Серия «Математика»
2019. Т. 30. С. 114—124

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.957
MSC 35L75
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.114

Многомерные точные решения системы нелинейных уравнений типа Буссинеска*

А. А. Косов[1], Э. И. Семенов[1], В. В. Тирских[2]
[1] *Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация*
[2] *Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Российская Федерация*

Аннотация. Изучается система двух нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка. Правые части системы уравнений содержат многомерные аналоги уравнения Буссинеска, выражаемые через двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомых функций, а также линейные функции взаимосвязи. Такого рода уравнения, близкие к уравнениям Навье — Стокса, встречаются в задачах гидродинамики. Предлагается искать решение в виде анзаца, содержащего квадратичную зависимость от пространственных переменных и произвольные функции от времени. Использование предложенного анзаца позволяет декомпозировать процесс отыскания компонент решения зависящих от пространственных переменных и от времени. Для отыскания зависимости от пространственных переменных необходимо решать алгебраическую систему матричных, векторных и скалярного уравнения. Найдено общее решение этой системы уравнений в параметрическом виде. Для отыскания компонент решения исходной системы, зависящих от времени, возникает система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система сведена к одному уравнению четвертого порядка, для которого найдены частные решения. Приводится ряд примеров построенных точных решений исходной системы уравнений типа Буссинеска, в том числе выражаемые через функции Якоби по времени и анизотропные по пространственным переменным.

Ключевые слова: нелинейная система, нелинейные уравнения типа Буссинеска, редукция, точные решения.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746)

1. Введение

Некоторые задачи гидродинамики сводятся к нелинейному уравнению Буссинеска [1; 6; 8] $u_{tt} = \partial_x^2 \left(\beta u_{xx} + \mu u^2 + \varepsilon u\right)$. Это уравнение описывает волны, которые могут перемещаться как влево, так и вправо. Хорошо известно [1] его решение в виде уединенной волны (солитона), которое имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{6\beta c^2}{\mu \cos^2(x - \omega t + c_0)}, \quad \omega = c\sqrt{\varepsilon - 4\beta c^2},$$

где $c \neq 0$, c_0 — произвольные постоянные. Многомерный аналог уравнения Буссинеска можно записать как

$$u_{tt} = \Delta\left(\beta\Delta u + \mu u^2 + \varepsilon u\right). \tag{1.1}$$

Цель нашей работы — построение точных многомерных решений системы двух нелинейных уравнений типа Буссинеска с линейными взаимосвязями:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta\left(\beta_1\Delta u + \mu_1 u^2 + \varepsilon_1 u\right) + \alpha_1 v, \\ v_{tt} = \Delta\left(\beta_2\Delta v + \mu_2 v^2 + \varepsilon_2 v\right) + \alpha_2 u. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $u \overset{\triangle}{=} u(\mathbf{x},t)$, $v \overset{\triangle}{=} v(\mathbf{x},t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Δ — n – мерный оператор Лапласа; ∇ — оператор набла взятия градиента; $\beta_i \neq 0$, $\mu_i \neq 0$, ε_i, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2$ — произвольные параметры.

Точные решения системы (1.2) будем отыскивать методом обобщенного разделения переменных [9; 11]

$$u(\mathbf{x},t) = \psi_1(t)W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t), \quad v(\mathbf{x},t) = \psi_2(t)W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t), \tag{1.3}$$

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C, \tag{1.4}$$

где $\psi_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $i = 1,2$ — неизвестные функции времени; ненулевая числовая симметрическая матрица A размера $n \times n$, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ подлежат определению. Здесь и далее $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что конструкция типа (1.4) ранее успешно использовалась для построения точных решений нелинейных параболических систем со степенными нелинейностями [3; 4] и для нелинейной системы уравнений в частных производных первого порядка [5]. Решения некоторых нелинейных гиперболических уравнений с функциональным разделением переменных получены в [7]. Построение точных решений нелинейных систем в частных производных важно и в ряде других приложений, например в теории кинетических систем [10; 12; 13].

2. Редукция к системе ОДУ

После подстановки функций (1.3) в систему уравнений (1.2), с учетом очевидных равенств

$$\Delta\left(\beta\Delta u+\mu u^2+\varepsilon u\right)=\beta\Delta(\Delta u)+2\mu\left(u\Delta u+|\nabla u|^2\right)+\varepsilon\Delta u,$$

$$|\nabla W(\mathbf{x})|^2=(A^2\mathbf{x},\mathbf{x})+2(A\mathbf{B},\mathbf{x})+|\mathbf{B}|^2,$$

$$\Delta W(\mathbf{x})=\operatorname{tr}A\ -\ \text{след матрицы } A,$$

и несложных преобразований приходим к равенствам

$$\left(\psi_1''-2\mu_1(\operatorname{tr}A)\psi_1^2-\alpha_1\psi_2\right)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{B},\mathbf{x})+C\right]+\varphi_1''=$$

$$=2\mu_1\psi_1^2\left[(A^2\mathbf{x},\mathbf{x})+2(A\mathbf{B},\mathbf{x})+|\mathbf{B}|^2\right]+2\mu_1(\operatorname{tr}A)\psi_1\varphi_1+\varepsilon_1\psi_1(\operatorname{tr}A)+\alpha_1\varphi_2,$$

$$\left(\psi_2''-2\mu_2(\operatorname{tr}A)\psi_2^2-\alpha_2\psi_1\right)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{B},\mathbf{x})+C\right]+\varphi_2''=$$

$$=2\mu_2\psi_2^2\left[(A^2\mathbf{x},\mathbf{x})+2(A\mathbf{B},\mathbf{x})+|\mathbf{B}|^2\right]+2\mu_2(\operatorname{tr}A)\psi_2\varphi_2+\varepsilon_2\psi_2(\operatorname{tr}A)+\alpha_2\varphi_1.$$

Очевидно, что если числовая симметрическая матрица A, постоянный вектор $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^n$ и константа $C\in\mathbb{R}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений (САУ)

$$A=2\sigma A^2,\quad \mathbf{B}=2\sigma A\mathbf{B},\quad C=\sigma|\mathbf{B}|^2, \tag{2.1}$$

где $\sigma\neq 0$ — константа разделения, то последние равенства сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка:

$$\psi_1''-\lambda_1\psi_1^2-\alpha_1\psi_2=0,\quad \psi_2''-\lambda_2\psi_2^2-\alpha_2\psi_1=0, \tag{2.2}$$

$$\varphi_1''=\theta_1\psi_1\varphi_1+\alpha_1\varphi_2+\nu_1\psi_1,\quad \varphi_2''=\theta_2\psi_2\varphi_2+\alpha_2\varphi_1+\nu_2\psi_2. \tag{2.3}$$

Здесь введены обозначения $\theta_1=2\mu_1(\operatorname{tr}A)$, $\theta_2=2\mu_2(\operatorname{tr}A)$, $\nu_1=\varepsilon_1(\operatorname{tr}A)$, $\nu_2=\varepsilon_2(\operatorname{tr}A)$,

$$\lambda_1=2\mu_1\left(\operatorname{tr}A+\frac{1}{\sigma}\right),\quad \lambda_2=2\mu_2\left(\operatorname{tr}A+\frac{1}{\sigma}\right). \tag{2.4}$$

Таким образом, проведенными рассуждениями установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Система нелинейных уравнений типа Буссинеска* (1.2) *имеет точные решения* (1.3), *где функция* $W(\mathbf{x})$ *может быть выбрана произвольным полиномом вида* (1.4) *с коэффициентами, удовлетворяющими* САУ (2.1), *функции* $\psi_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $i=1,2$ *находятся из систем* ОДУ (2.2), (2.3).

Отметим, что САУ вида (2.1) ранее была получена и исследована в [3; 5]. Поэтому в этой работе мы приведем только пример функций (1.4), коэффициенты которой удовлетворяют САУ (2.1).

Пример 1. В трехмерном случае $n = 3$ для построения анизотропных по пространственным переменным точных решений системы (1.2) можно использовать, например следующие функции

$$W_1(x,y,z) = \frac{1}{36\sigma}\left[5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy - 8xz - 4yz\right] + \tag{2.5}$$

$$+ l_1 x - 2(l_1 + l_2)y + l_2 z + \sigma\left(5l_1^2 + 8l_1 l_2 + 5l_2^2\right),$$

$$W_2(x,y,z) = \frac{1}{36\sigma}\left[5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy + 4xz - 4yz\right] + \tag{2.6}$$

$$+ l_1 x + l_2 y + 2(l_1 - l_2)z + \sigma\left(5l_1^2 - 8l_1 l_2 + 5l_2^2\right),$$

$$W_3(x,y,z) = \frac{1}{36\sigma}\left[8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 8yz\right] + \tag{2.7}$$

$$+ 2(l_2 - l_1)x + l_1 y + l_2 z + \sigma\left(5l_1^2 - 8l_1 l_2 + 5l_2^2\right).$$

Для построения радиально-симметричных решений будем использовать функцию

$$W_0(x,y,z) = \frac{1}{4\sigma}\left[(x + 2\sigma l_1)^2 + (y + 2\sigma l_2)^2 + (z + 2\sigma l_3)^2\right]. \tag{2.8}$$

Здесь $\sigma \neq 0$, l_i, $i = 1,2,3$ — произвольные параметры.

3. Разрешимость нелинейной системы ОДУ (2.2)

В системах ОДУ (2.2), (2.3), полученных в результате редукции системы нелинейных уравнений (1.2), нелинейной является только система уравнений (2.2), построение общего решения которой маловероятно в силу её нелинейности и высокой размерности. Поэтому в этом разделе все внимание уделим построению частных точных решений нелинейной системы ОДУ (2.2).

Элементарными преобразованиями система ОДУ (2.2) сводится к одному нелинейному ОДУ четвертого порядка относительно функции $\psi_1(t)$ следующего вида:

$$\left(\psi_1'' - \lambda_1\psi_1^2\right)'' - \frac{\lambda_2}{\alpha_1}\left(\psi_1'' - \lambda_1\psi_1^2\right)^2 - \alpha_1\alpha_2\psi_1 = 0. \tag{3.1}$$

Нетрудно убедиться, что если параметры уравнения (3.1) связаны равенством $\alpha_1\lambda_1^2 - \alpha_2\lambda_2^2 = 0$, то уравнение (3.1) имеет частное решение $\psi_1^*(t) = y(t)$, которое удовлетворяет ОДУ второго порядка

$$y'' - \lambda_1 y^2 - \frac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}\, y = 0. \tag{3.2}$$

В [3; 5] показано, что решением матричного уравнения (2.1) является матрица $A = \dfrac{1}{2\sigma}\, SE_mS^T$, где E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица. При этом

$$\operatorname{tr} A = \frac{m}{2\sigma}, \quad m \le n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \ge 2. \tag{3.3}$$

С учетом формулы (3.3) выражения для параметров (2.4) запишутся как

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1(m+2)}{\sigma}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2(m+2)}{\sigma}. \tag{3.4}$$

Таким образом, соотношение на параметры $\alpha_1\lambda_1^2 - \alpha_2\lambda_2^2 = 0$, в терминах параметров системы (1.2), примет вид

$$\alpha_1\mu_1^2 - \alpha_2\mu_2^2 = 0. \tag{3.5}$$

Если $\lambda_1 = 6$, $\lambda_1\alpha_1 = -4\lambda_2$ или $\mu_1 = \dfrac{6\sigma}{m+2}$, $\alpha_1\mu_1 + 4\mu_2 = 0$, то как указано в справочнике [2] ОДУ (3.2) имеет частное точное решение $y(t) = \dfrac{1}{\sin^2(t - t_0)}$, где t_0 — произвольная постоянная. Это частное решение приводит к частному решению системы ОДУ (2.2) следующего вида

$$\psi_1^*(t) = \frac{1}{\sin^2(t - t_0)}, \quad \psi_2^*(t) = -\frac{4}{\alpha_1 \sin^2(t - t_0)}. \tag{3.6}$$

Из теоремы 1 для этого частного решения приходим к справедливости утверждения.

Утверждение 1. *Пусть параметры системы нелинейных уравнений типа Буссинеска* (1.2) *связаны соотношением* (3.5) *и равенствами*

$$\mu_1 = \frac{6\sigma}{m+2}, \quad \alpha_1\mu_1 + 4\mu_2 = 0, \quad m \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

где $\sigma \neq 0$ — произвольная постоянная. Тогда система (1.2) *имеет частные точные многомерные решения*

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi_1^*(t)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C\right] + \varphi_1(t),$$

$$v(\mathbf{x},t) = \psi_2^*(t)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + \varphi_2(t),$$

где числовая симметрическая матрица A, постоянный вектор $\mathbf{B}$ и константа C удовлетворяют САУ (2.1), *функции $\psi_i^*(t)$, $i = 1,2$ выражаются формулами* (3.6), *а функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ определяются из линейной неавтономной системы* ОДУ *второго порядка* (2.3).

В общем случае ОДУ (3.2) сводится к следующей квадратуре

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\dfrac{2}{3}\lambda_1\, y^3 + \dfrac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}\, y^2 + C_1}} = t - t_0, \tag{3.7}$$

где C_1, t_0 — произвольные постоянные. Вычислив этот интеграл, получим, что зависимость y от переменной t задается неявно равенством, содержащим эллиптический интеграл первого рода. Однако, если константа C_1 принимает значения $C_1 = 0$ и $C_1 = -\dfrac{\lambda_1\alpha_1^3}{3\lambda_2^3}$, то легко выписать явные частные точные решения уравнения (3.2) в элементарных функциях. Кроме того, если параметры λ_1, λ_2, α_1 и постоянная C_1 выбираются определенным образом, то можно получить точные решения уравнения (3.2) в эллиптических функциях Якоби.

Пусть $C_1 = 0$, тогда интеграл (3.7) вычисляется в элементарных функциях и в этом случае система ОДУ (2.2) имеет частные точные решения следующих видов

$$\psi_1^{*1}(t) = \frac{3\alpha_1}{2\lambda_2}\left(\operatorname{th}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}}(t-t_0)\right) - 1\right),$$

$$\psi_2^{*1}(t) = \frac{3\lambda_1\alpha_1}{2\lambda_2^2}\left(\operatorname{th}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}}(t-t_0)\right) - 1\right). \tag{3.8}$$

Пусть $C_1 = -\dfrac{\lambda_1\alpha_1^3}{3\lambda_2^3}$, тогда интеграл (3.7) также вычисляется в элементарных функциях и в этом случае система ОДУ (2.2) имеет частные точные решения следующих видов

$$\psi_1^{*2}(t) = \frac{\alpha_1}{2\lambda_2}\left(3\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}}(t-t_0)\right) + 1\right),$$

$$\psi_2^{*2}(t) = \frac{\lambda_1\alpha_1\left(3 - 2\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}}(t-t_0)\right)\right)}{2\lambda_2^2\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}}(t-t_0)\right)}. \tag{3.9}$$

С учетом этих результатов и использованием теоремы 1 приходим к справедливости утверждения

Утверждение 2. *Пусть параметры системы нелинейных уравнений типа Буссинеска* (1.2) *связаны равенством* (3.5). *Тогда она имеет частные точные многомерные решения*

$$u_1(\mathbf{x},t) = \psi_1^{*1}\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + \varphi_1(t),$$

$$v_1(\mathbf{x},t) = \psi_2^{*1}(t)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + \varphi_2(t),$$

$$u_2(\mathbf{x},t) = \psi_1^{*2}(t)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + \varphi_1(t),$$

$$v_2(\mathbf{x},t) = \psi_2^{*2}(t)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + \varphi_2(t),$$

где числовая симметрическая матрица A, постоянный вектор $\mathbf{B}$ и константа C удовлетворяют САУ (2.1), *функции $\psi_i^{*j}(t)$, $i,j = 1,2$ выражаются формулами* (3.8), (3.9), *а функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ определяются из линейной неавтономной системы* ОДУ *второго порядка* (2.3).

Пример 2. Система нелинейных уравнений типа Буссинеска (1.2), с соотношением на параметры (3.5) и дополнительным условием $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, в трехмерном координатном пространстве имеет частные точные, анизотропные по пространственным переменным, параметрические семейства решений

$$u_i(x,y,z,t) = \frac{\alpha_1\sigma}{8\mu_2}\left(3\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_1\alpha_1}{\mu_2}}(t-t_0)\right) + 1\right)W_i(x,y,z),$$

$$v_i(x,y,z,t) = \frac{\mu_1\alpha_1\sigma\left(3 - 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_1\alpha_1}{\mu_2}}(t-t_0)\right)\right)}{8\mu_2^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_1\alpha_1}{\mu_2}}(t-t_0)\right)}W_i(x,y,z,t),$$

где функции $W_i(x,y,z,t)$, $i = 1,2,3$ задаются формулами (2.5)–(2.7), $\sigma \neq 0$, t_0 — произвольные постоянные.

Пусть, теперь, параметры λ_1, λ_2, α_1 и постоянная C_1 таковы, что $\lambda_1 > 0$ и кубический трехчлен в интеграле (3.7) представим в виде $(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)$, где вещественные постоянные $a_1 < a_2 < a_3$ определяются из следующей системы алгебраических уравнений

$$a_1+a_2+a_3+\frac{3\alpha_1}{2\lambda_2} = 0, \quad a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3 = 0, \quad C_1+a_1a_2a_3 = 0. \tag{3.10}$$

Тогда вычислив интеграл (3.7), находим

$$\psi_3^{*1}(t) = (a_2 - a_1)\,\mathrm{sn}^2\,(T,k) + a_1,$$

$$\psi_3^{*2}(t) = \frac{\lambda_1\alpha_1}{\lambda_2}\Big[(a_2 - a_1)\,\mathrm{sn}^2\,(T,k) + a_1\Big]. \tag{3.11}$$

Здесь введено обозначение $T = \dfrac{\sqrt{6\lambda_1(a_3 - a_1)}}{6\sigma}\,(t - t_0)$, $\mathrm{sn}(T,k)$ — эллиптический синус Якоби, $k = \sqrt{\dfrac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}}$ — модуль эллиптической функции. С учетом приведенных результатов и использованием теоремы 1 приходим к справедливости утверждения.

Утверждение 3. *Пусть параметры системы нелинейных уравнений типа Буссинеска* (1.2) *связаны равенством* (3.5). *Тогда она имеет частные точные многомерные решения*

$$u_3(\mathbf{x},t) = \psi_3^{*1}(t)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + \varphi_1(t),$$

$$v_3(\mathbf{x},t) = \psi_3^{*2}(t)\left[\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right] + \varphi_2(t),$$

где числовая симметрическая матрица A, постоянный вектор $\mathbf{B}$ *и константа C удовлетворяют* САУ (2.1), *функции $\psi_3^{*1}(t)$, $\psi_3^{*2}(t)$ выражаются формулами* (3.11), *в которых вещественные постоянные $a_1 < a_2 < a_3$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений* (3.10), *а функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ определяются из линейной неавтономной системы* ОДУ *второго порядка* (2.3).

Отметим, что в приведенных утверждениях 1–3 для случая $n = 3$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) в качестве $W(x,y,z)$ можно взять любую из функций приведенных в примере 1. Так для функций определяемых формулами (2.5)–(2.7) получим анизотропные по пространственным переменным точные решения, а для функции (2.8) можно выписать радиально-симметричное по пространственным переменным x, y, z точное решение.

4. Заключение

Таким образом, получены формулы новых точных многомерных решений систем нелинейных уравнений типа Буссинеска. Полученные явные выражения точных многомерных решений, которые выражаются в элементарных и эллиптических функциях Якоби, могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач для нелинейных систем уравнений в частных производных четвертого порядка большой размерности.

Список литературы

1. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. М. : Мир, 1988. 694 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1971. 576 с. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-663-05925-7
3. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных многомерных решениях системы уравнений реакции-диффузии со степенными нелинейностями // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 4. С. 796–812. https://10.17377/smzh.2017.58.408
4. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции-диффузии // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 108–122. https://10.1134/S0374064118010090
5. Kosov A. A., Semenov E. I., Tirskikh V. V. On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of First Order Partial Differential Equation // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 28. С. 53–68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.53
6. Павлов М. В. Уравнение Буссинеска и преобразование Миуры // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 1. С. 175–182.
7. Полянин А. Д., Журов А. И. Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики // Доклады АН. 2019. Т. 486, № 3. С. 287–291.
8. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М. : Физматлит, 2002. 432 с.
9. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М. : Физматлит, 2005. 256 с.
10. Скубачевский А. Л. Уравнения Власова – Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле //УМН. 2014. Т. 69, № 2. С. 107–148. https://doi.org/10.4213/rm9579.
11. Galactionov V. A., Svirshchevskii S. R. Subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Chapman & Hall/CRC, 2007. 493 p.
12. Steady state solutions of the Vlasov-Maxwell system and their stability / Y. Markov, G. Rudykh, N. Sidorov, A. Sinitsyn, D. Tolstonogov // Acta Appl. Math. 1992. Vol. 28, N 3. P. 253–293.
13. Сидоров Н. А., Синицын А. В. Стационарная система Власова – Максвелла в ограниченных областях // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М. : Физматлит, 2003. Р. 50–88.

Александр Аркадьевич Косов, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Российская Федерация, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 427100, e-mail: kosov_idstu@mail.ru

Эдуард Иванович Семенов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Российская Федерация, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453099, e-mail: edwseiz@gmail.com, ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-9768-9945

Владимир Викторович Тирских, кандидат физико-математических наук, доцент, Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15,
тел. (3952)638311, e-mail: tirskikh_vv@irgups.ru

Поступила в редакцию 12.07.19

Multidimensional Exact Solutions of a System of Nonlinear Boussinesq Type Equations

A. A. Kosov[1], E. I. Semenov[1], V. V. Tirskikh[2]

[1]*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB of RAS, Irkutsk, Russian Federation*
[2]*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation*

Abstract. We study the system of two nonlinear partial differential equations of the fourth order. The right parts of the system of equations contain multidimensional analogs of Boussinesq equation, expressed in terms of two-fold Laplace operators and squares of gradients of the required functions, as well as linear functions of the relationship. This kind of equations, similar to Navier-Stokes equations, encountered in problems of hydrodynamics. The paper proposes to search for a solution in the form of anzatz containing quadratic dependence on spatial variables and arbitrary functions on time. The use of the proposed anzatz allows to decompose the process of finding the solution components depending on the spatial variables and time. To find the dependence on spatial variables it is necessary to solve the algebraic system of matrix, vector and scalar equations. The General solution of this system of equations in parametric form is found. To find the time-dependent components of the solution of the initial system, a system of nonlinear ordinary differential equations arises. This system is reduced to one fourth-order equation for which particular solutions are found. A number of examples of the constructed exact solutions of the initial system of Boussinesq equations, including those expressed in terms of Jacobi functions in time and anisotropic in spatial variables, are given.

Keywords: nonlinear system, nonlinear Boussinesq equations, reduction, exact solutions

References

1. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and nonlinear waves equations*. London, Academic Press, 1982, 630 p.
2. Kamke E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B.G. Teubner, Leipzig, 1977. https://dx.doi.org/10.1007/978-3-663-05925-7
3. Kosov A.A., Semenov E.I. Multidimensional exact solutions to the reaction-diffusion system with power-law nonlinear terms. *Siberian Math. J.,* 2017, vol. 58, no. 4, pp. 619–632. https://doi.org/10.1134/S0037446617040085
4. Kosov A.A., Semenov E.I. On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of Reaction–Diffusion Equations. *Differential Equations,* 2018, vol.54, no. 1, pp. 106-120. https://10.1134/S0012266118010093
5. Kosov A.A., Semenov E.I., Tirskikh V.V. On Exact Multidimensional Solutions of a Nonlinear System of First Order Partial Differential Equation. *The Bulletin*

of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2019, vol. 28, pp. 53-68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.53

6. Pavlov M.V. *Uravnenie Bussineska i preobrazovanie Miury* [Boussinesq equation and Miura transform] *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2004, vol. 10, no. 1, pp. 175-182. (in Russian)
7. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional separable solutions of two classes of nonlinear mathematical physics equations. *Doklady Mathematics*, 2019, vol. 99, no. 3, pp. 321–324. https://10.31857/S0869-56524863287-291
8. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations.* Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2012, 1912 p.
9. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelinejnyx uravnenij matematicheskoj fiziki i mexaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. M.: Fizmatlit Publ., 2005, 256 p. (in Russian)
10. Skubachevskii A.L. Vlasov – Poisson equations for a two-component plasma in homogeneous magnetic field. *Russian Math. Surveys*, 2014, vol. 69, no. 2, pp. 291-335. http://dx.doi.org/10.1070/RM2014v069n02ABEH004889
11. Galactionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics.* Chapman & Hall/CRC, 2007, 493 p.
12. Markov Y., Rudykh G., Sidorov N., Sinitsyn A., Tolstonogov D. Steady state solutions of the Vlasov – Maxwell system and their stability. *Acta Appl. Math.*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 253-293.
13. Sidorov N.A., Sinitsyn A.V. *Stacionarnaya sistema vlasova-maksvella v ogranichennyx oblastyax* [The stationary Vlasov – Maxwell system in bounded domains] «Nelinejnyj analiz i nelinejnye differencialnye uravneniya» [Nonlinear analysis and nonlinear differential equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, pp. 50-88. (in Russian)

Alexander Kosov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Leading Researcher; Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation; tel.: (3952) 427100, e-mail: kosov_idstu@mail.ru

Edward Semenov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Researcher; Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation; tel.: (3952) 453099, e-mail: edwseiz@gmail.com, ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-9768-9945

Vladimir Tirskikh, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Irkutsk State Transport University, 15, Chernyshevsky st., Irkutsk, 664074, Russian Federation; tel.: (3952) 638311, e-mail: tirskikh_vv@irgups.ru

Received 12.07.19