Серия «Математика»
2019. Т. 29. С. 39—51

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.5
MSC 22E05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.39

Нефинитарные обобщения нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле

Ю. В. Беккер, В. М. Левчук, Е. А. Сотникова
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. Пусть $N\Phi(K)$ — нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле над полем или кольцом K, ассоциированной с системой корней Φ классического типа. Для типа A_{n-1} ее ассоциируют с алгеброй $NT(n,K)$ (нижних) нильтреугольных $n \times n$-матриц над K. К нефинитарному обобщению приводит алгебра $R = NT(\Gamma, K)$ всех нильтреугольных Γ-матриц $\alpha = ||a_{ij}||_{i,j\in\Gamma}$ над K с индексами из цепи Γ натуральных чисел. Доказана радикальность кольца R. В случае кольца K без делителей нуля показано, что идеалы $T_{i,i-1}$ всех Γ-матриц с нулями выше i-той строки и в столбцах с номерами $\geq i$ исчерпывают все максимальные коммутативные идеалы кольца R и ассоциированного с ним кольца Ли $R^{(-)}$, а также максимальные нормальные абелевы подгруппы присоединенной группы (она изоморфна обобщенной унитреугольной группе $UT(\Gamma, K)$); доказано также равенство групп автоморфизмов $Aut\ R$ и $Aut\ \ R^{(-)}$. Автоморфизмы частично изучались ранее, в частности, для группы $UT(\Gamma, K)$, когда K — поле.

Найденное в 1990 г. специальное матричное представление алгебр Ли $N\Phi(K)$ позволило построить и обосновать нефинитарные обобщения $NG(K)$ типа $G = B_\Gamma$, C_Γ и D_Γ. Автоморфизмы здесь исследуем переходом к факторам кольца Ли, изоморфным $NT(\Gamma, K)$.

С другой стороны, для любой цепи Γ финитарные нильтреугольные Γ-матрицы образуют финитарную алгебру Ли $FNG(\Gamma, K)$ типа $G = A_\Gamma$ (т. е. $FNT(\Gamma, K)$), B_Γ, C_Γ и D_Γ. Ранее здесь были изучены автоморфизмы кольца Ли $FNT(\Gamma, K)$ над кольцом K без делителей нуля, а также финитарных обобщений унипотентных подгрупп групп Шевалле классических типов над полем, включая скрученные типы (В. М. Левчук и Г.С. Сулейманова, 1987 и 2009 гг.).

Ключевые слова: алгебра Шевалле, нильтреугольная подалгебра, унитреугольная группа, финитарные и нефинитарные обобщения, радикальное кольцо.

1. Введение

Известно, что если в ассоциативном кольце $R = (R, +, \cdot)$ заменить умножение коммутированием $a * b := ab - ba$ $(a, b \in R)$, то получаем *(ассоциированное)* кольцо Ли $R^{(-)} = (R, +, *)$.

В статье исследуются, прежде всего, финитарные и нефинитарные обобщения ассоциативных матричных колец. Наиболее разработана теория финитарных линейных групп и колец (см. § 2).

Максимальные абелевы идеалы и автоморфизмы кольца финитарных нильтреугольных Γ-матриц и ассоциированного с ним кольца Ли (а также $Aut\ UT(\Gamma, K)$) описаны ранее [3], когда Γ — произвольная цепь и K — кольцо без делителей нуля с единицей. Другие свойства см. [6; 7; 11].

Для бесконечной цепи Γ обычное умножение Γ-матриц $\alpha = ||a_{ij}||_{i,j\in\Gamma}$ над K в общем случае (без предположения финитарности) некорректно. В то же время для цепи Γ натуральных чисел умножение определено корректно при условии нильтреугольности Γ-матриц, и мы приходим к нефинитарному кольцу $NT(\Gamma, K)$. Теорема 1 устанавливает его радикальность. Доказанная в § 3 теорема 2 о максимальных коммутативных идеалах применяется к описанию автоморфизмов. См. также [2] и замечание 1, а для групп $UT(\Gamma, K)$ также R. Slovik [12].

Построение нефинитарных обобщений нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов, с использованием специального матричного представления из [1] посвящены §§ 4 и 5. Основной является теорема 4, см. также замечания 2-4.

2. Радикальные кольца специальных матриц

Ассоциативное кольцо $R = (R, +, \cdot)$ относительно присоединенного умножения

$$\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta \quad (\alpha, \beta \in R)$$

всегда образует полугруппу, в которой 0 является единицей. Известна вложимость кольца R в кольцо с единицей e и $\alpha \to e + \alpha$ $(\alpha \in R)$ - изоморфизм полугруппы $(R, \circ)$ на полугруппу $e + R$ по умножению. Группу обратимых элементов полугруппы $(R, \circ)$ называют *присоединенной группой* кольца R. Элемент $\alpha' \in R$, обратный к α в присоединенной группе (его называют *квазиобратным*), определяют условия

$$\alpha + \alpha' + \alpha\alpha' = \alpha' + \alpha + \alpha'\alpha = 0.$$

Кольцо R называют *радикальным* (или радикальным по Джекобсону), если каждый его элемент имеет квазиобратный в R.

Хорошо известный пример радикального кольца получаем, когда R есть нильколцо, т. е. кольцо, в котором каждый элемент нильпотентен. Кольцо $NT(n, K)$ $(n \geq 2)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над произвольным ассоциативным кольцом K с единицей даже нильпотентно ступени нильпотентности n. Его присоединенная группа изоморфна унитреугольной группе $UT(n, K) := e + NT(n, K)$.

Фиксируя кольцо K как и выше, выберем произвольную цепь (линейно упорядоченное множество) Γ с отношением порядка $\leq$. Все Γ-матрицы $\alpha = ||a_{ij}||_{i,j\in\Gamma}$ над K образуют аддитивную группу $M(\Gamma, K)$ с по-координатным сложением. Назовем Γ-матрицу α *финитарной*, если число ее ненулевых элементов конечно. Ясно, что все такие Γ-матрицы с обычными матричными сложением и умножением

$$\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} = \sum_{k\in\Gamma} a_{ik} \cdot b_{kj}, \tag{2.1}$$

образуют даже кольцо $FM(\Gamma, K)$. Γ-матрицы α с условием (нижней) нильтреугольности $a_{ij} = 0$ для всех $i \leq j$ образуют *нильтреугольное подкольцо* $FNT(\Gamma, K)$.

Отметим, что умножение (2.1) всех Γ-матриц в $M(\Gamma, K)$ для бесконечной цепи Γ в общем случае (без предположения финитарности) не является корректным. Действительно, сумма в (2.1) может иметь бесконечное число ненулевых слагаемых и, следовательно, не всегда определена в кольце K.

Если зафиксировать цепь натуральных чисел $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$, то k-я строка любой Γ-матрицы из $NT(\Gamma, K)$ при любом k имеет не более $k-1$ ненулевых элементов. Поэтому формула (2.1) умножения в $NT(\Gamma, K)$, в этом случае остается корректной, и аддитивная группа $NT(\Gamma, K)$ превращается в кольцо.

Основным результатом параграфа является

Теорема 1. *Кольцо $FNT(\Gamma, K)$ финитарных нильтреугольных Γ-матриц над K радикально для любой цепи Γ. Нефинитарное кольцо $NT(\Gamma, K)$ также радикально, когда $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$ — цепь натуральных чисел.*

Доказательство. Пусть вначале Γ — произвольная цепь и выполняется $\alpha \in FNT(\Gamma, K)$. Тогда α лежит в подкольце $NT(\Gamma_1, K)$ для подходящей конечной подцепи Γ_1 в Γ. Выбранное подкольцо изоморфно нильпотентному кольцу $NT(|\Gamma_1|, K)$, так что $FNT(\Gamma, K)$ есть ниль-кольцо. Радикальность такого кольца следует из того, что квазиобратный элемент α' к α здесь всегда существует и задается формулой

$$\alpha' = \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha)^k.$$

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$. В кольце $NT(\Gamma, K)$ для фиксированного номера $k \geq 1$ все Γ- матрицы $||a_{uv}||$ с условием $a_{uv} = 0$ при $u - v < k$ образуют идеал L_k. Кроме того, имеем $L_k L_m \subseteq L_{k+m}$. Получаем убывающий центральный ряд

$$L_1 = NT(\Gamma, K) \supset L_2 \supset \cdots \supset L_k \supset \cdots$$

с нильпотентными факторами L_1/L_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть $\alpha = ||a_{uv}|| \in L_1$. Для нахождения ее квазиобратной Γ-матрицы построим Γ- матрицу $\gamma = ||c_{uv}||$, определяя ее k-ую диагональ $\{c_{uv} \mid u - v = k\}$ для каждого $k = 1, 2, \cdots$. При $u - v = 1$ полагаем $c_{uv} = -a_{uv}$. Если $k \geq 1$, то первые k диагоналей матрицы γ однозначно определяются условием

$$\gamma = \sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m = -\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \cdots + (-\alpha)^k \mod L_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

Такой выбор диагоналей при возрастании k не изменяет диагонали с меньшими номерами. Указанный алгоритм построения дает Γ- матрицу $\gamma = ||c_{uv}|| \in L_1$, которая является квазиобратной к α по модулю L_k для каждого номера k. Построенная Γ-матрица является квазиобратной α' к α, поскольку

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} L_k = 0.$$

Таким образом, радикальность кольца $NT(\Gamma, K)$ доказана. □

3. Максимальные коммутативные идеалы

Максимальные коммутативные идеалы и автоморфизмы кольца $FNT(\Gamma, K)$ и ассоциированного с ним кольца Ли $R^{(-)}(FNT(\Gamma, K))$ (а также присоединенной группы) описаны ранее [3], когда Γ — произвольная цепь и K — кольцо без делителей нуля.

Исследуем аналогично $NT(\Gamma, K)$ при $\Gamma = \{1, 2, 3, \cdots\}$. В выбранной цепи нет одного из крайних элементов (последнего) и для этого случая, согласно [3], максимальные коммутативные идеалы кольца Ли $R^{(-)}(FNT(\Gamma, K))$ исчерпываются стандартными. В сущности, это описание удается распространить на нефинитарное кольцо $NT(\Gamma, K)$. Выделим его идеалы

$$T_{ij} = \langle \alpha = ||a_{uv}|| \in NT(\Gamma, K) \mid a_{uv} = 0, \text{ если } u < i \text{ или } v > j \rangle (i, j \in \Gamma),$$

$$T_{i,\infty} = \langle\ \alpha = ||a_{uv}|| \in NT(\Gamma, K) \mid a_{uv} = 0, \text{ если } u < i\ \rangle \quad (i \in \Gamma)$$

и их пересечения FT_{ij} и $FT_{i,\infty}$ с подкольцом $FNT(\Gamma, K)$.

Теорема 2. *Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Тогда идеалы T_{i+1i}, $i = 1, 2, 3, \ldots$, исчерпывают максимальные коммутативные идеалы кольца $R = NT(\Gamma, K)$ и ассоциированного кольца Ли $R^{(-)}$, а также максимальные коммутативные нормальные подгруппы присоединенной группы.*

Доказательство. Отметим, что для любого кольца Ли L подмножество $\{c \in L \mid c * L = 0\}$ называется центром [9, Sec. 1.3]; это также центр ассоциативного кольца R, если $L = R^{(-)}$. Аналогично, централизаторы подмножества A в кольце R и в кольце Ли $R^{(-)}$ совпадают с $C(A) = \{\gamma \in R \mid \gamma * A = 0\}$. Когда $L * L = 0$, кольцо Ли называют абелевым или коммутативным. Верхний центральный ряд см. [9, Ex. 1.14] и [11] .

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $R = NT(\Gamma, K)$, $\alpha \in R$ и $A = Id(\alpha)$ — идеал кольца R, порожденный α. Если Γ-матрица α имеет ненулевые столбцы с какими угодно большими номерами, то централизатор $C(A)$ идеала A в кольце R нулевой.*

Доказательство. Базис алгебры $FNT(\Gamma, K)$ составляют матричные единицы e_{ij}, $i > j$ (с единицей на месте (i, j) и нулем на остальных местах). Они умножаются по правилу

$$e_{ij}e_{st} = 0 \quad (j \neq s), \quad e_{ij}e_{jt} = e_{it} \quad (i, j, s, t \in \Gamma). \tag{3.1}$$

Ясно, что Γ-матрица финитарна тогда и только тогда, когда она аддитивно порождается конечным множеством элементарных Γ-матриц xe_{ij}. Допустим, Γ-матрица $\alpha = ||a_{uv}|| \in R$ имеет ненулевой m-й столбец для фиксированного m. Соотношения

$$\alpha(Ke_{ms}) = K \sum_{v>m} a_{vm}e_{vs} \subseteq T_{m+1,s} \ (m > s),$$

$$(Ke_{mt})\alpha = K \sum_{1 \leq u < t} a_{tu}e_{mu} \subseteq T_{m,t-1} \ (t < m)$$

позволяют найти Γ-матрицу в идеале $A = Id(\alpha)$, в которой только m-й столбец ненулевой, скажем a_{im} для подходящего номера $i > m$. С помощью второго соотношения находим включение $Id(\alpha) \supset Je_{i+1,m-1}$ с ненулевым идеалом $J \supseteq Ka_{im}$. Отсюда вытекают включения

$$A \supseteq J \cdot (FT_{i+1,m-1}), \quad C(A) \subseteq C(J \cdot (FT_{i+1,m-1})) = T_{m+1,\infty}.$$

Неограниченность в лемме номеров ненулевых столбцов в α также дает

$$C(A) \subseteq \bigcap_{k=m+1}^{\infty} T_{k,\infty} = 0$$

и поэтому $C(A) = 0$. □

Исследуем произвольный максимальный коммутативный идеал M кольца Ли $R^{(-)}$; для него $C(M) = M$. Отметим, что матричные единицы в кольце Ли $R^{(-)}$ умножаются по правилу:

$$e_{ut} * e_{ts} = e_{us} = -e_{ts} * e_{ut} \ \ (u > t > s), \quad e_{uv} * e_{ts} = 0 \ \ (v \neq t, \ s \neq u).$$

В силу предыдущей леммы, номера ненулевых столбцов Γ-матриц из M ограничены в совокупности некоторым числом $m \geq 1$ и $M \subseteq T_{2m}$. Кроме того, можем считать, что $M \supseteq J \cdot (FT_{i,m})$ для подходящего ненулевого идеала J и номера $i \geq 1$. Тогда

$$(J \cdot (FT_{i,m})) * M = (J \cdot (FT_{i,m}))M = 0.$$

Поэтому строки с номерами $\leq m$ во всех Γ-матрицах из M нулевые, т. е. $M \subseteq T_{m+1,m}$. Учитывая коммутативность идеала $T_{m+1,m}$, получаем равенство $M = T_{m+1,m}$. Таким образом, максимальные коммутативные идеалы в кольцах R и $R^{(-)}$ при $R = NT(\Gamma, K)$ исчерпываются идеалами $T_{m+1,m}, \ m = 1, 2, 3 \ldots$.

Отметим, что фактор-кольцо $NT(\Gamma, K)/T_{n+1,\infty}$ изоморфно кольцу $R = NT(n, K)$. В силу [3], нормальные подгруппы его присоединенной группы — это, в точности, идеалы ассоциированного кольца Ли $R^{(-)}$. Утверждение о максимальных коммутативных нормальных подгруппах присоединенной группы сейчас легко получаем по теореме 2 из [3].

Тем самым, доказательство теоремы 2 завершено. □

Из теоремы 2 следует, что произвольный автоморфизм ψ кольца $R = NT(\Gamma, K)$ или кольца Ли $R^{(-)}$ индуцирует подстановку на множестве идеалов T_{j+1j}. Учитывая, что только для T_{21} существует идеал $T_{j+1j} = T_{32}$ с условием $T_{21} * T_{j+1j} = 0 \mod L_3$, получаем $\varphi(T_{21}) = T_{21}$. Продолжая аналогично, получаем φ-инвариантность, а в силу произвола в выборе φ, и характеристичность идеалов T_{j+1j} и, как следствие, идеалов

$$T_{ij} = T_{j+1j} \cap T_{ii-1}, \ i > j.$$

Следствие 1. *Все идеалы $T_{ij}, \ i > j$ в кольцах R и $R^{(-)}$ характеристичны.*

Замечание 1. Пусть K — кольцо без делителей нуля. В силу предыдущего следствия получаем, по аналогии с [4], что группа автоморфизмов $Aut\ R$ кольца $R = NT(\Gamma, K)$ совпадает с группой автоморфизмов $Aut\ R^{(-)}$ и с группой автоморфизмов присоединенной группы. Когда K — поле, автоморфизмы присоединенной группы, как верхней унитреугольной группы $UT(\infty, K)$, изучала R. Slovik [12].

4. Обобщения нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ классических типов

Алгебру Шевалле над полем K характеризуют системой корней Φ и базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ и подходящей базы подалгебры Картана, [8, § 4.4]. Подалгебру с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем *нильтреугольной* и обозначаем через $N\Phi(K)$. Присоединенной группой на ней в [1] представлена унипотентная подгруппа $U\Phi(K)$ группы Шевалле типа Φ над K, порождаемая корневыми автоморфизмами $x_r(t)$ $(r \in \Phi^+,\ t \in K)$.

По теореме Шевалле о базисе [8], при всех $r, s \in \Phi^+$ имеем

$$e_r * e_s = N_{r,s} e_{r+s} = -e_s * e_r \quad (r+s \in \Phi), \qquad e_r * e_s = 0 \quad (r+s \notin \Phi),$$

где структурные константы $N_{r,s} = \pm 1, \pm 2$ или (для типа G_2) ± 3.

Алгебра Ли $N\Phi(K)$ классического типа представлена в [1] алгеброй с базой из «матричных единиц» e_{iv} с ограничениями на индексы

$$1 \le v < i \le n,\ -i < v < i \le n,\ -i \le v < i \le n,\ \ v \ne 0,\ 1 \le |v| < i \le n,$$

соответственно типам A_{n-1}, B_n, C_n и D_n. После соответствующей перенумерации корней $r = r_{iv}$ получаем $e_r = e_{iv}$, причем $e_{ij} * e_{uv} = 0$ при $i \ne v,\ j \ne u,\ j \ne -v$. В силу [1, Лемма 1.1], верна

Лемма 2. *Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать так, что $e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}$ и, кроме того,*

$$\Phi = B_n, D_n: \quad e_{jv} * e_{i,-v} = e_{i,-j} \quad (i > j > |\, v\, | > 0);$$

$$\Phi = C_n:\ e_{jm} * e_{i,-m} = e_{im} * e_{j,-m} = e_{i,-j} \quad (i > j > m \ge 1);$$

$$\Phi = B_n:\ e_{i0} * e_{j0} = 2e_{i,-j}, \quad \Phi = C_n:\ e_{ij} * e_{i,-j} = 2e_{i,-i} \quad (i > j \ge 1).$$

Каждый элемент $\alpha \in N\Phi(K)$ представляем суммой $\alpha = \sum a_{iv} e_{iv}$, а также Φ^+-матрицей $||a_{iv}||$ соответствующего типа. Так, B_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_{10} & & & \\ & & a_{2,-1} & a_{20} & a_{21} & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n,-n+1} & \dots & a_{n,-1} & a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{n,n-1}. \end{array}$$

Прямыми вычислениями находим

$$\gamma = \|c_{ij}\| = \alpha * \beta = \Big(\sum_{(u,v)} a_{uv} e_{uv}\Big) * \Big(\sum_{(j,k)} b_{jk} e_{jk}\Big) = \sum_{(u,v)} \sum_{(j,k)} a_{uv} b_{jk} (e_{uv} * e_{jk}) =$$

$$= \sum_{(k<j<u)} a_{uj} b_{jk} e_{uk} - \sum_{(v,j,k)} a_{kv} b_{jk} e_{jv} + \sum_{(u,j,k)} a_{u,-k} b_{jk} (e_{u,-k} * e_{jk}). \quad (4.1)$$

Укажем формулы умножения Φ^+-матриц $\alpha = ||a_{iv}||$ и $\beta = ||b_{iv}||$ в $N\Phi(K)$ отдельно для каждого типа. С учетом (4.1) получаем следующие формулы умножения B_n^+-матриц

$$c_{uk} = \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(a_{uj}b_{jk} - b_{uj}a_{jk}\Big), \quad 0 \le k < u, \tag{4.2}$$

и, при $k > 0$,

$$c_{u,-k} = 2\Big(a_{u0}b_{k0} - b_{u0}a_{k0}\Big) + \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(b_{j,-k}a_{uj} - a_{j,-k}b_{uj}\Big) + \\ + \sum_{j>0} \Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big). \tag{4.3}$$

Лемма 3. *Формулы* (4.2) *и* (4.3) *определяют лиево произведение* $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{ij}\|$ *любых двух* B_n*-матриц* $\alpha = \|a_{ij}\|$ *и* $\beta = \|b_{ij}\|$.

Отбрасывая в B_n^+-матрице нулевой столбец, получаем D_n^+-матрицу. При $k > 0$ находим элемент c_{uk} произведения двух D_n^+-матриц по формуле (4.2) и, кроме того,

$$c_{u,-k} = \sum_{j=k+1}^{u-1} \Big(b_{j,-k}a_{uj} - a_{j,-k}b_{uj}\Big) + \sum_{j>0} \Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big). \tag{4.4}$$

Лемма 4. *Лиево произведение* $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{ij}\|$ *любых двух* D_n*-матриц* $\alpha = \|a_{ij}\|$ *и* $\beta = \|b_{ij}\|$ *определяют формулы* (4.2) *и* (4.4).

Далее выписываем произвольную C_n^+-матрицу $\alpha = \|a_{uv}\|$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{1,-1} & & & \\
 & & a_{2,-2} & a_{2,-1} & a_{21} & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
a_{n,-n} & \cdots & a_{n,-2} & a_{n,-1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1}.
\end{array}$$

С помощью формулы (4.1) аналогично получаем:

$$c_{uk} = \sum_{j=k}^{u-1} \Big(a_{uj}b_{jk} - b_{uj}a_{jk}\Big) + \sum_{j>0} \Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big), k \ge 1; \tag{4.5}$$

$$c_{u,-k} = \sum_{j=k}^{u-1} \Big(b_{j,-k}a_{uj} - a_{j,-k}b_{uj}\Big) + \\ + \sum_{j>0} \Big(a_{kj}b_{u,-j} - b_{kj}a_{u,-j}\Big) + \sum_{j<0} \Big(a_{u,-j}b_{kj} - b_{u,-j}a_{kj}\Big); \tag{4.6}$$

$$c_{u,-u} = 2\sum_{j=1}^{u-1}\Big(a_{uj}b_{u,-j} - b_{u,-j}a_{uj}\Big). \tag{4.7}$$

Лемма 5. *Формулы* (4.5), (4.6) *и* (4.7) *определяют лиево произведение* $\alpha * \beta = \gamma = \|c_{ij}\|$ *любых двух* C_n*-матриц* $\alpha = \|a_{ij}\|$ *и* $\beta = \|b_{ij}\|$.

По аналогии с финитарным кольцом Ли $FNT(\Gamma, K)$ с произвольной цепью Γ (тип A_Γ), построим обобщенные финитарные кольца Ли $FNB_\Gamma(K)$, $FNC_\Gamma(K)$ и $FND_\Gamma(K)$. Напомним, что биективное соответствие $' \ : \ \Gamma \to \Gamma'$ называют изометрией, если оно сохраняет отношение порядка (т.е из $i \leq j$ следует $i' \leq j'$), и называют антиизометрией, если отношение порядка меняется на противоположное.

Зафиксируем цепь Γ с антиизометрией $'$ такой, что $i' \leq j$ для всех $i, j \in \Gamma$, и положим $\widetilde{\Gamma} = \Gamma' \cup \Gamma$. Тогда при $\Gamma' \cap \Gamma \neq \emptyset$ пересечение содержит единственный элемент. Обозначим его через 0, а через $FNB_\Gamma(K)$ – K-модуль с базисом

$$\{e_{im} \mid i \in \Gamma, m \in \widetilde{\Gamma}, i' < m < i\}. \tag{4.8}$$

При $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$ через $FND_\Gamma(K)$ обозначаем K-модуль с такой же записью базиса, а K-модуль с базисом $\{e_{im} \mid i \in \Gamma, m \in \widetilde{\Gamma}, i' \leq m < i\}$ — через $FNC_\Gamma(K)$.

Указанный выбор модулей реализуется, например, когда Γ выбирается как подцепь цепи целых неотрицательных чисел с антиизометрией $i' = -i$.

Построенные K-модули превращаем в финитарные лиевы алгебры, определяя произведения базисных элементов в них, с учетом леммы 2, по правилу [5]:

$$e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}; \quad e_{ij} * e_{kt} = 0, \ j \neq k, \ i \neq t, \ t \neq j';$$

$$e_{i0} * e_{j0} = 2e_{ij'} \ (G = B_\Gamma); \ e_{ij} * e_{ij'} = 2e_{ii'} \ (G = C_\Gamma), \ i > j \in \Gamma;$$

$$e_{im} * e_{jm'} = e_{ij'}, \ j' < m < j < i, j \neq 0, \quad e_{im} * e_{im'} = 0 \ (G = B_\Gamma, \ D_\Gamma);$$

$$e_{jk} * e_{ik'} = e_{ik} * e_{jk'} = e_{ij'}, \ i > j > k \in \Gamma \ (G = C_\Gamma).$$

Сейчас замечаем, что полученные в леммах 3, 4 и 5 формулы умножения Φ^+-матриц корректно обобщаются на G-матрицы $\alpha = \|a_{im}\|$ типа $G = B_\Gamma, C_\Gamma$ и D_Γ. Таким образом, приходим к финитарным кольцам Ли $FNB_\Gamma(K)$, $FNC_\Gamma(K)$ и $FND_\Gamma(K)$.

Теорема 3. *Формулы умножения обобщенных матриц в кольцах Ли* $FNB_\Gamma(K)$, $FND_\Gamma(K)$ *и* $FNC_\Gamma(K)$ *определяются для произвольной цепи* Γ *корректно формулами из лемм 3, 4 и 5 соответственно.*

Финитарные обобщения унипотентных подгрупп групп Шевалле классических типов (по аналогии с обобщениями унитреугольных групп) представляются в [5] как присоединенные группы финитарных алгебр $FNG(K)$ типа $G = B_\Gamma$, D_Γ и C_Γ. Там же выписаны основные соотношения в терминах элементарных элементов и найдены автоморфизмы.

5. Нефинитарные обобщения нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле

Нефинитарную алгебру $NG(\Gamma, K)$ строим на множестве всех G-матриц типа $G = B_\Gamma$, C_Γ и D_Γ, считая Γ цепью неотрицательных целых чисел для типа B_Γ и $\Gamma = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ для типов C_Γ и D_Γ, причем всюду $i' = -i$. Базу ее финитарной части $FNG(\Gamma, K)$ составляют $\{e_{iv} \mid i \in \Gamma, v \in \widetilde{\Gamma}, i' \leq v < i\}$ для типа C_Γ и матричные единицы e_{iv} из (4.8) для типов B_Γ и D_Γ. Получаем K-модуль с естественными линейными операциями, элементы которого представляем (бесконечной) суммой $\alpha = \sum a_{iv} e_{iv}$ или G-матрицей $\|a_{iv}\|$ соответствующего типа.

В каждой строке любая G-матрица здесь имеет лишь конечное число ненулевых элементов. Поэтому формулы умножения в леммах 3 – 5 остаются корректными. Аналогично типу A_Γ (то есть $NT(\Gamma, K)$) определяем стандартный центральный ряд, составляя его m-й член L_m из G-матриц, диагонали которых с номерами $< m$ — нулевые. Справедливость тождества Якоби следует сейчас из того, что оно справедливо по модулю L_m для каждого $m = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, нефинитарный K-модуль $NG(\Gamma, K)$ превращается в алгебру Ли. Тем самым, доказана

Теорема 4. *K-модуль $NG(\Gamma, K)$ типа $G = B_\Gamma$ (аналогично, типа $G = D_\Gamma$ или C_Γ) превращается в алгебру Ли, если произведение $\alpha * \beta$ определить по формулам* (4.2) *и* (4.3) *(соответственно,* (4.2) *и* (4.4) *или* (4.5) – (4.7)*).*

Замечание 2. Группа Шевалле, ассоциированная с Φ и ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, зависит от выбора решетки весов представления; так выделяют универсальную и присоединенную группы Шевалле. В то же время, ее унипотентная подгруппа $U\Phi(K)$ и нильтреугольная подалгебра $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле определяются выбором Φ и K однозначно, с точностью до изоморфизмов.

Замечание 3. Наряду с подалгеброй $N\Phi(K)$ выделяют верхнюю нильтреугольную подалгебру с базой $\{e_r \ (r \in \Phi^-)\}$, для которой также корректно определена нефинитарная алгебра Ли $NG'(\Gamma, K)$. Поскольку умножение Γ-матриц из $NG(\Gamma, K)$ и $NG'(\Gamma, K)$ в общем случае не определено, то нефинитарное обобщение всей алгебры Шевалле, содержащее построенные алгебры, не существует. См. также некоторые конструкции и приложения [7, § 19].

Замечание 4. В [10] построены обертывающие алгебры R к нильтреугольным алгебрам $N\Phi(K)$, которые для типа $\neq A_n$ являются неассоциативными. Схема доказательства теоремы 4 переносится для нефинитарных обобщений обертывающих алгебр R классических типов.

6. Заключение

С использованием специального матричного представления нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классического типа над полем K и цепи Γ неотрицательных целых чисел построены их нефинитарные обобщения $NG(K)$ типа $G = A_\Gamma$ B_Γ, C_Γ и D_Γ.

Когда K есть кольцо без делителей нуля, выписаны все максимальные коммутативные идеалы кольца Ли $NA_\Gamma(K)$, а также максимальные нормальные абелевы подгруппы присоединенной группы; с их помощью исследуются автоморфизмы.

Список литературы

1. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338. DOI: 10.1007/BF01979936.
2. Нильтреугольные подалгебры алгебры Шевалле / В. М. Левчук, А. В. Литаврин, Н. Д. Ходюня, В. В. Цыганков // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, вып. 2. С. 37–46.
3. Левчук В. М. Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 5. С. 631–641. https://doi.org/10.1007/BF01137426.
4. Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов // Сибирский математический журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 543–557. https://doi.org/10.1007/BF00969552.
5. Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 15, № 2. С. 1–10. https://doi.org/10.1134/S0081543809070128.
6. Мерзляков Ю. И. Эквиподгруппы унитреугольных групп: критерий самонормализуемости // Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 6. С. 732–735.
7. Холубовски В. Алгебраические свойства групп бесконечных матриц. Gliwice, Wydawnictwo Politechniki Slaska, 2017. 140 p.
8. Carter R. Simple Groups of Lie type. New York : Wiley and Sons, 1972.
9. Jacobson N. Lie Algebras. New York : Int. Publ., 1962.
10. Levchuk V. M. Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: enveloping algebra, ideals and automorphisms // Dokl. Math. 2018. Vol. 478, N 1. P. 23–27.

11. Levchuk V. M., Radchenko O. V. Derivations of the locally nilpotent matrix rings // Journal of Algebra and Its Applications. 2010. Vol. 9, N 5, P. 717–724.
12. Slovik R. Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators // Linear and Multilinear Algebra. 2013. Vol. 61.8. P. 1028–1040.

Юлианна Владимировна Беккер, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, корп. 3, тел.: (8)3912062148 (e-mail: angel220@bk.ru)

Владимир Михайлович Левчук, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и математической логики, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, корп. 3, тел.: (8)3912062148
(e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru)

Елена Андреевна Сотникова, магистрант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, корп. 3, тел.: (8)3912062148 (e-mail: olgarv520@yandex.ru)

Поступила в редакцию 10.05.19

Non-finitary Generalizations of Nil-triangular Subalgebras of Chevalley Algebras

J. V. Bekker, V. M. Levchuk, E. A. Sotnikova

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. Let $N\Phi(K)$ be a niltriangular subalgebra of Chevalley algebra over a field or ring K associated with root system Φ of classical type. For type A_{n-1} it is associated to algebra $NT(n,K)$ of (lower) nil-triangular $n \times n$- matrices over K. The algebra $R = NT(\Gamma, K)$ of all nil-triangular Γ-matrices $\alpha = ||a_{ij}||_{i,j\in\Gamma}$ over K with indices from chain Γ of natural numbers gives its non-finitary generalization. It is proved, (together with radicalness of ring R) that if K is a ring without zero divizors, then ideals $T_{i,i-1}$ of all Γ-matrices with zeros above i-th row and in columns with numbers $\geq i$ exhausts all maximal commutative ideals of the ring R and associated Lie rings $R^{(-)}$, and also maximal normal subgroups of adjoint group (it is isomorphic to the generalize unitriangular group $UT(\Gamma, K)$). As corollary we obtain that the automorphism groups $Aut\ R$ and $Aut\ R^{(-)}$ coincide. Partially automorphisms studied earlier, in particulary, for $Aut\ UT(\Gamma, K)$ when K is a field.

Well-known (1990) special matrix representation of Lie algebras $N\Phi(K)$ allows to construct non-finitary generalizations $NG(K)$ of type $G = B_\Gamma, C_\Gamma$ and D_Γ. Be research automorphisms by transfer to factors of Lie ring $NG(K)$ which is isomorphic to $NT(\Gamma, K)$.

On the other hand, for any chain Γ finitary nil-triangular Γ-matrices forms finitary Lie algebra $FNG(\Gamma, K)$ of type $G = A_\Gamma$ (i.e., $FNG(\Gamma, K)$), B_Γ, C_Γ and D_Γ. Earlier automorphisms was studied (V. M. Levchuk and G. S. Sulejmanova, 1987 and 2009) for Lie ring $FNT(\Gamma, K)$ over ring K without zero divizors and, also, for finitary generalizations of unipotent subgroups of Chevalley group of classical type over the field (including twisted types).

Keywords: Chevalley algebra, nil-triangular subalgebra, unitriangular group, finitary and nonfinitary generalizations, radical ring.

References

1. Levchuk V.M. Automorphisms of unipotent subgroups of chevalley groups. *Algebra and Logic*, 1990, vol. 29, is. 3, pp. 211-224. https://doi.org/10.1007/BF01979936.
2. Levchuk V.M., Litavrin A.V., Hodyunya N.D., Cygankov V.V. Nil'treugol'nye podalgebry algebry Chevalley [Nilthriangular Subalgebras Chevalley Algebra]. *Vladikav. mat. zhurnal* [Vladikav. mat. magazine], 2015, vol. 17, iss. 2, pp. 37–46.
3. Levchuk V.M. Some locally nilpotent rings and their adjoined groups. *Matematicheskie Zametki*, 1987, vol. 42, no. 5, pp. 631–641. https://doi.org/10.1007/BF01137426.
4. Levchuk V.M. Connections between a unitriangular group and certain rings. Chap. 2: Groups of automorphisms. *Siberian Mathematical Journal*, 1983, vol. 24, is. 4, pp. 543–557. https://doi.org/10.1007/BF00969552.
5. Levchuk V.M., Sulejmanova G.S. Automorphisms and normal structure of unipotent subgroups of finitary Chevalley groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2009, vol. 15, no. 2, pp. 118–127. https://doi.org/10.1134/S0081543809070128
6. Merzlyakov YU.I. Equisubgroups of unitriangular groups: a criterion of self normalizability. *Russian Ac. Sci. Dokl. Math.*, 1995, vol. 50, no. 3, pp. 507–511.
7. Holubovski V. *Algebraicheskie svojstva grupp beskonechnyh matric* [Algebraic properties of groups of infinite matrices]. Gliwice, Wydawnictwo Politechniki Slaska, 2017, 140 p.
8. Carter R. *Simple Groups of Lie type*. Wiley and Sons, New York, 1972.
9. Jacobson N. *Lie Algebras.* Int. Publ., New York, 1962.
10. Levchuk V.M. Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: enveloping algebra, ideals and automorphisms. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 478, no. 1, pp. 23–27.
11. Levchuk V.M., Radchenko O.V. Derivations of the locally nilpotent matrix rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2010, vol. 9, no. 5, pp. 717–724.
12. Slovik R. Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators. *Linear and Multilinear Algebra*, 2013, vol. 61.8, pp. 1028–1040.

Julianna Bekker, Postgraduate, Siberian Federal University, 79, Svobodniy Avenue, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, tel.: (8)3912062148 (e-mail: angel220@bk.ru)

Vladimir Levchuk, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Siberian Federal University, 79, Svobodniy Avenue, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, tel.: (8)3912062148
(e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru)

Elena Sotnikova, Undergraduate, Siberian Federal University, 79, Svobodniy Avenue, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, tel.: (8)3912062148 (e-mail: olgarv520@yandex.ru)

Received 10.05.19