Серия «Математика»
2019. Т. 30. С. 83—98

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.977
MSC 49J15, 49M25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83

Параметризация некоторых задач управления линейными системами

В. А. Срочко[1], Е. В. Аксенюшкина[2]

[1] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация*

[2] *Байкальский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация*

Аннотация. В рамках методов параметризации управления рассматривается ряд задач оптимизации линейных фазовых систем с квадратичным и билинейным функционалами. Аппроксимация управления проводится в классе кусочно-линейных функций на равномерной сетке узлов отрезка времени и оформляется как линейная комбинация специального набора опорных функций с коэффициентами-параметрами, которые и являются переменными конечномерной задачи. При этом интервальное ограничение на управление в вариационной задаче автоматически переходит в аналогичные ограничения на переменные конечномерной задачи.

Для характеризации и эффективного решения этих задач получены явные выражения избранных функционалов через параметры аппроксимаций. В результате сформулирована в явном виде серия квадратичных задач математического программирования с простейшими ограничениями на переменные. При этом квадратичные формы целевых функций определяются матрицами Грама и Хессенберга.

Необходимо подчеркнуть, что используемая параметризация сохраняет свойство выпуклости исходной задачи оптимального управления. Кроме того, простейшая задача оптимального управления с линейным терминальным функционалом после параметризации решается без итераций.

Установлена связь между согласованными задачами на уровне условий оптимальности. Она состоит в том, что дифференциальное условие экстремума в конечномерной задаче локально эквивалентно принципу максимума для вариационной задачи в узлах сетки.

Ключевые слова: линейная система управления, квадратичный и билинейный функционалы, кусочно-линейная аппроксимация, конечномерные задачи.

1. Введение

Различные технологии преобразования задач оптимального управления к конечномерным моделям как инструмент их численного решения имеют давнюю историю (см., например, [5; 7; 12; 15]). Такой априорный переход от вариационных проблем к задачам математического программирования, весьма популярный в зарубежных публикациях, встречал определенную критику и неприятие со стороны ряда отечественных специалистов по численным методам оптимального управления.

Однако ситуация в этой области несколько модифицируется в последние годы, когда новые методы дискретизации (параметризации) управления приобретают практическую актуальность и конкурентность в сравнении с традиционными алгоритмами решения задач оптимального управления (см. обзор [1]).

В отношении разнообразных редукций вариационных задач к конечномерным необходимо отметить следующее.

С одной стороны, такие преобразования снижают качество получаемых результатов, поскольку экстремальные решения конечномерных задач (удовлетворяющие необходимым условиям экстремума) не приводят, вообще говоря, к экстремальным управлениям вариационных задач (удовлетворяющим принципу максимума). Конечно, качество конечномерных решений можно повысить за счет уменьшения шага параметризации, однако определенный разрыв между вариационным и конечномерным решениями всегда сохраняется (поточечные неравенства, интегральные неравенства).

Кроме того, вариационные методы имеют определенные преимущества, поскольку используют незаурядные результаты теории оптимального управления. Это прежде всего необходимые и достаточные условия оптимальности, не имеющие аналогий в конечномерных задачах.

С другой стороны, современные методы конечномерной оптимизации в совокупности с мощным программным обеспечением в немалой степени превосходят уровень соответствующих методов оптимального управления, особенно в рамках решения невыпуклых задач. Не случайно достаточно эффективные методы программного и позиционного решения линейных задач оптимального управления связаны с дискретизацией (параметризацией) управления и переходом к специальным задачам линейного программирования [2]. Для нелинейных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями успешной оказалась процедура полной дискретизации по управлению и состоянию, приводящая к задачам нелинейного программирования [7].

Тем не менее, в рамках дискретного подхода предпочтение отдается схемам параметризации только по управляющим функциям [6; 15]. В последнее время такие параметризации оформляются с помощью линейных комбинаций некоторых опорных функций: полиномиальные сплайны, квадратичные экспоненты и т. д. [8; 13].

В общем плане можно утверждать, что приемлемая редукция к конечномерным задачам специальной структуры повышает возможности приближенного решения избранных задач оптимального управления.

В данной работе рассматривается ряд задач оптимального управления (квадратичный и билинейный функционалы) относительно линейной фазовой системы. Аппроксимация управления проводится в классе кусочно-постоянных и кусочно-линейных функций на равномерной сетке узлов промежутка времени и оформляется как линейная комбинация специального набора опорных функций с коэффициентами-параметрами, которые и являются переменными конечномерной задачи. При этом двустороннее ограничение на управление в вариационной задаче автоматически переходит в аналогичные ограничения на переменные конечномерной задачи. Соответствующие фазовые траектории представляются в виде линейных комбинаций с теми же коэффициентами.

Получены явные выражения для избранных функционалов через параметры аппроксимаций. В результате сформулирована в явном виде серия квадратичных задач математического программирования с простейшими ограничениями на переменные. Важно отметить, что используемая параметризация сохраняет свойство выпуклости исходной задачи оптимального управления. При этом простейшая задача с линейным функционалом после параметризации решается элементарно.

Установлена связь между вариационной и конечномерной задачами на уровне условий оптимальности: дифференциальное условие экстремума в конечномерной задаче локально эквивалентно (для малого шага параметризации) принципу максимума для вариационной задачи в узлах сетки.

2. Постановка задачи. Схемы параметризации управления

Введем переменные $t \in [t_0, T]$ — время, $u(t) \in R$ — управление, $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние, связанные линейной системой

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = x^0 \tag{2.1}$$

с непрерывными на $[t_0, T]$ функциями $A(t) \in R^{n\times n}$, $b(t) \in R^n$ и заданным начальным состоянием x^0.

Множество V допустимых управлений образуют кусочно-непрерывные функции $u(t)$ с двусторонним ограничением в каждый момент времени

$$u(t) \in [u_-, u_+], \quad t \in [t_0, T] \tag{2.2}$$

На множестве V определим следующие функционалы:

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), x(T)\rangle \quad \text{(норма конечного состояния)},$$

$$\Phi_2(u) = \int_{t_0}^{T} \langle a(t), x(t)\rangle u(t)dt \quad \text{(билинейность по паре } (x, u)\text{)}.$$

Рассмотрим задачи на экстремум (минимум или максимум) указанных функционалов на множестве допустимых управлений при наличии некоторых дополнительных ограничений.

Наша цель состоит в редукции этих вариационных задач к задачам конечномерной оптимизации на основе простейших процедур параметризации допустимых управлений в форме линейных комбинаций относительно некоторой системы опорных функций.

Представим первую схему параметризации. Введем на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку Δ_1 узлов $t_i = t_0 + ih$, $i = \overline{0, m}$ с шагом $h = \frac{T-t_0}{m}$ $(t_m = T)$. Выделим ячейки $T_j = (t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, m}$ и определим соответствующие характеристические функции

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_j, \\ 0, & t \in [t_0, T] \setminus T_j. \end{cases}$$

Отметим, что для $j \neq k$

$$\chi_j(t)\chi_k(t) = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

Пусть $y = (y_1, ..., y_m)$ — набор параметров (коэффициентов) линейной комбинации. Образуем семейство управлений

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.3}$$

Это кусочно-постоянные функции со значениями y_j в рамках сетки Δ_1 : $u(t, y) = y_j$, $t \in T_j$, $j = \overline{1, m}$. Введем множество таких управлений с учетом ограничения (2.2)

$$V_1 = \{u(\cdot, y) : \; y_j \in [u_-, u_+], \; j = \overline{1, m}\}.$$

Это подмножество допустимых управлений: $V_1 \subset V$.

Пусть $x(t, y)$, $t \in [t_0, T]$ — решение фазовой системы (2.1), соответствующее управлению $u(t, y)$. Имеет место следующее представление

$$x(t, y) = x(t, 0) + \sum_{j=1}^{m} y_j x^j(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.4}$$

в котором $x^j(t)$ — решение фазовой задачи Коши с опорной функцией $\chi_j(t)$ и нулевым начальным условием

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\chi_j(t), \quad x(t_0) = 0. \tag{2.5}$$

Отметим, что $x^j(t) = 0,\ t \in [t_0, t_{j-1}],\ j = \overline{2, m}$.

Перейдем к описанию второй схемы параметризации. Введем на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку Δ_2 узлов $t_i = t_0 + ih,\ i = \overline{0, m+1}$ с шагом $h = \frac{T - t_0}{m+1}$ $(t_{m+1} = T)$. Выделим промежутки

$$T_0 = [t_0, t_1], \qquad T_j = [t_{j-1}, t_{j+1}],\ \ j = \overline{1, m}, \qquad T_{m+1} = [t_m, t_{m+1}]$$

и определим набор опорных функций на $[t_0, T]$

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t_1 - t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases} \qquad \varphi_{m+1}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin T_{m+1}, \\ \frac{1}{h}(t - t_m), & t \in T_{m+1}, \end{cases}$$

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t - t_{j-1}), & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{1}{h}(t_{j+1} - t), & t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0, & t \notin T_j, \end{cases} \qquad j = \overline{1, m}.$$

Отметим значения в узловых точках

$$\varphi_j(t_i) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \qquad i, j = \overline{0, m+1}.$$

и взаимосвязь «несоседних» функций

$$\varphi_j(t)\varphi_k(t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \quad |j - k| > 1. \tag{2.6}$$

Пусть $z = (z_0, ..., z_{m+1})$ — набор параметров (коэффициентов) линейной комбинации. Сформируем семейство управлений

$$u(t, z) = \sum_{j=0}^{m+1} z_j \varphi_j(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.7}$$

Это непрерывные кусочно-линейные функции с угловыми точками t_i и значениями $u(t_i, z) = z_i$, $i = \overline{0, m+1}$. В интерполяционной терминологии управление $u(t, z)$ представляет собой линейный сплайн на сетке Δ_2 по таблице значений $\{z_0, ..., z_{m+1}\}$. Такая схема параметризации хорошо известна в рамках приближенного решения дифференциальных задач: разностные варианты методов Ритца и Галеркина [3; 4].

Введем множество таких управлений с учетом ограничения (2.2)

$$V_2 = \{u(\cdot, z) :\ z_j \in [u_-, u_+],\ \ j = \overline{0, m+1}\}.$$

Это подмножество допустимых управлений: $V_2 \subset V$.

Пусть $x(t,z)$, $t \in [t_0, T]$ — фазовая траектория, соответствующая управлению $u(t,z)$. Справедливо представление

$$x(t,z) = x(t,0) + \sum_{j=0}^{m+1} z_j x^j(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.8}$$

где $x^j(t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)\varphi_j(t), \quad x(t_0) = 0.$$

Отметим, что $x^j(t) = 0,\ t \in [t_0, t_{j-1}]$, $j = \overline{2, m+1}$.

Применение представленных процедур параметризации для приближенного решения исходных задач оптимального управления приводит к конечномерным задачам оптимизации относительно переменных y или z. Для характеризации и эффективного решения этих задач необходимо получить явные выражения целевых функций и их производных через переменные y, z по крайней мере для заявленных функционалов $\Phi_i(u),\ i = 1, 2$.

3. Квадратичный функционал

Рассмотрим терминальный функционал $\Phi_1(u)$ на множестве управлений V_1. Используя представление (2.4) для фазовых траекторий, получаем

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{2}\langle x(T,0), x(T,0)\rangle + \sum_{j=1}^{m} y_j \langle x(T,0), x^j(T)\rangle + \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} y_j y_k \langle x^j(T), x^k(T)\rangle. \tag{3.1}$$

Введем обозначения:

m-вектор d с компонентами $\langle x(T,0), x^j(T)\rangle,\ j = \overline{1,m}$,

$(n \times m)$-матрица X со столбцами $x^j(T),\ j = \overline{1,m}$.

В результате получаем первую формулу для функционала Φ_1 на множестве V_1

$$\Phi_1(y) = \Phi_1(0) + \langle d, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, Xy\rangle.$$

Подсчет компонент вектора d и столбцов матрицы X связан с задачами Коши для фазовой системы (2.1), которая решается на отрезке $[t_{j-1}, T],\ j = \overline{1,m}$.

Получим вторую формулу для функционала Φ_1, используя сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -A(t)^T \psi, \quad t \in [t_0, T], \tag{3.2}$$

Пусть $\psi^i(t),\ i=\overline{1,n}$ — решение этой системы с начальным условием $\psi(T)=e^i$, где $e^i\in R^n$ – i-тый орт. Определим функции

$$s_i(t)=\langle\psi^i(t),b(t)\rangle,\quad t\in[t_0,T],\quad i=\overline{1,n}.$$

Тогда имеет место представление

$$x_i(T,u)=\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle+\int_{t_0}^{T}s_i(t)u(t)dt,\quad i=\overline{1,n},\tag{3.3}$$

которое приводит к явному выражению функционала $\Phi_1(u)$ через управление

$$\Phi_1(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(T,u)=\Phi_1(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle\int_{t_0}^{T}s_i(t)u(t)dt+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\int_{t_0}^{T}s_i(t)u(t)dt)^2.$$

Далее применим формулу (2.3) для управления:

$$\int_{t_0}^{T}s_i(t)u(t)dt=\sum_{j=1}^{m}y_j\int_{T_j}s_i(t)dt$$

и введем обозначения

$$c_{ij}=\int_{T_j}s_i(t)dt,\quad c_j=\sum_{i=1}^{n}\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle c_{ij}.\tag{3.4}$$

В результате получаем вторую формулу для функционала Φ_1 на множестве V_1

$$\Phi_1(y)=\Phi_1(0)+\sum_{j=1}^{m}c_jy_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}c_{ij}y_j)^2.$$

Реализация этой формулы связана с n-кратным решением сопряженной системы (3.2) в совокупности с интегрированием возникающих функций $s_i(t)$ по ячейкам T_j.

В векторно-матричном исполнении полученная формула имеет следующий вид

$$\Phi_1(y)=\Phi_1(0)+\langle c,y\rangle+\frac{1}{2}\langle Cy,Cy\rangle$$

с m-вектором $c=\{c_j\}$ и $(n\times m)$-матрицей $C=\{c_{ij}\}$.

Рассмотрим теперь функционал $\Phi_1(u)$ для случая кусочно-линейной параметризации (на множестве V_2). В этом случае рабочие объекты: сетка Δ_2 с ячейками

$$T_0=[t_0,t_1],\quad T_j=[t_{j-1},t_{j+1}],\ \ j=\overline{1,m},\quad T_{m+1}=[t_m,t_{m+1}],$$

опорные функции $\varphi_j(t)$, $j=\overline{0,m+1}$ и линейные комбинации (2.7), (2.8) с коэффициентами z_j. Схема вывода полностью сохраняется.

Первая формула для функционала представляется в виде

$$\Phi_1(z)=\Phi_1(0)+\langle\hat{d},z\rangle+\frac{1}{2}\langle\hat{X}z,\hat{X}z\rangle.$$

Здесь $\hat{d}\in R^{m+2}$ — вектор с компонентами $\langle x(T,0),x^j(T)\rangle$, $j=\overline{0,m+1}$; $\hat{X}\in R^{n\times(m+2)}$ — матрица со столбцами $x^j(T)$, $j=\overline{0,m+1}$.

Вторая формула имеет вид

$$\Phi_1(z)=\Phi_1(0)+\langle\hat{c},z\rangle+\frac{1}{2}\langle\hat{C}z,\hat{C}z\rangle.$$

Здесь $\hat{C}\in R^{n\times(m+2)}$ — матрица с элементами $\hat{c}_{ij}=\int_{T_j}s_i(t)\varphi_j(t)dt$, $i=\overline{1,n}$,
$j=\overline{0,m+1}$; $\hat{c}\in R^{m+2}$ — вектор с компонентами

$$\hat{c}_j=\sum_{i=1}^{n}\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle\hat{c}_{ij},\quad j=\overline{0,m+1}.$$

4. Билинейный функционал

Рассмотрим функционал $\Phi_2(u)$ в рамках первой параметризации. Используя формулы (2.3), (2.4) для управления и фазовой траектории, получаем

$$\Phi_2(y)=\sum_{j=1}^{m}y_j\int_{T_j}\langle a(t),x(t,0)\rangle dt+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}y_jy_k\int_{t_0}^{T}\langle a(t),x^j(t)\rangle\chi_k(t)dt.$$

Уточним интеграл под знаком двойной суммы, учитывая свойства

$$x^j(t)=0,\quad \chi_k(t)=0,\quad t\in[t_0,t_{j-1}],\quad k<j.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{T}\langle a(t),x^j(t)\rangle\chi_k(t)dt=\int_{t_{j-1}}^{T}\langle a(t),x^j(t)\rangle\chi_k(t)dt=$$

$$=\begin{cases}0, & k<j,\\ \int_{T_k}\langle a(t),x^j(t)\rangle dt, & k\geq j.\end{cases}$$

В результате получаем требуемую формулу

$$\Phi_2(y)=\sum_{j=1}^{m}y_j\int_{T_j}\langle a(t),x(t,0)\rangle dt+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=j}^{m}y_jy_k\int_{T_k}\langle a(t),x^j(t)\rangle dt.$$

Введем обозначения

$$d \in R^m, \quad d_j = \int_{T_j} \langle a(t), x(t,0)\rangle dt, \quad j = \overline{1,m};$$

$$C \in R^{m\times m}, \quad c_{jk} = \begin{cases} 0, & k < j, \\ \int_{T_k} \langle a(t), x^j(t)\rangle dt, & k \geq j, \end{cases} \qquad j = \overline{1,m}.$$

Векторно-матричное представление имеет вид

$$\Phi_2(y) = \langle d, y\rangle + \langle y, Cy\rangle,$$

где C — верхняя треугольная матрица.

Отметим, что в данном случае ($C \neq C^T$)

$$\nabla\Phi_2(y) = d + (C + C^T)y, \quad \nabla^2\Phi_2(y) = C + C^T.$$

Аналогичным образом реализуется вариант кусочно-линейной параметризации. В этом случае

$$\Phi_2(z) = \sum_{j=0}^{m+1} z_j \int_{T_j} \langle a(t), x(t,0)\rangle \varphi_j(t)dt +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m+1}\sum_{k=0}^{m+1} z_j z_k \int_{t_0}^{T} \langle a(t), x^j(t)\rangle \varphi_k(t)dt = \Phi_{21}(z) + \Phi_{22}(z).$$

Второе слагаемое обработаем следующим образом

$$\Phi_{22}(z) = z_0 \sum_{k=0}^{m+1} z_k \int_{t_0}^{T} \langle a(t), x^0(t)\rangle \varphi_k(t)dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=0}^{m+1} z_j z_k \int_{t_{j-1}}^{T} \langle a(t), x^j(t)\rangle \varphi_k(t)dt.$$

Последний интеграл равен нулю для $k < j - 1$.

Следовательно,

$$\Phi_{22}(z) = z_0 \sum_{k=0}^{m+1} z_k \int_{T_k} \langle a(t), x^0(t)\rangle \varphi_k(t)dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=j-1}^{m+1} z_j z_k \int_{T_k} \langle a(t), x^j(t)\rangle \varphi_k(t)dt.$$

Для итогового представления введем обозначения:

вектор $\hat{d}$ размерности $(m+2)$ с компонентами

$$\hat{d}_j = \int_{T_j} \langle a(t), x(t,0)\rangle \varphi_j(t)dt, \quad j = \overline{0, m+1};$$

матрица $\hat{C}$ порядка $(m+2)$ с элементами

$$\hat{c}_{0k} = \int_{T_k} \langle a(t), x^0(t)\rangle \varphi_k(t)dt, \quad k = \overline{0, m+1};$$

$$\hat{c}_{jk} = \int_{T_k} \langle a(t), x^j(t)\rangle \varphi_k(t)dt, \quad j = \overline{1, m+1}, \quad k \geq j-1;$$

$$\hat{c}_{jk} = 0, \quad j = \overline{2, m+1}, \quad k < j-1.$$

Это верхняя почти треугольная матрица (матрица Хессенберга).

Результирующая формула имеет вид

$$\Phi_2(z) = \langle \hat{d}, z\rangle + \langle z, \hat{C}z\rangle.$$

5. Согласованные задачи и условия оптимальности

Рассмотрим стандартную задачу на экстремум нормы конечного состояния в линейной системе управления

$$\frac{1}{2}\langle x(T), x(T)\rangle \to ext, \quad u(t) \in [u_-, u_+], \quad t \in [t_0, T].$$

Сформулируем соответствующие задачи квадратичного программирования с выпуклой целевой функцией и простейшими ограничениями на переменные.

Первая параметризация:

$$\langle d, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, Xy\rangle \to ext, \quad \langle c, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Cy, Cy\rangle \to ext, \quad y \in [u_-, u_+].$$

Вторая параметризация:

$$\langle \hat{d}, z\rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{X}z, \hat{X}z\rangle \to ext, \quad \langle \hat{c}, z\rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{C}z, \hat{C}z\rangle \to ext, \quad z \in [u_-, u_+].$$

Отметим важный факт: в случае операции на минимум ($ext = min$) свойство выпуклости исходной задачи после параметризации сохраняется. При этом соответствующие квадратичные задачи допускают решение за конечное число итераций [9; 11].

В случае операции на максимум получаем задачи выпуклой максимизации, глобальное решение которых можно проводить, например, с помощью методов из [10; 14].

Представляет интерес терминальная задача со смешанными ограничениями на управление (поточечные и интегральные)

$$\frac{1}{2}\langle x(T), x(T)\rangle \to ext,$$

$$u(t) \in [u_-, u_+], \quad t \in [t_0, T], \quad \int_{t_0}^{T} u^2(t)dt \leq L.$$

После первой параметризации получаем конечномерную задачу следующей структуры

$$\langle d, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Xy, Xy\rangle \to ext, \quad y \in [u_-, u_+], \quad \langle y, y\rangle \leq \frac{1}{h}L.$$

Сформулируем, наконец, задачу оптимизации билинейного функционала

$$\int_{t_0}^{T} \langle a(t), x(t)\rangle u(t)dt \to ext, \quad u(t) \in [u_-, u_+], \quad t \in [t_0, T].$$

Соответствующие задачи квадратичного программирования:

первая параметризация — $\langle d, y\rangle + \langle y, Cy\rangle \to ext, \quad y \in [u_-, u_+]$, C — верхняя треугольная матрица;

вторая параметризация — $\langle \hat{d}, z\rangle + \langle z, \hat{C}z\rangle \to ext, \quad z \in [u_-, u_+]$, $\hat{C}$ — верхняя, почти треугольная матрица.

Установим связь между вариационной и конечномерной задачами на уровне условий оптимальности. Возьмем за основу, например, следующую пару задач

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), x(T)\rangle \to max, \quad u \in [u_-, u_+], \tag{5.1}$$

$$\Phi_1(y) = \Phi_1(0) + \sum_{j=1}^{m} c_j y_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_j)^2 \to max, \ \ y_j \in [u_-, u_+]. \tag{5.2}$$

Здесь коэффициенты $c_j, \ c_{ij}$ определяются по формулам (3.4).

Переход от (5.1) к (5.2) реализован с помощью управления $u(t, y)$. Сформулируем принцип максимума для этого управления в рамках задачи (5.1). Пусть $x(t, y)$ — соответствующая фазовая траектория, $\psi(t, y)$ — решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -A(t)^T\psi, \quad \psi(T) = x(T, y).$$

Поскольку, то $\psi^i(T) = e^i, \ i = \overline{1, n}$, то

$$\psi(T) = \sum_{i=1}^{n} x_i(T, y)\psi^i(T).$$

Следовательно, с учетом формулы (3.3)

$$\psi(t,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i(T,y)\psi^i(t)=\sum_{i=1}^{n}(\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle+\sum_{j=1}^{m}c_{ij}y_j)\psi^i(t).$$

Отметим, что

$$c_{ij}=\int_{t_{j-1}}^{t_j}s_i(t)dt=s_i(t_j)h+o(h). \tag{5.3}$$

Тогда

$$\langle\psi(t,y),b(t)\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle s_i(t)+O(h).$$

В результате принцип максимума для управления $u(t,y)$ в задаче (5.1) представляется в виде

$$u(t,y)=\begin{cases}u_-, & \langle\psi(t,y),b(t)\rangle<0,\\ u_+, & \langle\psi(t,y),b(t)\rangle>0.\end{cases}$$

Рассмотрим это условие в узлах $t_j,\ j=\overline{1,m}$, введем обозначение

$$\delta_j=\sum_{i=1}^{n}\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle s_i(t_j)$$

и предположим, что $\delta_j\neq 0,\ j=\overline{1,m}$.

Тогда $\langle\psi(t_j,y),b(t_j)\rangle=\delta_j+O(h),\ j=\overline{1,m}$. Это значит, что для малых значений $h:sign\ \langle\psi(t_j,y),b(t_j)\rangle=sign\ \delta_j$, и принцип максимума для управления $u(t,y)$ в узлах t_j выражается соотношением

$$u(t_j,y)=\begin{cases}u_-, & \delta_j<0,\\ u_+, & \delta_j>0.\end{cases} \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь дифференциальное условие максимума в задаче (5.2). Выражение для частных производных имеет вид

$$\frac{\partial\Phi_1(y)}{\partial y_j}=c_j+\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}c_{ij}y_j)c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle+\sum_{j=1}^{m}c_{ij}y_j)c_{ij},\quad j=\overline{1,m}.$$

Сформулируем необходимое условие максимума в задаче (5.2),

$$y_j=\begin{cases}u_-, & \frac{\partial\Phi_1(y)}{\partial y_j}<0,\\ u_+, & \frac{\partial\Phi_1(y)}{\partial y_j}>0.\end{cases}$$

Учитывая представление (5.3), получаем

$$\frac{\partial\Phi_1(y)}{\partial y_j}=h\sum_{i=1}^{n}\langle\psi^i(t_0),x(t_0)\rangle s_i(t_j)+o(h)=h\delta_j+o(h).$$

Следовательно, для малых h

$$sign\,\frac{\partial \Phi_1(y)}{\partial y_j} = sign\,\delta_j, \quad j = \overline{1,m},$$

и условие максимума в задаче (5.2) принимает вид

$$y_j = \begin{cases} u_-, & \delta_j < 0, \\ u_+, & \delta_j > 0. \end{cases}$$

Это соотношение совпадает с условием (5.4)

Таким образом, при малых значениях шага параметризации $h > 0$ принцип максимума для управления $u(t,y)$ в узлах t_j в задаче (5.1) совпадает с дифференциальным условием максимума для точки y в задаче (5.2).

6. Заключение

В рамках технологии параметризации управления рассмотрены некоторые задачи оптимизации, связанные с линейной фазовой системой и билинейно-квадратичными функционалами. Аппроксимация допустимых управлений проведена на основе кусочно-линейных функций на равномерной сетке узлов промежутка времени. В результате построены в явном исполнении квадратичные задачи математического программирования с простейшими ограничениями на переменные. Квадратичные формы целевых функций определяются матрицами Грама и Хессенберга. Установлена связь между согласованными задачами на уровне условий оптимальности.

Список литературы

1. Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.
2. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, №6. С. 838–859.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. 632 с.
4. Вержбицкий В. М. Численные методы. М. : Высшая школа, 2001. 382 с.
5. Горбунов В. К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18, №5. С. 1083–1095.

6. Горбунов В. К., Лутошкин И. В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67–84.
7. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М. : Наука, 1982. 432 с.
8. Корсун О. Н., Стуловский А. В. Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 2. С. 75–89. htts://doi.org/10.1134/S0002338819020112
9. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М. : Наука, 1975. 320 с.
10. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск : Наука, 2003. 356 с.
11. Сухарев А. Г., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. М. : Наука, 1986. 328 с.
12. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М. : Наука, 1975. 280 с.
13. Чернов А. В. О применении функций Гаусса для численного решения задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. С. 51–69. htts://doi.org/10.1134/S0005231019060035
14. Enkhbat R. On some theory, methods and algorithms for concave programming // Optimization and Optimal Control. 2003. P. 79–102.
15. Teo K. L., Goh C. J., Wong K. H. A unified computational approach to optimal control problem// Longman Group Limited. 1991.

Владимир Андреевич Срочко, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521276, e-mail: srochko@math.isu.ru

Елена Владимировна Аксенюшкина, кандидат физико-математических наук, доцент, Байкальский государственный университет, Российская Федерация, 664015, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, тел.: (3952)500008,
e-mail: aks.ev@mail.ru

Поступила в редакцию 18.10.19

Parameterization of Some Control Problems by Linear Systems

V. A. Srochko[1], E. V. Aksenyushkina[2]

[1] *Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation*
[2] *Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation*

Abstract. In the framework of control parameterization methods a number of optimization problems of linear phase systems with quadratic and bilinear functionals is considered. Approximation of the control is carried out in the class of piecewise linear functions and is formed as a linear combination of a special set of support functions with coefficients that are variables of the finite-dimensional problem. At the same time the

interval control constraint in the variational problem automatically passes into similar constraints on the variables of the finite-dimensional problem.

To characterize and effectively solve these problems, explicit expressions of the selected functionals are obtained with respect to parameters of approximations. As a result, a series of quadratic mathematical programming problems with the simplest restrictions on variables is formulated. The quadratic forms of the objective functions are determined by the Gram and Hessenberg matrices.

It should be emphasized that the parametrization preserves the convexity property of the original optimal control problem. In addition, the simplest optimal control problem with a linear terminal functional after parameterization is solved without iterations.

The connection between the coordinated problems at the level of optimality conditions is established. It consists in the fact that the differential condition of the extremum in a finite-dimensional problem is locally equivalent to the maximum principle for the variational problem at the points of set.

Keywords: linear control system, quadratic and bilinear functionals, piecewise-linear approximation, finite dimensional problems.

References

1. Arguchintsev A.V., Dykhta V.A., Srochko V.A. Optimal control: nonlocal conditions, computational methods, and the variational maximum principle. *Izvestiya vuzov. Mathematics,* 2009, no.1, pp. 3-43. (in Russian)
2. Balashevich N.V., Gabasov R., Kirillova F.M. Numerical methods of software and positional optimization of linear control systems. *Zhurn. comp. math and math. physics,* 2000, vol. 40, no. 6, pp. 838-859. (in Russian)
3. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods.* Moscow, Laboratory of basic knowledge Publ., 2002, 632 p.(in Russian)
4. Verzhbitsky V.M. *Numerical methods.* Moscow, High school Publ., 2001, 382 p. (in Russian)
5. Gorbunov V.K. The reduction of optimal control problems for finite-dimensional. *Sib. comp. math and math. physics,* 1978, vol. 18, no. 5, pp. 1083-1095. (in Russian)
6. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V. The Development and experience of applying the parameterization method in degenerate problems of dynamical optimization. *Izvestiya RAS. Theory and control systems,* 2004, no. 5, pp. 67-84. (in Russian)
7. Yevtushenko Yu.G. *Methods for solving extreme problems and their application in optimization systems.* Moscow, Science Publ., 1982, 432 p. (in Russian)
8. Korsun O.N., Stulovskaya A.V. Direct method of formation of optimal program control of the aircraft. *Izv. Theory and control systems,* 2019, no. 2, pp. 75-89. htts://doi.org/10.1134/S0002338819020112 (in Russian)
9. Pshenichny B.N., Danilin Yu.M. *Numerical methods in extremal problems.* Moscow, Science Publ., 1975, 320 p.(in Russian)
10. Strekalovsky A.S. *Elements of nonconvex optimization.* Novosibirsk, Nauka Publ., 2003, 356 p.(in Russian)
11. Sukharev A.G., Fedorov V.V. *Course of optimization methods.* Moscow, Science Publ., 1986, 328 p.(in Russian)
12. Tabak D., Kuo B. *Optimal control and mathematical programming.* Moscow, Science Publ., 1975, 280 p.(in Russian)
13. Chernov A.V. On the application of Gauss functions for the numerical solution of optimal control problems. *Automatics and Telemechanics,* 2019, no. 6, pp. 51-69. htts://doi.org/10.1134/S0005231019060035 (in Russian)

14. Enkhbat R. On some theory, methods and algorithms for concave programming. *Optimization and Optimal Control,* 2003, pp. 79-102.
15. Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H. *A unified computational approach to optimal control problem.* Longman Group Limited, 1991.

Vladimir Srochko, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: (3952)521276, e-mail: srochko@math.isu.ru

Elena Aksenyushkina, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Baikal State University, 11, Lenin st., Irkutsk, 664015, Russian Federation, tel.: (3952)500008, e-mail: aks.ev@mail.ru

Received 18.10.19