Серия «Математика»
2019. Т. 29. С. 86—97

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.716
MSC 08A99,03B50
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.86

Тождества в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности

Н. А. Перязев
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация

*Посвящается памяти моего учителя
Али Ивановича Кокорина*

Аннотация. В алгебрах мультиопераций, в отличие от алгебр операций, не выполняется тождество суперассоциативности, а верно только тождество полусуперассоциативности. Для более детального изучения тождеств, выполнимых в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности, в данной работе определяется многообразие к которому эти алгебры принадлежат. В частности среди этих тождеств, определяющих многообразие, вводится тождество аналогичное соотношению Дедекинда для бинарных отношений. Из введенных тождеств получены некоторые следствия, выполнимые в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности.

Отметим, что многообразие определяется в сигнатуре, символы которой интерпретируются метаоперациями суперпозиции, разрешимости по первому аргументу и константными метаоперациями проекции по каждому аргументу и нулевой мультиоперацией. В этой сигнатуре термальными являются метаоперации пересечения, разрешимости по любому аргументу, полная мультиоперация, а также отношение включения мультиопераций.
Представляет также интерес задача изучения квазитождеств, выполняемых в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности.

Ключевые слова: мультиоперация, суперпозиция, алгебра мультиопераций, тождество.

1. Введение

Исследования алгебр n-местных операций и мультиопераций (многозначных частичных операций) на k-элементных множествах проводились с одной стороны при фиксированном k и произвольном n, с другой стороны при произвольном k и фиксированном n.

Первое направление имеет тесные связи с теорией клонов (алгебры операций без фиксации местности) [10]. Отметим работы А. Г. Пинуса, в которых такие алгебры используются для исследования клонов [5–7]. В работах [1;4] алгебры n-местных мультиопераций использовались при изучении суперклонов.

Настоящая работа относится ко второму направлению. В этом направлении первоначально изучались алгебры унарных операций и мультиопераций (в этом случае алгебра операций является моноидом преобразований, а алгебра мультиопераций есть алгебра бинарных отношений [11]). Алгебры n-местных операций, по-видимому, впервые рассмотрел К. Менгер [9]. В таких алгебрах выполняется тождество суперассоциативности (сверхассоциативности). В дальнейшем алгебры обладающие этим свойством часто стали называть алгебрами Менгера. Алгебры n-местных отношений со свойством суперассоциативности изучались В. С. Трохименко (см., например, [8]). Исследование алгебр n-местных мультиопераций начато в работах [2;3]. В таких алгебрах тождество суперассоциативности не выполняется, а верно только тождество полусуперассоциативности (см. ниже). Для более детального изучения тождеств, выполнимых в алгебрах n-местных мультиопераций, определяется многообразие, к которому эти алгебры принадлежат. В частности среди этих тождеств, определяющих многообразие, вводится тождество аналогичное соотношению Дедекинда для бинарных отношений [11].

2. Алгебры мультиопераций размерности n

В этом разделе определяются алгебры мультиопераций размерности n, ранга k с множеством метаопераций: (n+1)-местная метаоперация суперпозиции, унарная метаоперация разрешимости и константные метаоперации пустая и проекции по всем аргументам.

Пусть A — произвольное неодноэлементное конечное множество, а $B(A)$ — множество всех подмножеств A, n — натуральное число, больше 1.

Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A или мультиоперацией размерности n ранга k, где k мощность множества A.

Для множества всех мультиопераций размерности n на A используем обозначение $\mathcal{M}_A^{(n)}$ или $\mathcal{M}_k^{(n)}$ когда A произвольное множество мощности k.

Определим следующие мультиоперации на A размерности n:
пустая

$o^n(a_1, ..., a_n) = \varnothing$;
проекция по i аргументу $i \in \{1, ..., n\}$

$e_i^n(a_1, ..., a_n) = \{a_i\}$.

Определим следующие метаоперации на множестве $\mathcal{M}_A^{(n)}$:
суперпозиция мультиопераций $f, f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_A^{(n)}$

$$(f * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_n) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1,...,a_n)} f(b_1, ..., b_n);$$

разрешимость мультиоперации $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$

$$(\mu f)(a_1, ...a_n) = \{a \mid a_1 \in f(a, a_2, ..., a_n)\}.$$

Определение 1. *Алгеброй $\mathcal{R}$ мультиопераций над множеством A размерности n называется любое подмножество $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$, содержащее мультиоперации пустую и все проекции и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимости.*

3. Многообразие $\mathcal{P}_n$

В этом разделе задается многообразие посредством списка тождеств. Некоторые характеристические свойства этого многообразия будут установлены в разделе 5. Отметим, что, как и в случае алгебр мультиопераций размерности n, рассматриваются многообразия $\mathcal{P}_n$ при натуральном $n \geq 2$.

Тождества многообразия $\mathcal{P}_n$ будем записывать в следующей сигнатуре $\Sigma_n = \langle s, \pi, \perp, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \rangle$, где s и μ являются $(n+1)$-местной и унарной функциональными символами, а остальные нульместными. В этой сигнатуре термально определим следующие символы операций и предикатов:

$\top = s(\pi(\varepsilon_2), \varepsilon_1, ..., \varepsilon_1)$;

$x \wedge y = s(s(\varepsilon_1, \pi(\varepsilon_1), ..., \pi(\varepsilon_n)), x, y, ..., y)$;

$\pi_i(x) = s(\pi(s(x, \varepsilon_i, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, ..., \varepsilon_n)), \varepsilon_i, \varepsilon_2, ...$
$..., \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, ..., \varepsilon_n)$ для $i \in \{1, ..., n\}$;

$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x$.

Определение 2. *Многообразие $\mathcal{P}_n$ задается следующими тождествами:*

1. $x \wedge x = x$;
2. $x \wedge y = y \wedge x$;
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
4. $x \wedge \top = x$;
5. $s(s(x, y_1, ..., y_n), \varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}) = s(x, s(y_1, \varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}), ..., s(y_n, \varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}))$ *для всех* $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\}$;
6. $s(\varepsilon_i, x_1, ..., x_n) = s(\top, x_1, ..., x_1) \wedge ... \wedge s(\top, x_{i-1}, ..., x_{i-1}) \wedge x_i \wedge$ $\wedge s(\top, x_{i+1}, ..., x_{i+1}) \wedge ... \wedge s(\top, x_n, ..., x_n)$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
7. $s(x_0, x_1, ..., x_n) = \bot$ *при* $x_i = \bot$ *хоть для одного* $i \in \{0, ..., n\}$;
8. $\pi(\bot) = \bot$;
9. $\pi_i(\top) = \top$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
10. $\pi_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
11. $\pi_i(\pi_i(x)) = x$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
12. $\pi_i(x \wedge y) = \pi_i(x) \wedge \pi_i(y)$ *для всех* $i \in \{1, ..., n\}$;
13. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_j, \varepsilon_{i+1}, ..., \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n) = \pi_i(\pi_j(\pi_i(x)))$ *для всех* $i, j \in \{1, ..., n\}$ *и* $i \neq j$;

14. $\pi_j(\varepsilon_i) = s(\top, (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i), ..., (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i))$ *для всех* $i, j \in \{1, ..., n\}$ *и* $i \neq j$;

15. $s(s(x, y_1, ..., y_n), z_1, ..., z_n) \leq s(x, s(y_1, z_1, ..., z_n), ..., s(y_n, z_1, ..., z_n))$;

16. $s(x_0, ..., x_{i-1}, x_i \wedge y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \leq s(x_0, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \wedge$ $\wedge s(x_0, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ *всех для* $i \in \{1, ..., n\}$;

17. $\pi_j\Big(s(x_0, x_1, ..., x_n)\Big) \leq$

$$\leq \bigwedge_{i=1}^{n} s\Big(\pi_j(x_i), \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{j-1}, s\big(\pi_i(x_0), \top, ..., \top, \underbrace{\varepsilon_j}_{i}, \top, ..., \top\big), \varepsilon_{j+1}, ..., \varepsilon_n\Big)$$

для всех $j \in \{1, ..., n\}$;

18. $x \wedge s(y, z_1, ..., z_n) \leq s\Big((s(x, s(\pi_1(z_1), \varepsilon_1, \top, ..., \top), ..., s(\pi_n(z_n), \top, ...$ $..., \top, \varepsilon_n)) \wedge y), (s(\pi_1(y), x, \top, ..., \top) \wedge z_1), ..., (s(\pi_n(y), \top, ..., \top, x) \wedge z_n)\Big)$.

Отметим, что в силу введенных символов $\top, \pi_i, \wedge, \leq$ все тождества определены в сигнатуре $\Sigma_n = \langle\, s, \pi, \bot, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \,\rangle$.

4. Алгебры мультиопераций размерности n принадлежат многообразию $\mathcal{P}_n$

В этом разделе доказывается основной результат работы о том, что алгебры мультиопераций размерности n принадлежат многообразию

$\mathcal{P}_n$, определенному в предыдущем разделе. Прежде чем перейти к этому результату приведем некоторые определения и вспомогательное утверждение:

n-местная полная мультиоперация на A:

$u^n(a_1, ..., a_n) = A$, для любых $a_1, ..., a_n \in A$;

бинарная метаоперация пересечения на множестве $\mathcal{M}_A^{(n)}$:

$(f \cap g)(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) \cap g(a_1, ..., a_n)$;

отношение включения $f \subseteq g$ на множестве $\mathcal{M}_A^{(n)}$:

$f \subseteq g \Longleftrightarrow f(a_1, ..., a_n) \subseteq g(a_1, ..., a_n)$, для любых $a_1, ..., a_n \in A$;

унарная метаоперация разрешимости по аргументу $i \in \{1, ..., n\}$ на множестве $\mathcal{M}_A^{(n)}$:

$$(\mu_i f)(a_1, ...a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, ..., , a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n)\}.$$

При этом непосредственно следует, что $(\mu_1 f) = (\mu f)$, а так же:

$$b \in (\mu_i f)(a_1, ..., , a_{i-1}, c, a_{i+1}, ..., a_n) \Longleftrightarrow c \in f(a_1, ..., , a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Достаточно очевидно, что пересечение является коммутативной, ассоциативной и идемпотентной операцией, а включение является частичным порядком, соответствующим этому пересечению, причем o^n выступает в качестве наименьшего элемента, а u^n в качестве наибольшего элемента.

Лемма 1. *Верны следующие равенства:*

1. $u^n = ((\mu e_2^n) * e_1^n, ..., e_1^n)$;

2. $(\mu_i f) = \Big(\big(\mu(f * e_i^n, e_2^n, ..., e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, ..., e_n^n)\big) * e_i^n, e_2^n, ...$

$..., e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, ..., e_n^n\Big)$ *для* $i \in \{1, ..., n\}$;

3. $(f \cap g) = \big((e_1^n * (\mu e_1^n), ..., (\mu e_n^n)) * f, g, ..., g\big)$.

Доказательство. 1. Непосредственно следует из определения операции μ и мультиопераций e_1^n, e_2^n.

2. Для любых $a_1, ..., a_n \in A$ выполняется
$a \in \Big(\big(\mu(f * e_i^n, e_2^n, ..., e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, ..., e_n^n)\big) * e_i^n, e_2^n, ..., e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, ...$
$..., e_n^n\Big)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow a \in \big(\mu(f * e_i^n, e_2^n, ..., e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, ..., e_n^n)\big)(a_i, a_2, ...$
$..., a_{i-1}, a_1, a_{i+1}, ..., a_n) \Longleftrightarrow a_i \in (f * e_i^n, e_2^n, ..., e_{i-1}^n, e_1^n, e_{i+1}^n, ..., e_n^n)(a, a_2, ...$
$..., a_{i-1}, a_1, a_{i+1}, ..., a_n) \Longleftrightarrow a_i \in f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a \in (\mu_i f)(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$.

3. Пусть $a_1, ..., a_n \in A$. Тогда $a \in \big((e_1^n * (\mu e_1^n), ..., (\mu e_n^n)) * f, g, ...$
$..., g\big)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow$ существуют $b_1, ..., b_n \in A$, такие, что $a \in (e_1^n * (\mu e_1^n), ...$
$..., (\mu e_n^n))(b_1, ..., b_n)$ и $b_1 \in f(a_1, ..., a_n), b_i \in g(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow$ существуют

$c_1, ..., c_n \in A$, такие, что $a \in e_1^n(c_1, ..., c_n)$ при этом $c_1 = b_1$ и $c_i \in (\mu e_i^n)(b_1, ..., b_n)$. Получаем, что $a = c_1 = b_1 \in f(a_1, ..., a_n)$ и $(\mu e_i^n)(b_1, ..., b_n) \neq \varnothing$ только в случае $b_1 = b_i$.
Поэтому $a = b_1 = b_i \in g(a_1, ..., a_n)$, значит $\Longleftrightarrow a \in (f \cap g)(a_1, ..., a_n)$. □

Определим интерпретацию $\mathcal{I}$ сигнатуры Σ_n в алгебрах мультиопераций размерности n: s соответствует метаоперация суперпозиции, π — метаоперация разрешимости, ε_i — мультиоперация проекции по i аргументу, $\perp$ — пустая мультиоперация.

Теорема 1. *Любая алгебра мультиопераций размерности n при интерпретации $\mathcal{I}$ принадлежит многообразию $\mathcal{P}_n$.*

Доказательство. Покажем, что при определенной выше интерпретации $\mathcal{I}$ все тождества 1–18 из определения $\mathcal{P}_n$ выполняются в любой алгебре мультиопераций $\mathcal{R} = \langle R; *, \mu, o^n, e_1^n, ..., e_n^n \rangle$, где $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$.

1–4. Тождества для операции пересечения, как было замечено выше, выполняются.

5. $((f * f_1, ..., f_n) * e_{i_1}^n, ..., e_{i_n}^n) = (f * (f_1 * e_{i_1}^n, ..., e_{i_n}^n), ..., (f_n * e_{i_1}^n, ..., e_{i_n}^n))$ для всех $i_1, ..., i_n \in \{1, ..., n\}$.

Для произвольных $a_1, ..., a_n \in A$ выполняется:
$a \in ((f * f_1, ..., f_n) * e_{i_1}^n, ..., e_{i_n}^n)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow a \in (f * f_1, ..., f_n)(a_{i_1}, ..., a_{i_n})$ $\Longleftrightarrow$ существуют $b_1, ..., b_n \in A$, такие, что $a \in f(b_1, ..., b_n)$ и $b_j \in f_j(a_{i_1}, ..., a_{i_n})$, а значит $b_j \in (f_j * e_{i_1}^n, ..., e_{i_n}^n)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow a \in (f * (f_1 * e_{i_1}^n, ..., e_{i_n}^n), ..., (f_n * e_{i_1}^n, ..., e_{i_n}^n))(a_1, ..., a_n).$$

6. $(e_i^n * f_1, ..., f_n) = (u^n * f_1, ..., f_1) \cap ... \cap (u^n * f_{i-1}, ..., f_{i-1}) \cap f_i \cap$ $\cap (u^n * f_{i+1}, ..., f_{i+1}) \cap ... \cap (u^n * f_n, ..., f_n)$ для $i \in \{1, ..., n\}$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольный набор элементов из A.
$a \in (e_i^n * f_1, ..., f_n)(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow$ существуют $b_1, ..., b_n \in A$, такие, что $a \in (e_i^n * b_1, ..., b_n)$ и $b_j \in f_j(a_1, \ldots, a_n)$. А значит $a = b_i$ и для любого c выполняется $c \in (u^n * f_j, ..., f_j)(a_1, \ldots, a_n)$, в частности для $c = a \Longleftrightarrow$

$$a \in \Big((u^n * f_1, ..., f_1) \cap ... \cap (u^n * f_{i-1}, ..., f_{i-1}) \cap f_i \cap (u^n * f_{i+1}, ..., f_{i+1}) \cap ... \\ ... \cap (u^n * f_n, ..., f_n)\Big)(a_1, \ldots, a_n).$$

7. $(f_0 * f_1, ..., f_n) = o^n$ при $f_i = o^n$ хоть для одного $i \in \{0, ..., n\}$.
Непосредственно следует из определения суперпозиции.

8. $(\mu o^n) = o^n$.

9. $(\mu_i u^n) = u^n$.

10. $(\mu_i e_i^n) = e_i^n$.

11. $(\mu_i(\mu_i f)) = f$.

12. $\mu_i(f \cap g) = (\mu_i f) \cap (\mu_i g)$.

13. $(f * e_1^n, ..., e_{i-1}^n, e_j^n, e_{i+1}^n, ..., e_{j-1}^n, e_i^n, e_{j+1}^n, ..., e_n^n) = (\mu_i(\mu_j(\mu_i x)))$ для всех $i, j \in \{1, ..., n\}$ и $i \neq j$.

Равенства 8–13 следуют из свойства

$$a \in (\mu_i f)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow a_i \in f(a_1, ..., a_{i-1}, a, a_{a_i+1}, ..., a_n).$$

14. $(\mu_j e_i^n) = (u^n * (e_j^n \cap e_i^n), ..., (e_j^n \cap e_i^n))$ для $j, i \in \{1, ..., n\}$ и $j \neq i$.
Для произвольных $a_1, ..., a_n \in A$ выполняется:
$a \in (\mu_1 e_i^n)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow a_1 \in e_i^n(a, a_2, ..., a_n) \Longleftrightarrow a_1 = a_i \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a \in (u^n * (e_1^n \cap e_i^n), ..., (e_1^n \cap e_i^n))(a_1, ..., a_n).$

15. Тождество полусуперассоциативности
$((g_0 * g_1, \dots, g_n) * h_1, \dots, h_n) \subseteq (g_0 * (g_1 * h_1, \dots, h_n), \dots, (g_n * h_1, \dots, h_n)).$
Пусть $a_1, \dots, a_n$ — произвольный набор элементов из A. Если

$$b \in ((g_0 * g_1, \dots, g_n) * h_1, \dots, h_n)(a_1, \dots, a_n),$$

то $b \in (g_0 * g_1, \dots, g_n)(c_1, \dots, c_n)$ для некоторых $c_i \in h_i(a_1, \dots, a_n)$, $i = 1, \dots, n$. А значит $b \in g_0(d_1, \dots, d_n)$ для некоторых $d_j \in g_j(c_1, \dots, c_n)$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда получаем, что

$$d_j \in (g_j * h_1, \dots, h_n)(a_1, \dots, a_n), j = 1, \dots, n.$$

Учитывая $b \in g_0(d_1, \dots, d_n)$, в итоге выполняется

$$b \in (g_0 * (g_1 * h_1, \dots, h_n), \dots, (g_n * h_1, \dots, h_n))(a_1, \dots, a_n),$$

что и требовалось.

16. $(f_0 * f_1, ..., f_{i-1}, f_i \cap g_i, f_{i+1}, ..., f_n) \subseteq (f_0 * f_1, ..., f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, ..., f_n) \cap$
$\cap (f_0 * f_1, ..., f_{i-1}, g_i, f_{i+1}, ..., f_n)$ всех для $i \in \{1, ..., n\}$.
Пусть $a_1, ..., a_n$ — произвольный набор элементов из A.
$a \in (f_0 * f_1, ..., f_{i-1}, f_i \cap g_i, f_{i+1}, ..., x_n)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow$ существуют $b_1, ..., b_n \in A$, такие, что $a \in f_0(b_1, ..., b_n)$ и $b_j \in f_j(a_1, ..., a_n), b_i \in (f_i \cap$ $\cap\, g_i)(a_1, ..., a_n)$ при $i \neq j,$ а значит $b_i \in f_i(a_1, ..., a_n) b_i \in g_i(a_1, ..., a_n) \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in (f_0 * f_1, ..., f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, ..., f_n)(a_1, ..., a_n)$ и
$a \in (f_0 * f_1, ..., f_{i-1}, g_i, f_{i+1}, ..., f_n)(a_1, ..., a_n)$ а значит a принадлежит и пересечению.

17. $(\mu_j (f_0 * f_1, ..., f_n)) \subseteq$

$$\subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \Big((\mu_j f_i) * e_1^n, ..., e_{j-1}^n, ((\mu_i f_0) * u^n, ..., u^n, \underbrace{e_j^n}_{i}, u^n, ..., u^n), e_{j+1}^n, ..., e_n^n \Big).$$

Пусть $a_1, ..., a_n$ — произвольный набор элементов из A. $a \in (\mu_j (f_0 * f_1, ...$ $..., f_n))(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow a_j \in (f_0 * f_1, ..., f_n))(a_1, ..., a_{j-1}, a, a_{j+1}, ..., a_n) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ существуют $b_1, ..., b_n \in A$, такие, что $a_j \in f_0(b_1, ..., b_n)$ и
$b_i \in f_i(a_1, ..., a_{j-1}, a, a_{j+1}, ..., a_n)$ для $i \in \{1, .., n\} \Longleftrightarrow b_i \in (\mu_i f_0)(b_1, ...$

$..., b_{i-1}, a_j, b_{i+1}, ..., b_n)$ и $a \in (\mu_j f_i)(a_1, ..., a_{j-1}, b_i, a_{j+1}, ..., a_n)$. Получаем для всех $i \in \{1, .., n\}$ выполняется $a \in \Big((\mu_j f_i) * e_1^n, ..., e_{j-1}^n, \big((\mu_i f_0) * * u^n, ..., u^n, \underbrace{e_j^n}_{i}, u^n, ..., u^n\big), e_{j+1}^n, ..., e_n^n\Big)(a_1, ..., a_n)$, а значит a принадлежит пересечению по всем i.

18. $$f \cap (g * h_1, ..., h_n) \subseteq \Big(((f * ((\mu_1 h_1) * e_1^n, u^n, ..., u^n), ..., ((\mu_n h_n) * *u^n, ..., u^n, e_n^n)) \cap g) * (((\mu_1 g) * f, u^n, ..., u^n) \cap h_1), ..., (((\mu_n g) * u^n, ..., u^n, f) \cap h_n)\Big).$$

Пусть $a_1, ..., a_n$ — произвольный набор элементов из A. Тогда
$a \in (f \cap (g * h_1, ..., h_n))(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow a \in f(a_1, ..., a_n)$ и
$a \in (g * h_1, ..., h_n)(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow$ существуют $b_1, ..., b_n \in A$, такие, что $a \in g(b_1, ..., b_n)$ и $b_i \in h_i(a_1, ..., a_n)$. Отсюда следует $a_i \in (\mu_i h_i)(a_1, ..., a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, ..., a_n) \subseteq ((\mu_i h_i) * (u^n, ..., u^n, \underbrace{e_i^n}_{i}, u^n, ..., u^n)(b_1, ..., b_n)$.

Получаем

$$a \in (f * ((\mu_1 h_1) * e_1^n, u^n, ..., u^n), ..., ((\mu_n h_n) * u^n, ..., u^n, e_n^n))(b_1, ..., b_n),$$

а значит

$$a \in ((f * ((\mu_1 h_1) * e_1^n, u^n, ..., u^n), ..., ((\mu_n h_n) * u^n, ..., u^n, e_n^n)) \cap g)(b_1, ..., b_n) \tag{4.1}$$

С другой стороны получаем

$$b_i \in (\mu_i g)(b_1, ...b_{i-1}, a, b_{i+1}, ..., b_n),$$

а так как $b_i \in u(a_1, ..., a_n)$ и $a \in f(a_1, ..., a_n)$, то получаем

$$b_i \in (((\mu_i g) * u^n, ..., u^n, \underbrace{f}_{i}, u^n, ..., u^n) \cap h_i)(a_1, ..., a_n)$$

$$\text{для всех } i \in \{1, ..., n\} \tag{4.2}$$

Из равенств (4.1) и (4.2) следует

$$a \in \Big(((f * ((\mu_1 h_1) * e_1^n, u^n, ..., u^n), ..., ((\mu_n h_n) * u^n, ..., u^n, e_n^n)) \cap g) * *(((\mu_1 g) * f, u^n, ..., u^n) \cap h_1), ..., (((\mu_n g) * u^n, ..., u^n, f) \cap h_n)\Big)(a_1, ..., a_n).$$

□

5. Некоторые следствия из тождеств многообразия $\mathcal{P}_n$

Приведем ряд утверждений, которые следуют из тождеств 1–18, определяемых многообразие $\mathcal{P}_n$, а значит при выше определенной интерпретации $\mathcal{I}$ сигнатуры Σ_n верны во всех алгебрах мультиопераций размерности n.

Теорема 2. *В любой алгебре класса $\mathcal{P}_n$ выполняются утверждения:*
1. $\perp \leq x$;
2. $\pi_i(\perp) = \perp$ для $i \in \{1, ..., n\}$;
3. $\pi_j(\varepsilon_i) = \pi_i(\varepsilon_j)$ для $j, i \in \{1, ..., n\}$;
4. $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) = x$;
5. $\pi_i(\pi_j(\pi_i(x))) = \pi_j(\pi_i(\pi_j(x)))$ для $j, i \in \{1, ..., n\}$;
6. $x \leq y \Rightarrow \pi_i(x) \leq \pi_i(y)$ для $i \in \{1, ..., n\}$;
7. $s(x_0 \wedge y_0, x_1, ..., x_n) \leq s(x_0, x_1, ..., x_n) \wedge s(y_0, x_1, ..., x_n)$;
8. $x_i \leq y_i$ для всех $i \in \{0, ..., n\} \Rightarrow s(x_0, ..., x_n) \leq s(y_0, ..., y_n)$.

Доказательство. Пункты 1–2 непосредственно следуют из определений $\perp$, π_i и тождеств 7, 8.

Пункт 3 следует из тождеств 2, 14:

$$\pi_j(\varepsilon_i) = s(\top, (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i), ..., (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i)) = s(\top, (\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j), ..., (\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j)) = \pi_i(\varepsilon_j).$$

Пункт 4 следует из тождеств 5, 6, 11, 13: $s(x, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) =$
$= s(s(x, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n), \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n) = \pi_1(\pi_2(\pi_1(\pi_1(\pi_2(\pi_1(x)))))) = x$.

Пункт 5 является непосредственным следствием тождества 13.

Пункт 6 непосредственно следует из определения $\leq$ и тождества 12.

Пункт 7 следует из определения $\wedge$ и тождества 15:

$$\begin{aligned} & s(x_0 \wedge y_0, x_1, ..., x_n) = \\ & \quad = s(s(s(\varepsilon_1, \pi_1(\varepsilon_1), ..., \pi_1(\varepsilon_n)), x_0, y_0, ..., y_0), x_1, ..., x_n) \leq \\ & \quad \leq s(s(\varepsilon_1, \pi_1(\varepsilon_1), ..., \pi_1(\varepsilon_n)), s(x_0, x_1, ..., x_n), s(y_0, x_1, ..., x_n), ... \\ & \quad ..., s(y_0, x_1, ..., x_n)) = s(x_0, x_1, ..., x_n) \wedge s(y_0, x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Пункт 8 несложно следует из определения $\wedge$, тождества 16 и выше доказанного пункта 7. □

6. Заключение

Представляет несомненный интерес также задача изучения квазитождеств, выполняемых в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности. Некоторые из таких квазитождеств получены в пункте 5 как следствия введенной системы тождеств. Более общая задача о свойствах элементарной теории класса алгебр мультиопераций фиксированной размерности еще не изучалась.

Список литературы

1. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Алгебры мультиопераций // Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers. Novosibirsk : NSTU Publ., 2017. P. 102–111.
2. Перязев Н. А. Алгебры n-местных операций и мультиопераций // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» : тез. докл. Тула, 28-31 мая 2018 г. Тула, 2018. С. 113–116.
3. Перязев Н. А. Конечные алгебры мультиопераций // XVI Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» : тез. докл. Тула, 13-18 мая 2019 г. Тула, 2019. С. 51–54.
4. Перязев Н. А. Теория Галуа для конечных алгебр операций и мультиопераций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2019. Т. 28. С. 113–122. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.113
5. Пинус А. Г. Размерности функциональных клонов, метрика на их совокупности // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 366–374. https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.032
6. Пинус А. Г. Фрагменты функциональных клонов как метод исследования последних // Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers. Novosibirsk : NSTU Publ., 2017. P. 118–129.
7. Пинус А. Г. О фрагментах функциональных клонов // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 4. С. 477–485. https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.406
8. Трохименко В. С. О некоторых алгебрах Менгера отношений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1978. № 2. С. 87–95.
9. Menger K. The algebra of functions: past. prresent, future // Rend. Matem., 3–4, 20. 1961. P. 409–430.
10. Poschel R., Kaluzhnin L. A. Function and Relaction Algebras. Berlin, 1979. 259 p.
11. Riguet J. Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois // Bull. Soc. math. Ffance, 1–4, 76. 1948. P. 114–155.

Николай Алексеевич Перязев, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5 тел.:(812)3464487 (e-mail: nikolai.baikal@gmail.com)

Поступила в редакцию 05.08.19

Identities in Fixed Dimension Algebras of Multioperations

N. A. Peryazev

Saint-Petersburg Electrotechnical University "LETI", Saint Petersburg, Russian Federation

Abstract. In algebras of multioperations, unlike algebras of operations, the superassociativity identity does not hold, but only the semi-superassociavity identity is true. For a more detailed study of the identities satisfiable in fixed dimension algebras of multioperations, this work defines the variety to which these algebras belong. In particular, among these identities defining a variety, an identity is introduced that similar to the Dedekind relation for binary relations. From the introduced identities, some consequences are derived that satisfiable in the fixed dimension algebras of multioperations.
Note that the variety is defined in a language whose symbols are interpreted by the superposition metaoperations, the first argument permissibility, and constant projection metaoperations for each argument and the zero multioperation. In this language, the terms are the intersection meta-operations, the permissibility by any argument, the full multioperation, and the inclusion multioperation.
Another interesting task is studying quasiidentities satisfiable in the fixed dimension algebras of multioperations.

Keywords: multioperation, superposition, algebras of multioperations , identity.

References

1. Peryazev N.A.,Sharanchaev I.K. *Algebras of Multioperations*. Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers, Novosibirsk, NSTU Publ., 2017, pp. 102-111. (in Russian).
2. Peryazev N.A. Algebras of n-ary Operations and Multioperations. *XV International Conference «Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems and applications», Tula, Tula State Pedagogical University*, 2018, pp. 113-116. (in Russian).
3. Peryazev N.A. Finite Algebras of Multioperations. *XVI International Conference «Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems, applications and history problems», Tula, Tula State Pedagogical University*, 2019, pp. 51-54. (in Russian).
4. Peryazev N.A. Galois Theory for Finite Algebras of Operations and Multioperations of Rank 2. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 28, pp. 113-122. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.113
5. Pinus A.G. Dimension of functional clons, metric on its collection. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 13, 2016, pp. 366–374 (in Russian). https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.032
6. Pinus A.G. Fragments of the functional clones as method of a research of last. *Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers. Novosibirsk, NSTU Publ.*, 2017, pp. 118-129 (in Russian).
7. Pinus A.G. On fragments of the functional clones. *Algebras and Logic*, 2017, vol. 54, no. 4, pp. 477–485. (in Russian). https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.406
8. Trokhimenko V.S. On certain Menger algebras of relations. *Izvestiya VUZ.* Matematika, 1978, vol. 2, pp. 87–95 (in Russian).
9. Menger K. The algebra of functions: past. prresent, future. *Rend. Matem.*, 1961, vol. 20, 3-4, pp. 409-430.
10. Poschel R, Kaluzhnin L. A. *Function and Relaction Algebras*. Berlin, 1979, 259 p.

11. Riguet J. Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois. *Bull. Soc. math. Ffance*, 1948, 1–4, vol. 76, pp. 114-155.

Nikolay Peryazev, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics). Professor, Saint-Petersburg Electrotechnical University "LETI", 5, Professora Popova st., Saint Petersburg, 197375, Russian Federation,
tel.:(812)3464487 (e-mail: `nikolai.baikal@gmail.com`)

Received 05.08.19