.12) и (3.13) приращение (3.10), т.е. $\Delta_\varepsilon S(u^0(\cdot);v(\cdot),\widehat{u})$ принимает вид:

$$\Delta_\varepsilon S\left(u^0\left(\cdot\right);\ v\left(\cdot\right),\widehat{u}\right)=\Delta_{\widehat{u}}\Phi\left(f\left(t_1-1\right)\right)-$$

$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-2}H_u^T\left(t;\widehat{u}\right)\ \left(v(t)-u^0(t)\right)-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\delta x^T\left(t_1-1\right)\overset{\circ}{\Psi}\left(t_1-2;\widehat{u}\right)\delta x(t_1-1)+\right.$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-2}\left[\delta x^T(t)H_{xx}\left(t;\widehat{u}\right)\delta x(t)+2\delta x^T(t)H_{xu}\left(t;\widehat{u}\right)\left(v(t)-u^0(t)\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(v(t)-u^0(t)\right)^TH_{uu}\left(t;\widehat{u}\right)\left(v(t)-u^0(t)\right)\right]\right\}+o(\varepsilon^2), \tag{3.15}$$

$$\varepsilon\in\left(-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right),\widehat{u}\in U(t_1-1),u(t)\in K(\overset{\circ}{u}(\cdot),U(\cdot))(t),\ t\in I_{-1},$$

где $\delta x\left(\cdot\right)$ −решение системы (3.14); $\overset{\circ}{\Psi}\left(t_1-2;\widehat{u}\right),\ \ \Delta_{\widehat{u}}\Phi\left(f(t_1-1)\right)$ определяются по (3.9) и (3.11), соответственно.

Определение 2. [8] *Если приращение функционала*

$$\Delta_\varepsilon S\left(u^0(\cdot);v(\cdot),\widehat{u}\right)$$

допускает представление

$$\Delta_\varepsilon S\left(u^0(\cdot);v(\cdot),\widehat{u}\right)=\varepsilon^0 A_0+\varepsilon^1 A_1+\frac{\varepsilon^2}{2}A_2+o(\varepsilon^2),\ \varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0),$$

где $A_i, i=0,1,2$ не зависят от ε, то соответственно, A_0 и A_1 называются нулевой и первой, а A_2- второй вариациями функционала $S(u(\cdot))$. Для них существуют специальные символы

$$A_0=\delta^0 S\left(u^0;\widehat{u}\right),\quad A_1=\delta^1 S\left(u^0;\widehat{u}\right),\ A_2=\delta^2 S\left(u^0;\widehat{u}\right).$$

Принимая во внимание определение 2 и (3.15), имеем

$$\delta^0 S\left(u^0;\widehat{u}\right)=\Delta_{\widehat{u}}\Phi\left(f\left(t_1-1\right)\right),\tag{3.16}$$

$$\delta^1 S\left(u^0;v(\cdot),\widehat{u}\right)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-2}H_u^T\left(t;\widehat{u}\right)\left(v(t)-u^0(t)\right),\tag{3.17}$$

$$\delta^2 S\left(u^0;v(\cdot),\widehat{u}\right)=-\delta x^T(t_1-1)\mathring{\Psi}\left(t_1-2;\widehat{u}\right)\delta x(t_1-1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-2}\left[\delta x^T(t)H_{xx}\left(t;\widehat{u}\right)\delta x(t)+2\delta x^T(t)H_{xu}(t;\widehat{u})\left(v(t)-u^0(t)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(v(t)-u^0(t)\right)^T H_{uu}(t;\widehat{u})\left(v(t)-u^0(t)\right)\right].\tag{3.18}$$

Итак, учитывая (3.16)-(3.18) в (3.15), получаем следующую формулу приращения для $\Delta_\varepsilon S(\cdot)$:

$$\Delta_\varepsilon S\left(u^0(\cdot);\ v(\cdot),\widehat{u}\right)=$$

$$=\delta^0 S\left(u^0;\widehat{u}\right)+\varepsilon\delta^1 S\left(u^0;v(\cdot),\widehat{u}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 S\left(u^0;v(\cdot),\widehat{u}\right)+o(\varepsilon^2),\tag{3.19}$$

где $\delta^i S(\cdot), i=0,1,2$ определяются по (3.16)–(3.18).

4. Необходимые условия оптимальности

Введем множество

$$U_0(t_1-1)=$$

$$=\left\{\widehat{u}\in U(t_1-1):\ \Delta_{\widehat{u}}\Phi\left(f\left(t_1-1\right)\right)=0\right\},\tag{4.1}$$

где $\Delta_{\widehat{u}}\Phi\left(f\left(t_1-1\right)\right)$ определяется по (3.11).

Используя формулу (3.19) с учетом (4.1), без особого труда доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\left(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\right)$ *– оптимальный процесс. Тогда имеют место соотношения:*

(i) если функции $\Phi(\cdot)$ *и* $f(\cdot)$ *непрерывны, то выполняется неравенство*

$$\delta^0 S\left(u^0(\cdot), \widehat{u}\right) \geq 0, \ \forall \widehat{u} \in U(t_1 - 1); \tag{4.2}$$

(ii) *если выполняются предположения* $(A1), (B1)$ *и* $(C1)$, *то справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\delta^1 S(u^0(\cdot); v(\cdot), \hat{u}) = 0,\\ \forall \hat{u} \in U_0(t_1 - 1), \forall v(t) \in K(u^0(\cdot), U(\cdot))(t), t \in I_{-1};\end{gathered} \tag{4.3}$$

(iii) *если выполняются предположения* $(A2)$,$(B2)$ *и* $(C1)$, *то справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\delta^2 S(u^0(\cdot); v(\cdot), \hat{u}) \geq 0,\\ \forall \hat{u} \in U_0(t_1 - 1), \forall v(t) \in K(u^0(\cdot), U(\cdot))(t), t \in I_{-1},\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\delta^i S(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$ *определяются по (3.16)–(3.18).*

Как видно, что необходимые условия оптимальности (4.3) и (4.4) не являются конструктивной для применения при решении конкретных задач. Но из этих условий можно получить легко проверяемые необходимые условия оптимальности. Теперь займемся получением именно таких условий оптимальности.

Пусть $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$ — оптимальный процесс. Так как в теореме 1 функция $v(\cdot)$ — произвольный элемент множества $K(u^0(\cdot), U(\cdot))(t)$, $t \in I_{-1}$, то ее можно выбрать в следующем виде:

$$v(t) = \begin{cases} v, & t = \theta \in I_{-1}, \\ u^0(t), & t \in I_{-1} \setminus \{\theta\}, \end{cases} \tag{4.5}$$

где θ и v являются произвольными фиксированными элементами множеств I_{-1} и $K(u^0(\cdot), U(\cdot))(\theta)$, соответственно.

Тогда, во-первых, учитывая (4.5) в (3.17), из (4.3) получаем

$$\begin{gathered}H_u^T(\theta; \hat{u})(v - u^0(\theta)) = 0, \quad \hat{u} \in U_0(t_1 - 1),\\ \theta \in I_{-1}, v \in K(u^0(\cdot), U(\cdot))(\theta);\end{gathered} \tag{4.6}$$

во-вторых, в силу (3.14), (3.18) и (4.5) из (4.4) имеем

$$\begin{gathered}\delta x^T(t_1 - 1)\overset{\circ}{\Psi}(t_1 - 2; \hat{u})\delta x(t_1 - 1) + (v - u^0(\theta))^T H_{uu}(\theta; \hat{u})(v - u^0(\theta)) +\\ + \sum_{t=\theta_1}^{t_1 - 2} \delta x^T(t) H_{xx}(t; \hat{u}) \delta x(t) \leq 0,\end{gathered} \tag{4.7}$$

где $\theta_1 = \theta + 1$, $\overset{\circ}{\Psi}(t_1 - 2; \hat{u})$ определяется по (3.9) , а $\delta x(\cdot)$- решение системы

$$\delta x(t+1) = f_x(t)\delta x(t), t \in \{\theta_1, \theta_1 + 1, \cdots, t_1 - 2\},$$

$$\delta x(\theta_1) = f_u(\theta), \delta x(t) = 0, t \in \{t_0, t_0 + 1, \cdots, \theta\}. \tag{4.8}$$

Используя тождество

$$\delta x^T(t_1 - 1)\overset{\circ}{\Psi}(t_1 - 2; \hat{u})\delta x(t_1 - 1) =$$

$$= \sum_{t=\theta}^{t_1-2} \delta x^T(t+1)\overset{\circ}{\Psi}(t; \hat{u})\delta x(t+1) - \sum_{t=\theta_1}^{t_1-2} \delta x^T(t)\overset{\circ}{\Psi}(t-1; \hat{u})\delta x(t),$$

с учетом (3.9) и (4.8), неравенство (4.7) принимает вид

$$(v - u^0(\theta))^T[f_u^T(\theta)\overset{\circ}{\Psi}(\theta; \hat{u})f_u(\theta) + H_{uu}(\theta; \hat{u})](v - u^0(\theta)) \leq 0,$$

$$\hat{u} \in U_0(t_1 - 1), \theta \in I_{-1}, v \in K(u^0(\cdot), U(\cdot))(\theta), \tag{4.9}$$

где множества $K(u^0(\cdot), U(\cdot))(\theta)$, $U_0(t_1 - 1)$ и функция $\overset{\circ}{\Psi}(\cdot; \hat{u})$ определяются по (3.1),(4.1) и (3.9), соответственно.

Следовательно, принимая во внимание утверждение (4.2) с учетом (3.16), а также (4.6) и (4.9), получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$*− оптимальный процесс. Тогда*

$$(j)\ \ \Phi(f(x^0(t_1 - 1), \hat{u}, t_1 - 1)) - \Phi(f(x^0(t_1 - 1), u^0(t_1 - 1), t_1 - 1)) \geq 0,$$

$$\forall \hat{u} \in U(t_1 - 1);$$

(jj) если выполняются предположения $(A1), (B1)$, $(C1)$, *то для всех* $\theta \in \{t_0, t_0 + 1, \ldots, t_1 - 2\}$, $\hat{u} \in U_0(t_1 - 1)$, $v \in K(u^0(\cdot), U(\cdot))(\theta)$ *имеет место равенство (4.6);*

(jjj) если выполняются предположения $(A2)$, $(B2)$, $(C1)$, *то для всех* $(\theta, \hat{u}, v) \in \{t_0, t_0 + 1, \ldots t_1 - 2\} \times U_0(t_1 - 1) \times K(u^0(\cdot), U(\cdot))(\theta)$ *справедливо неравенство (4.9).*

5. Заключение

На основе полученных результатов приходим к выводу, что понятие относительной внутренности множества в широком смысле позволяет обобщить ряд необходимых условий оптимальности, которые получены, например в [3; 5; 8; 17] при предположении открытости множества значений допустимых управлений.

Утверждение (j) теоремы 2 впервые получено в [8]. Остальные утверждения теоремы 2 получены в [8] при $u^0(t) \in \mathrm{intU(t)}$, $t \in I_{-1}$. Утверждения (jj) и (jjj) теоремы 2 являются усилением соответствующих результатов [3; 5; 17]. Аналоги теорем 1, 2 можно получить для более общих дискретных и непрерывных задач оптимального управления.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания, позволившие существенно улучшить качество работы.

Список литературы

1. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление с разрывными системами, М. : Наука, 1987. 226 с.
2. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. М. : Наука, 1973. 446 с.
3. Бутковский А. Г. О необходимых и достаточных условиях оптимальности для импульсных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24, № 8. С. 1056–1064.
4. Габасов Р. Ф. Об оптимальности особых управлений // Дифференциальные уравнения. 1968 Т. 4, № 6. С. 1000–1011.
5. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1969. Т. 30, № 12. С. 39–47.
6. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
7. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 670–677.
8. Марданов М. Дж., Меликов Т. К. Новый дискретный аналог принципа максимума Понтрягина // Доклады РАН. 2018. Т. 483, № 1. С. 15–17.
9. Марданов М. Дж., Меликов Т. К., Малик С. Т. К теории оптимальных процессов в дискретных системах // Математические заметки. 2019. Т. 106, вып. 3. С. 409–423.
10. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука 1988. 360 с.
11. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М. : Наука. 1973. 256 с.
12. Розоноэр Л.И. Принципа максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем III // Автоматика и Телемеханика. 1959. Т.20, № 12. С. 1561–1578.
13. Фан Лянь-цэнь, Ван Чу-сень. Дискретный принцип максимума. Изд-во. Мир. 1967. 180 с.
14. Jordan B. K., Polak E. Theory of class of discrete optimal control system // J. Electr. and Control. 1964. Vol. 17, N 6. P. 697-711.
15. First- and second-order necessary conditions with respect to components for discrete optimal control problems / M. J. Mardanov, T. K. Melikov, S. T. Malik,

K. Malikov // J. Comput. Appl. Math. 2020. Vol. 364. 15 January. 112342. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112342

16. Mardanov M. J., Melikov T. K. A method for studying the optimality of controls in discrete systems // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 2014. Vol. 40, N 2. P. 5–13.
17. Mardanov M. J., Melikov T. K. On strengthening of optimality conditions in discrete control systems // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 2018. Vol. 44, N 1. P. 135–154.
18. Toan N.T.,Thuy L.Q. Second-order necessary optimality conditions for a discrete optimal control problem with mixed constrain // Journal of Global Optimization. 2016. Vol. 64. no. 3. P. 533-562.

Мисир Джумаил Марданов, член-корреспондент НАН Азербайджана, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Азербайджан, AZ 1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, тел.: (+99450) 5393924, e-mail: misirmardanov@yahoo.com,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-3901-0719.

Телман Кули Меликов, доктор физико-математических наук, профессор, Институт систем управления НАН Азербайджана, Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, тел.: (+99450) 5393924,
e-mail: t.melik@rambler.ru

Поступила в редакцию 31.10.19

On Necessary Optimality Conditions for Discrete Control Systems

M. J. Mardanov[1], T. K. Melikov[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan*
[2]*Institute of Control System, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan*

Abstract. In this article, under weakened assumptions, we study high-order necessary optimality conditions for discrete optimal control problems with the free right end of the trajectory. Here, we first use the concept of the relative interior of a set in the broad sense, and then the combination of linear (i.e. uniformly small) and needle variation of the admissible control. As a result, a new formula for the increment of the quality functional with the members of zeroth, first and second order of smallness is obtained. This formula serves as a source of the well-known zeroth order necessary optimality condition, if the admissible control has no linear variation, or the well-known first and second order necessary optimality conditions, if the increment of the quality functional of order zero is vanished on a certain subset of the domain of admissible controls. Following the obtained formula of the increment of the quality functional, the concepts of zeroth, first and second variations of the quality functional are introduced in a more general form, from which, in particular, the well-known variations of the quality functional follow. Based on the obtained formulae for the variations of the quality functional, using the needle variation of the admissible control, more constructive the zeroth, first and second order necessary optimality conditions with broad applications area are obtained.

Keywords: discrete control systems, optimal control, necessary conditions, variations of cost function.

References

1. Ashchepkov L.T. *Optimalnoe upravlenie s razryvnymi sistemami* [Optimal Control of Discontinuous Systems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1987, 226 p. (in Russian)
2. Boltyanskii V.G. *Optimalnoe upravlenie diskretnymi sistemami* [Optimal Control of Discrete Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 446 p. (in Russian)
3. Butkovskii A.G. O neobkhodimykh i dostatochnykh uslaviyakh optimalnosti dlya impulsnikh sistem upravleniya [On necessary and sufficient optimality conditions for impulse control systems]. *Autom. Remote Control,* 1963, vol. 24, no. 8, pp. 1056-1064. (in Russian)
4. Gabasov R. F. Ob optimalnosti osobykh upravleniy [The optimality of singular controls]. *Differential Equations*, 1968, vol. 4, pp. 1000-1011. (in Russian)
5. Gabasov R.F., Kirillova F.M. K theorii neobxodimykh usloviy optimalnosti dlya diskretnykh sistemy [On the theory of necessary conditions for optimality for discrete systems]. *Autom. Remote Control.*, 1969, vol. 12 , no. 30, pp. 1921-1928. (in Russian)
6. Gabasov R.F., Kirillova F.M., *Kachestvennaya teoriya optimalnykh protsessov* [Qualitative Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 508 p. (in Russian)
7. Krasovsky N.N. Ob odnoy zadache optimalnogo regulirovaniya [On a problem of optimal regulation.] *Applied mathematics and mechanics,* 1957, vol. 21, no. 5, pp. 670-677. (in Russian)
8. Mardanov M.J., Melikov T.K. Novyi diskretnyi analog printsipa maksimuma Pontryagina [A New Discrete Analogue of Pontryagin's Maximum Principle.] *Doklady Mathematics,* 2018, vol. 98, no. 3, pp. 549–551. https://doi.org/10.1134/S1064562418070049
9. Mardanov M.J., Melikov T.K . Malik S.T. K theorii optimalnykh protsessov v diskretnykh sistemakh [On the Theory of Optimal Processes in Discrete Systems] *Math. Notes,* 2019, vol. 106, no. 3, pp. 390–401.
10. Mordukhovich B.S. *Metody approksimatsii i upravleniya* [Approximation methods in optimization and control problems.] Moscow, Nauka Publ., 1988. 360 p. (in Russian)
11. Propoi A.I. *Elementy teorii optimalnykh diskternykh protsessov* [Elements of the Theory of Optimal Discrete Processes.] Moscow, Nauka Publ., 1973, 256 p. (in Russian)
12. Rozonoér L.I. Printsip maksimuma L.S. Pontryagina v teorii optimalynykh sistem [Pontryagin's maximum principle in the theory of optimal systems]. *Autom. Remote Control,* 1959, vol. 20, no. 12, pp. 1561-1578. (in Russian)
13. Fan Liang-Tseng, Wang Chu-Sen. *Diskretnyi printsip maksimuma* [The discrete maximum principle]. Moscow, Mir Publ., 1967, 180 p.
14. Jordan B.K., Polak E. Theory of class of discrete optimal control system. *J. Electr. and Control*, 1964, vol. 17, no. 6, pp. 697-711. https://doi.org/10.1080/00207216408937740
15. Mardanov M.J., Melikov T.K, Malik S.T., Malikov K. First- and second-order necessary conditions with respect to components for discrete optimal control problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 2020, vol. 364, 15 January, 112342. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112342

16. Mardanov M.J., Melikov T.K. A method for studying the optimality of controls in discrete systems. *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.,* 2014, vol. 40, no 2, pp. 5-13.
17. Mardanov M.J., Melikov T.K. On strengthening of optimality conditions in discrete control systems, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.,* 2018, vol. 44, no. 1, pp. 135-154.
18. Toan N.T., Thuy L.Q. Second-order necessary optimality conditions for a discrete optimal control problem with mixed constrains. *Journal of Global Optimization,* 2015, vol. 64, no. 3, pp. 533-562. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0333-0

Misir Mardanov, Doctor of Science (Mathematics and Physics), Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, 9, B. Vagabzade st., Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic,
tel.: (+99450) 5393924, e-mail: `misirmardanov@yahoo.com`,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-3901-0719

Telman Melikov, Doctor of Science (Mathematics and Physics), Professor, Institute of Control System, Azerbaijan National Academy of Sciences, 9, B. Vagabzade st., Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic, tel.: (+99450) 5393924,
e-mail: `t.melik@rambler.ru`

Received 31.10.2019