ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Серия «Математика»
2019. Т. 30. С. 3—15

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.977.1
MSC 49J15, 49K15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.3

Аппарат численно-аналитического моделирования характеристик сигнала в стохастическом информационном канале

Е. Т. Агеева[1], Н. Т. Афанасьев[2], Д. Ким[1], О. И. Медведева[1], С. О. Чудаев[2]

[1] *Братский государственный университет, Братск, Российская Федерация*
[2] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация*

Аннотация. Рассмотрена задача математической теории управления, связанная с управлением сигналом в информационном канале, подверженном пространственно-временным случайным воздействиям. Разработан аппарат численно-аналитического моделирования статистических траекторных характеристик сигнала, распространяющегося в канале между фиксированными корреспондентами. На основе прямого разложения Пуанкаре получены приближенные функциональные соотношения, связывающие совокупность статистических моментов сигнала и модель корреляционной функции, описывающей статистическую неопределенность канала. Для описания временных флуктуаций параметров канала использована гипотеза о переносе замороженной турбулентности. Интегральные выражения для моментов сигнала преобразованы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями Коши. Получена расширенная система дифференциальных уравнений для одновременного расчета невозмущенных траекторий и производных от траекторий по начальным параметрам задачи. Сделан вывод полной системы дифференциальных уравнений для расчета статистических характеристик сигнала. Показана возможность управления характеристиками сигнала в пункте приема путем выбора контролируемых параметров воздействий на канал. Разработанный аппарат расчета статистических моментов сигнала можно использовать для построения инвертора, позволяющего восстановить неизвестные статистические параметры пространственно-временных возмущений канала по известной измеренной совокупности статистических характеристик сигнала в пункте наблюдения.

Ключевые слова: математическая теория управления, динамические системы, стохастические дифференциальные уравнения, информационный канал, флуктуации сигналов.

1. Введение

Одной из актуальных задач математической теории управления является задача управления процессом передачи сигнала в информационном канале с помощью различного типа воздействий. Выявление функциональных связей между характеристиками сигнала и параметрами воздействующих факторов лежит в основе методов управления процессом передачи информации для создания оптимальных условий ее прохождения. В реальных информационных каналах всегда имеются возмущения, причем их параметры часто известны только с определенной долей вероятности. Таким образом, представляет большой интерес задача управления характеристиками сигнала, распространяющегося в канале в условиях неопределенности.

Анализ вероятностных характеристик сигнала, прошедшего через канал, можно выполнить на основе численных методов, задавая отдельную реализацию состояния канала как совокупность воздействий с параметрами, посеянными с помощью датчика случайных чисел. Для каждой реализации состояния канала находятся решения дифференциальных уравнений для характеристик сигнала при фиксированной дистанции между пунктами излучения и приема информации. Набирая ансамбль реализаций характеристик сигнала и проводя усреднение по всем реализациям, можно получить статистические моменты этих характеристик. Однако, этот способ требует значительных затрат компьютерного времени и для высокой точности пристрелки трудно реализуем.

В последнее время в математической теории управления получены значительные результаты благодаря использованию представлений случайных полей [8]. Применение асимптотических разложений в исходных стохастических дифференциальных уравнениях, описывающих процесс распространения сигнала в канале, позволяет сделать вывод приближенных функциональных соотношений между характеристиками сигнала и параметрами воздействующих факторов на канал. Обычно эти соотношения представляют собой сложные математические конструкции, и для их расчета требуется разработка специальных вычислительных схем. Ранее в работах [1–3] нами были предложены быстрые численно-аналитические алгоритмы расчета некоторых статистических траекторных моментов сигнала, распространяющегося в информационном канале связи. Эти алгоритмы позволяют обойти проблему неустойчивости решения стохастической краевой задачи методом имитационного моделирования с использованием схемы Монте-Карло [6]. Сравнение результатов выполненного численно-аналитического моделирования с данными измерений траекторных характеристик радиосигналов в реальных ионосферных каналах связи показало адекватность предложенных оперативных алгоритмов расчета [2].

В настоящей работе для решения задачи управления процессом передачи сигнала в возмущенном информационном канале сделано обобщение ранее предложенного аппарата численно-аналитического расчета отдельных траекторных моментов сигнала. Разработан аппарат расчета совокупности статистических характеристик сигнала в информационных каналах различного назначения при воздействии на канал пространственно-временных случайных возмущений. Рассмотренный аппарат расчета позволяет одновременно получить оперативную информацию о первых и вторых статистических моментах (средних, дисперсиях, функциях взаимной корреляции) ряда траекторных характеристик сигнала при заданных управляемых параметрах воздействий. Имея такую совокупность характеристик, можно получить всестороннее представление об ожидаемой структуре сигнала в возмущенном канале. С другой стороны, при контролируемом искусственном воздействии на канал можно управлять оптимальными условиями прохождения сигнала и улучшить его качество. Последнее имеет важное значение для многих технических приложений. В отличие от ранее предложенного нами аппарата расчета отдельных статистических траекторных характеристик, обобщенный аппарат расчета совокупности статистических моментов сигнала можно использовать для построения инвертора, позволяющего восстановить неизвестные статистические параметры пространственно-временных возмущений на входе динамической системы по известной совокупности статистических характеристик сигнала на выходе в режиме реального времени.

2. Основные теоретические соотношения

Для расчета характеристик сигналов в стохастическом информационном канале будем использовать лучевое приближение [11]. Основные траекторные характеристики сигнала, распространяющегося в канале, определим путем вычислении стохастических криволинейных интегралов по траектории, приходящей в точку наблюдения. В частности, для фазы, групповой задержки и доплеровского смещения частоты сигнала, соответственно, имеем:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\int_S \sqrt{\varepsilon(x,z,\tau)}dS, \tag{2.1}$$

$$t = \int_s \frac{dS}{c\sqrt{\varepsilon(x,z,\tau)}}, \tag{2.2}$$

$$\triangle\omega = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_S \sqrt{\varepsilon(x,z,\tau)}dS, \tag{2.3}$$

где $c\sqrt{\varepsilon}$ — локальная групповая скорость сигнала в канале с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x,z,\tau)$, S — траектория сигнала, τ — время, λ — длина волны.

Для определения флуктуаций траекторных характеристик используем прямое разложение Пуанкаре:

$$S = S_0 + S_1, \tag{2.4}$$

$$t = t_0 + t_1, \tag{2.5}$$

$$\triangle\omega = \triangle\omega_0 + \triangle\omega_1, \tag{2.6}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.4) – (2.8) в (2.1) – (2.3) и проводя асимптотические разложения при условии $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$, имеем:

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^{x_k} \frac{\sqrt{\varepsilon_0(z,x)}}{\sin\beta_0}dx, \tag{2.9}$$

$$t_0 = \int_0^{x_k} \frac{dx}{c\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0}, \tag{2.10}$$

$$\triangle\omega_0 = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{x_k} \frac{\sqrt{\varepsilon_0)}}{\sin\beta_0}dx, \tag{2.11}$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\int_0^{x_k}\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sin^2\beta_0}\beta_1\sin\beta_0 + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sin\beta_0}\frac{z_1}{2\varepsilon_0}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sin\beta_0}\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_0}\right)dx, \tag{2.12}$$

$$t_1 = \frac{1}{c}\int_0^{x_k}\left(\frac{d\beta_0}{dx}\cdot\frac{z_1\cdot 2\sin\beta_0}{\sqrt{\varepsilon_0}} - \frac{1}{2\sin\beta_0}\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_0}}\right)dx, \tag{2.13}$$

$$\triangle\omega_1 = -\frac{\pi}{\lambda}\int_0^{x_k}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau}dx + \frac{\pi}{\lambda}\int_0^{x_k}\frac{\varepsilon_1}{\sin\beta_0}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0^3}}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\tau}dx, \tag{2.14}$$

где $z_0, \beta_0, z_1, \beta_1$ — соответственно, средние и флуктуационные характеристики траектории, приходящей в точку наблюдения; x — независимая переменная вдоль оси канала, x_k — дальность распространения сигнала, ε_0 — диэлектрическая проницаемость невозмущенного канала, ε_1 — случайные возмущения. Важно отметить, что флуктуация траектории $z_1(x)$, входящая в подынтегральные выражения (2.12), (2.13), должна удовлетворять краевым условиям:$z_1(0) = z_1(x_k) = 0$. Для расчета $z_1(x)$, $\beta_1(x)$ использовалась система стохастических дифференциальных уравнений [8]:

$$\frac{dx}{dt} = c\sqrt{\varepsilon}\sin\beta,\ \frac{dz}{dt} = c\sqrt{\varepsilon}\cos\beta,\ \frac{d\beta}{dt} = c\frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial x}\cos\beta - c\frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial z}\sin\beta, \quad (2.15)$$

где dt — элемент времени групповой задержки сигнала. С учетом представления (2.8) и предположения $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$, решение (2.15) было найдено с помощью метода малых возмущений [7]:

$$z = z_0 + z_1,\ x = x_0 + x_1,\ \beta = \beta_0 + \beta_1. \quad (2.16)$$

Подставляя разложения (2.16) в систему (2.15) и проводя линеаризацию, для флуктуаций траекторных характеристик получаем:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{31}z_1 + a_{32}\beta_1 + D_2, \quad (2.17)$$

$$\frac{dz_1}{dt} = a_{11}z_1 + a_{12}\beta_1 + D, \quad (2.18)$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = a_{21}z_1 + a_{22}\beta_1 + D_1. \quad (2.19)$$

$$a_{11} = -a_{22} = c\cos\beta_0\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0},\ a_{12} = -c\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0 = -c\sin\beta_H,$$

$$a_{21} = -c\sin\beta_0\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}\Big),\ a_{31} = c\sin\beta_0\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0},$$

$$a_{32} = c\sqrt{\varepsilon_0}\cos\beta_0,\ D = c\cos\beta_0\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}},$$

$$D_1 = c\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\Big)\cos\beta_0 - c\sin\beta_0\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\Big),\ D_2 = c\sin\beta_0\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}},$$

(здесь β_H начальный угол падения луча в канал и учтен закон преломления: $\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0 = \sin\beta_H$ [11]). Нетрудно заметить, что уравнения (2.18), (2.19) образуют систему, которую можно решать независимо от уравнения (2.17).

Решая (2.18), (2.19) методом Лагранжа [9], имеем:

$$z_1(t) = R_1(t)\int_{t_k}^{t}\frac{R_2(t)B_1}{c\sin\beta_H R_1(t_k)}\,dt - R_2(t)\int_{0}^{t}\frac{R_1(t)B_1}{c\sin\beta_H R_1(t_k)}\,dt, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\beta_1 =&\frac{1}{R_1(t_k)}\left[\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dR_1}{dt}-\frac{a_{11}}{a_{12}}R_1\right)\int_{t_k}^{t}\frac{B_1R_2(t)}{c\sin\beta_H}\,dt-\right.\\ &\left.-\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dR_2}{dt}-\frac{a_{11}}{a_{12}}R_2\right)\int_{0}^{t}\frac{B_1R_1(t)}{c\sin\beta_H}\,dt\right]-\frac{D}{a_{12}},\end{aligned} \tag{2.21}$$

где $B_1 = \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}-\sin\beta_0 cos\beta_0\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_0}\right)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$ — фундаментальные решения системы (2.18), (2.19) при $\varepsilon_1 = 0$.

Следуя [10], в качестве фундаментальных решений возьмем:

$$R_1(t)=\frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t),\ R_2(t_k-t)=\frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t_k-t). \tag{2.22}$$

При этом: $R_1(t=0)=0$, $R_2(t=t_k)=0$. Стохастические интегральные выражения (2.20), (2.21) позволяют рассчитать текущие флуктуации траектории распространения луча вдоль канала, вплоть до точки наблюдения. Подставляя (2.20), (2.21) в формулы (2.12) – (2.14) рассчитаем флуктуации основных траекторных характеристик сигнала в возмущенном информационном канале. Учитывая (2.20), (2.21) и проводя в (2.12) замену переменной: $dt=\frac{dx}{c\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0}$, для флуктуаций фазы имеем:

$$\varphi_1=\pi f\int_0^{t_k}\varepsilon_1 dt. \tag{2.23}$$

где f — рабочая частота сигнала.

Выражение (2.13) для флуктуаций групповой задержки с учетом новой переменной интегрирования имеет вид:

$$t_1=-\int_0^{t_k}\frac{\sin^2\beta_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z}z_1(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^{t_k}\frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon_0(t)}dt. \tag{2.24}$$

Подставляя (2.20) в формулу (2.24), имеем:

$$t_1=G_1+G_2+G_3, \tag{2.25}$$

где

$$G_1=-\frac{c}{2\sin\beta_H R_1(t_k)}\int_0^{t_k}\frac{\sin^2\beta_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z}R_1(t)\cdot\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}R_2(t')dt'\right)dt, \tag{2.26}$$

$$G_2=\frac{c}{2\sin\beta_H R_1(t_k)}\int_0^{t_k}\frac{\sin^2\beta_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z}R_2(t)\cdot\left(\int_{0}^{t}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}R_1(t')dt'\right)dt, \tag{2.27}$$

$$G_3=-\frac{1}{2}\int_0^{t_k}\frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon_0(t)}dt. \tag{2.28}$$

Преобразование интегралов (2.26), (2.27) с учетом краевых условий для флуктуаций траектории дает:

$$G_1 = \int_0^{t_k} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z_0} R_2(t') \left(\int_0^{t'} \frac{c}{2 \sin \beta_H R_1(t_k)} \frac{\sin^2 \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} R_1(t) dt \right) dt', \quad (2.29)$$

$$G_2 = \int_0^{t_k} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z_0} R_1(t') \left(\int_{t'}^{t_k} \frac{c}{2 \sin \beta_H R_1(t_k)} \frac{\sin^2 \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} R_2(t) dt \right) dt'. \quad (2.30)$$

Подставляя (2.28) – (2.30) в (2.25), имеем:

$$\begin{aligned} t_1 = {} & \frac{c}{2 \sin \beta_H R_1(t_k)} \int_0^{t_k} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z_0} R_2(t') \left(\int_0^{t'} \frac{\sin^2 \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} R_1(t) dt \right) dt' + \\ & + \frac{c}{2 \sin \beta_H R_1(t_k)} \int_0^{t_k} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z_0} R_1(t') \left(\int_{t'}^{t_k} \frac{\sin^2 \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} R_2(t) dt \right) dt' - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon_0(t)} dt. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Введём обозначения:

$$F_1(t) = \frac{c}{2 \sin \beta_H R_1(t_k)} R_2(t) P_1(t), \quad (2.32)$$

$$F_2(t) = \frac{c}{2 \sin \beta_H R_1(t_k)} R_1(t) P_2(t), \quad (2.33)$$

$$\begin{gathered} P_1(t) = \int_0^{t} \frac{\sin^2 \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} R_1(t) dt, \ P_2(t) = \int_t^{t_k} \frac{\sin^2 \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} R_2(t) dt, \\ F(t) = F_1(t) + F_2(t). \end{gathered} \quad (2.34)$$

С учетом (2.32) – (2.34), формула (2.31) принимает вид:

$$t_1 = \int_0^{t_k} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z_0}(t) F(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon_0(t)} dt. \quad (2.35)$$

Переходя в (2.14) к новой переменной интегрирования dt и полагая $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \tau} \ll \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau}$, для флуктуаций доплеровского смещения частоты сигнала имеем:

$$\triangle \omega_1 = -\pi f \int_0^{t_k} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau} dt. \quad (2.36)$$

Используя (2.23), (2.35), (2.36), можно построить статистические траекторные моменты сигнала. В частности для дисперсии групповой задержки имеем:

$$\sigma^2_{\triangle t} =< \left(\int_0^{t_k} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}(t_1)F(t_1)dt_1 - \frac{1}{2}\int_0^{t_k} \frac{\varepsilon_1(t_1)}{\varepsilon_0(t_1)}dt_1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^{t_k} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}(t_2)F(t_2)dt_2 - \frac{1}{2}\int_0^{t_k} \frac{\varepsilon_1(t_2)}{\varepsilon_0(t_2)}dt_2\right) >=$$

$$=< \int_0^{t_k}\int_0^{t_k} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}(t_1)\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}(t_2)F(t_1)F(t_2)dt_1dt_2 > -$$
$$- < \frac{1}{2}\int_0^{t_k}\int_0^{t_k} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}(t_1)F(t_1)\frac{\varepsilon_1(t_2)}{\varepsilon_0(t_2)}dt_1dt_2 > -$$
$$- < \frac{1}{2}\int_0^{t_k}\int_0^{t_k} \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}(t_2)F(t_2)\frac{\varepsilon_1(t_1)}{\varepsilon_0(t_1)}dt_1dt_2 > +$$
$$+ < \frac{1}{4}\int_0^{t_k}\int_0^{t_k} \frac{\varepsilon_1(t_1)}{\varepsilon_0(t_1)}\cdot\frac{\varepsilon_1(t_2)}{\varepsilon_0(t_2)}dt_1dt_2 > . \quad (2.37)$$

Соответственно для дисперсии фазы и доплеровского смещения частоты сигнала получаем:

$$\sigma^2_\varphi =< \pi^2 f^2 \int_0^{t_k} \varepsilon_1(z_1(t_1), x_1(t_1))dt_1 \cdot \int_0^{t_k} \varepsilon_2(z_2(t_2), x_2(t_2))dt_2 >, \quad (2.38)$$

$$\sigma^2_\omega =< \pi^2 f^2 \int_0^{t_k} \frac{\partial\varepsilon_1(z_1(t_1), x_1(t_1))}{\partial\tau_1}dt_1 \cdot \int_0^{t_k} \frac{\partial\varepsilon_2(z_2(t_2), x_2(t_2))}{\partial\tau_2}dt_2 >, \quad (2.39)$$

$<>$ — знак усреднения по ансамблю реализаций возмущений канала.

Для полноты анализа состояния информационного канала, подверженного случайным возмущениям, наряду с расчетами дисперсий фазы, групповой задержки и доплеровского смещения частоты сигнала важно оценить дисперсию направления прихода сигнала в точке наблюдения. Вычисляя выражение (2.21) при $t = t_k$, в случае пологих наклонных траекторий в канале имеем:

$$\sigma^2_\beta =< \frac{c}{2R_1(t_k)}\int_0^{t_k} \frac{R_1(t_1)}{\sin\beta_H}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_1}dt_1 \cdot \frac{c}{2R_1(t_k)}\int_0^{t_k} \frac{R_1(t_2)}{\sin\beta_H}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_2}dt_2 > . \quad (2.40)$$

Для расчета (2.37) – (2.40) необходимо задать функцию корреляции возмущений канала

$$N(z_1, x_1, \tau_1, z_2, x_2, \tau_2) =< \varepsilon_1(z_1, x_1, \tau_1)\varepsilon_1(z_1, x_1, \tau_1) > .$$

Формулы (2.37) – (2.40) представляют собой сложные интегралы, поскольку для их расчета требуется информация о невозмущенной траектории луча и знание фундаментального решения $R_1(t)$. Однако эти выражения можно эффективно алгоритмизировать в случае квазиоднородного случайного поля неоднородностей канала, когда $N = N_1 N_0$. Здесь N_0 и N_1 соответственно однородная и неоднородная части корреляционной функции, причем N_1 меняется более медленно по сравнению с изменениями N_0. Движение неоднородностей канала учтем в рамках гипотезы о переносе замороженной турбулентности [8]. Используя в (2.37) – (2.40) суммарно-разностное интегрирование [8] и полагая верхний предел переменной величиной, интегралы (2.37) – (2.40) можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка. Интегралы (2.9), (2.11) путем замены переменной также сводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка. Объединяя дифференциальные уравнения для первых и вторых траекторных моментов с системой невозмущенных уравнений (2.15) (при $\varepsilon_1 = 0$), продифференцированных по свободному параметру β_H, а также с самой системой (2.15) (при $\varepsilon_1 = 0$), получаем полную систему уравнений для одновременного расчета средних значений и дисперсий основных траекторных характеристик сигнала в информационном канале:

$$\frac{dx_0}{dt} = c\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0,\ \frac{dz_0}{dt} = c\sqrt{\varepsilon_0}\cos\beta_0,\ \frac{d\beta_0}{dt} = -\frac{c\sin\beta_0}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0},$$
$$\frac{d(\triangle\omega_0)}{dt} = -\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\tau},\ \frac{d\varphi_0}{dt} = 2\pi f\varepsilon_0,$$
$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{c\cdot\cos\beta_0}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}\cdot R_1 - c\sqrt{\varepsilon_0}\cdot\sin\beta_0\cdot G_1,$$
$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{\sin^2\beta_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}\cdot R_1,\ \frac{dP_2}{dt} = \frac{-\sin^2\beta_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}\cdot R_2, \tag{2.41}$$
$$\frac{dG_1}{dt} = -\frac{c}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{\partial^2\varepsilon_0}{\partial z_0^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0^3}}\Big(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}\Big)^2\right)R_1\sin\beta_0 - \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}\cos\beta_0\cdot G_1,$$

$$\frac{dD_\beta}{dt} = \frac{N_1R_1^2}{a\cdot\sqrt{\varepsilon_0^3}},\ \frac{d\sigma_\omega^2}{dt} = \frac{\omega^2\cdot\nu^2\cdot\sqrt{\pi}\cdot N_1\cdot\sin^2\beta_0}{2a\cdot c\cdot\sqrt{\varepsilon_0}},\ \frac{d\sigma_\varphi^2}{dt} = \frac{\pi^2\sqrt{\pi}f^2aN_1}{c\sqrt{\varepsilon_0}},$$
$$\frac{d\sigma_{\triangle t}^2}{dt} = \frac{a\sqrt{\pi}}{c}\frac{N_1}{\sqrt{\varepsilon_0^3}}\left(\frac{2}{a^2}\sin^2\beta_H[F(t)]^2 + \frac{1}{4\varepsilon_0}\right),$$

где:

$$D_\beta = \frac{2\sigma_\beta^2(R_t(t_k))^2}{\sqrt{\pi}\cdot c},\ R_1 = \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t),\ R_2 = \frac{\partial z_0}{\partial\beta_H}(t_k - t),\ G_1 = \frac{\partial\beta_0}{\partial\beta_H}(t),$$
$$G_2 = \frac{\partial\beta_0}{\partial\beta_H}(t_k - t),\ F(t) = F_1(t) + F_2(t),$$
$$F_1(t) = \frac{cR_2P_1}{2\sin\beta_H R_1(t_k)},\ F_2(t) = \frac{cR_1P_2}{2\sin\beta_H R_1(t_k)},$$

ν, a соответственно, скорость движения и масштаб возмущений канала, $\omega = 2\pi f$

Решение системы (2.41) допускает численное интегрирование с помощью хорошо апробированных численных методов, таких как, например, Рунге – Кутта, Кутта – Мерсона, Адамса и др. [4; 5]. Полученная система (2.41) может быть использована для определения параметров пространственно-временной корреляционной функции, характеризующей возмущения информационного канала, по измеренным статистическим моментам сигнала в точке наблюдения. Система допускает расширение путем включения в нее дифференциальных уравнений для смешанных статистических моментов траекторных характеристик, таких как всевозможные функции взаимной корреляции направления прихода, доплеровского смещения частоты, фазы и групповой задержки сигнала. Такое расширение системы позволяет восстанавливать параметры более сложной модели корреляционной функции возмущений канала.

3. Заключение

Для решения задачи управления процессом передачи сигнала в информационном канале с помощью случайных воздействий, разработан аппарат расчета комплекса статистических моментов основных траекторных характеристик сигнала. Получена полная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для одновременного расчета средних значений и дисперсий фазы, направления прихода, доплеровского смещения частоты и групповой задержки сигнала. В качестве модели возмущений канала использована пространственно-временная корреляционная функция, характеризующая квазиоднородное по пространству и по времени случайное поле неоднородностей. Движение хаотических неоднородностей канала учтено в рамках гипотезы о переносе замороженной турбулентности. Предложенный аппарат численно-аналитического расчета значительно снижает затраты компьютерного времени и позволяет оценивать характеристики сигналов в информационных каналах различного назначения: связных, локационных, навигационных, коммуникационных и др. При контролируемом воздействии на канал предложенный аппарат расчета позволяет управлять статистическими характеристиками сигнала и выявлять оптимальные условия его прохождения в канале. Полученная система дифференциальных уравнений для статистических моментов сигнала является основой для построения инвертора, позволяющего восстановить неизвестные статистические параметры пространственно-временных возмущений информационного канала.

Список литературы

1. Численно-аналитический алгоритм моделирования флуктуаций траекторных характеристик информационного сигнала в канале связи / Е. Т. Агеева, Н. Т. Афанасьев, А. Б. Багинов, Д. Ким, Н. И. Михайлов // Системы. Методы. Технологии. 2012. № 3 (15). С. 61–66.
2. Моделирование девиаций частоты декаметрового радиосигнала на трассе наклонного зондирования ионосферы / Е. Т. Агеева, Н. Т. Афанасьев, Д. Ким, Н. И. Михайлов // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10, № 1. С. 71–74.
3. Численно-аналитическое моделирование угловых и частотных флуктуаций декаметрового радиосигнала при наклонном зондировании ионосферы / Е. Т. Агеева, Н. Т. Афанасьев, Д. Б. Ким, С. О. Чудаев // Успехи современного естествознания. 2018. № 12 (часть 2). С. 327–332.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : БИНОМ : Лаборатория знаний, 2009. 632 с.
5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Санкт-Петербург : Лань, 2011. 672 с.
6. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М. : Физматлит, 1975. 472 с.
7. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М. : Физматлит, 2009. 248 с.
8. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения: теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. М. : Физматлит, 2008. Т. 1. 317 с.
9. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Р. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во ЛКИ, 2010. 472 с.
10. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1970. 332 с.
11. Kravtsov Yu. A., Orlov Yu. I. Geometrical Optics of Inhomogeneous Media. Berlin : Springer-Verlag, 1990. 312 p.

Елена Тимофеевна Агеева, старший преподаватель, кафедра математики и физики, Братский государственный университет, Российская Федерация, 665709, г. Братск, ул. Макаренко, 40 тел.: 8(3953)325380,
e-mail: fizika-brgu@yandex.ru

Николай Тихонович Афанасьев, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра радиофизики, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.:89643502296,
e-mail: spacemaklay@gmail.com

Де Чан Ким, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и физики, Братский государственный университет, Российская Федерация, 665709, г. Братск, ул. Макаренко,40 тел.: 8(3953)325380,
e-mail: fizika-brgu@yandex.ru

Ольга Ивановна Медведева, кандидат технических наук, кафедра математики и физики, Братский государственный университет, Российская Федерация, 665709, г. Братск, ул. Макаренко, 40 тел.: 8(3953)325380,
e-mail: fizika-brgu@yandex.ru

Станислав Олегович Чудаев, магистрант, кафедра радиофизики, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.:89643502296, e-mail: spacemaklay@gmail.com

Поступила в редакцию 13.10.19

The Device for Numerical-Analytical Modeling of Signal Characteristics in a Stochastic Information Channel

E. T. Ageeva[1], N. T. Afanasiev[2], D. Kim[1], O. I. Medvedeva[1], S. O. Chudaev[2]

[1]*Bratsk State University, Bratsk, Russian Federation*
[2]*Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation*

Abstract. The problem of the mathematical control theory associated with the control of a signal in an information channel subjected to spatio-temporal random influences is considered. A device has been developed for numerically-analytical modeling of the statistical trajectory characteristics of a signal propagating in a channel between fixed correspondents. Based on direct Poincare expansion, approximate functional relationships are obtained that relate the aggregate of statistical moments of the signal and the model of the correlation function describing the statistical uncertainty of the channel. To describe the temporal fluctuations of the channel parameters, the hypothesis of the transfer of frozen turbulence is used. The integral expressions for the moments of the signal are converted to a system of ordinary differential equations of the first order with initial Cauchy conditions. An extended system of differential equations is obtained for the simultaneous calculation of unperturbed trajectories and derivatives of trajectories with respect to the initial parameters of the problem. The conclusion is made of a complete system of differential equations for calculating the statistical characteristics of the signal. The possibility of controlling the characteristics of the signal at the receiving point by selecting the controlled parameters of the channel effects is shown. The developed device for calculating the statistical moments of the signal can be used to build an inverter that allows you to restore unknown statistical parameters of the spatio-temporal disturbances of the channel from the known measured set of statistical characteristics of the signal at the observation point.

Keywords: mathematical control theory, dynamical systems, stochastic differential equations, information channel, signal fluctuations.

References

1. Ageeva E.T., Afanasiev N.T., Barinov A.B., Kim D., Mikhailov N.I. Numerical-analytical algorithm of modeling fluctuations of trajectory characteristics of an information signal in the communication channel. *Systems. Methods. Technologies,* 2012, no. 3 (15), pp.61-66. (in Russian)
2. Ageeva E.T., Afanasiev N.T., Kim D., Mikhailov N.I. Modeling of frequency deviations of a decameter radio signal on the track of inclined ionosphere sounding. *Vestnik of Voronezh State Technical University*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 71-74. (in Russian)
3. Ageeva E.T., Afanasiev N.T., Kim D.B., Chudaev S.O. Numerical and analytical modeling of angular and frequency fluctuations of a decameter radio signal during

oblique sounding of the ionosphere. *The advantages in modern science,* 2018, no. 12 (part 2), pp. 327-332. (in Russian)

4. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods.* Moscow, BINOM, Laboratory of knowledge Publ., 2009, 632 p. (in Russian)
5. Demidovich B.P., Maron I.A. *The fundamental of computational mathematics.* Saint-Petersburg, LAN Publ., 2011, 672 p. (in Russian)
6. Ermakov M.S. *Monte Carlo Method and related issues.* Moscow, Fizmatlit Publ., 1975. 472 p. (in Russian)
7. Ilyin A.M., Danilin A.R. *Asymptotic methods in analysis.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p. (in Russian)
8. Klyatskin V.I. *Stochastic equations: theory and its applications to acoustics, hydrodynamics and radio physics.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, vol. 1, 317 p. (in Russian)
9. Coddington E.A., Levinson N.R. *Theory of ordinary differential equations.* Moscow, LCI Publishing house, 2010, 472 p. (in Russian)
10. Pontryagin L.S. *Ordinary differential equations.* Moscow, Nauka Publ., 1970, 332 p. (in Russian)
11. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media.* Berlin, Springer-Verlag Publ., 1990, 312 p.

Elena Ageeva, Senior Lecturer, Department of Mathematics and Physics, Bratsk State University, 40, Makarenko st., Bratsk, 665709, Russian Federation, tel.: 8 (3953) 325380, e-mail: `fizika-brgu@yandex.ru`

Nikolay Afanasyev, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Department of Radiophysics, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664000, Russian Federation tel.: 89643502296, e-mail: `spacemaklay@gmail.com`

De Chan Kim, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Bratsk State University, 40, Makarenko str., Bratsk, 665709, Russian Federation, tel.: 8 (3953) 325380, e-mail: `fizika-brgu@yandex.ru`

Olga Medvedeva, Candidate of Sciences (Technics), Department of Mathematics and Physics, Bratsk State University, 40, Makarenko st., Bratsk, 665709, Russian Federation, tel.: 8 (3953) 325380, e-mail: `fizika-brgu@yandex.ru`

Stanislav Chudaev, Undergraduate, Department of Radiophysics, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664000, Russian Federation, tel.: 89643502296, e-mail: `spacemaklay@gmail.com`)

Received 13.10.19