Серия «Математика»
2019. Т. 28. С. 113—122

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.716
MSC 08A99,03B50
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.113

Теория Галуа для конечных алгебр операций и мультиопераций ранга 2

Н. А. Перязев
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация

Аннотация. Построение теории Галуа для алгебр операций и отношений является популярной тематикой и находит многочисленные применения как в алгебре, так и в дискретной математике. Особенно это проявляется для совершенной связи Галуа, так как если такая связь установлена для множеств всех подалгебр некоторой алгебры, то алгебраическое замыкание в этой алгебре совпадает с замыканием Галуа, и это является действенным инструментом при решении многих алгебраических вопросов. Отметим, что хорошо известна совершенная связь Галуа для клонов и коклонов, а также некоторых алгебр операций, например, для клонов и суперклонов. Во всех этих случаях рассматривались бесконечные алгебры.

Данная статья посвящена изучению теории Галуа для конечных алгебр операций и мультиопераций при фиксированном ранге и произвольной размерности. Найдены необходимые и достаточные условия на размерность алгебр для того, чтобы связь Галуа между решетками подалгебр алгебр операций и алгебр мультиопераций ранга 2 была совершенной. Поставлен открытый вопрос о решении общей задачи нахождении необходимых и достаточных условий существования совершенной связи Галуа между решетками алгебр операций и алгебр мультиопераций произвольного фиксированного ранга.

Ключевые слова: операция, мультиоперация, теория Галуа, стабилизатор, нормализатор.

1. Введение

Установление связи Галуа [2] для упорядоченных множеств является важной особенностью таких множеств. При этом если имеется совершенная связь Галуа для множеств всех подалгебр некоторой алгебры, то алгебраическое замыкание в этой алгебре совпадает с замыканием Галуа, и это является действенным инструментом при решении многих алгебраических вопросов.

Найдена совершенная связь Галуа для клонов и ко-клонов [1], для клонов и суперклонов [4]. Отметим, что алгебры n-местных операций изучались в работах [6; 7; 9].

Данная статья посвящена построению теории Галуа для конечных алгебр операций и мультиопераций при фиксированном ранге и произвольной размерности. Результаты этой статьи анонсированы в [5].

2. Мультиоперации и их задание векторной формой

Пусть A — произвольное множество, $B(A)$ — множество всех подмножеств A, n — натуральное число. Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A. Если при этом все образы одноэлементные, то f называем n-местной операцией.

Мультиоперации f на произвольном конечном множестве $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно представлять как отображения

$$f : \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}^n \to \{0, 1, ..., 2^k - 1\},$$

получаемых из f при кодировке

$$a_i \to 2^i;\ \ \varnothing \to 0;\ \ \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

Говорим, что f мультиоперация размерности n, ранга k. В дальнейшем без дополнительных оговорок будем рассматривать только мультиоперации конечного ранга $k \geq 2$ и размерности $n \geq 2$.

Будем использовать обозначения $\mathcal{M}_k^{(n)}, \mathcal{O}_k^{(n)}$ для множества мультиопераций и операций размерности n, ранга k. Очевидно выполняется $\mathcal{O}_k^{(n)} \subset \mathcal{M}_k^{(n)}$.

Определим векторную форму $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ мультиоперации f размерности n, ранга k, так $\alpha_i \in \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$ и $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, а $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i - 1$ в системе исчисления по основанию k n-разрядным числом.

Примеры ранга 2:

размерность 2: $(0000), (3333), (1122), (1212), (1002), (2301)$;

размерность 3: $(33333333), (11112222), (12121212), (03220130)$.

3. Алгебры операций и мультиопераций

Определим следующие n-местные мультиоперации так:
пустая мультиоперация $o^n(a_1, ..., a_n) = \varnothing$;
проекция по i аргументу $e_i^n(a_1, ..., a_n) = \{a_i\}$.

Определим следующие метаоперации на множестве n-местных мультиопераций:
Метаоперация суперпозиции $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_k^{(n)}$

$$(f * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_n) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_n)} f(b_1, ..., b_n).$$

Метаоперация разрешимости $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$

$$(\mu f)(a_1, ...a_n) = \{a \mid a_1 \in f(a, a_2, ..., a_n)\}.$$

Легко видно, что:

$$b \in (\mu f)(c, a_2, ..., a_n) \Longleftrightarrow c \in f(b, a_2, ..., a_n).$$

Определение 1. *Алгеброй операций ранга k, размерности n называется любое подмножество $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.*

При фиксированном k введем обозначение $[K]_n$ для алгебры операций размерности n, порожденной множеством $K \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$ и V_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр операций ранга k, размерности n (этот порядок, очевидно, является решеточным).

Определение 2. *Алгеброй мультиопераций ранга k, размерности n называется любое подмножество $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую n-местную мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимости.*

При фиксированном k введем обозначение $\langle R \rangle_n$ для алгебры мультиопераций размерности n, порожденной множеством $R \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$ и W_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр мультиопераций ранга k, размерности n (порядок так же решеточный).

4. Связь Галуа для упорядоченных множеств

В этом разделе приведем основные сведения об общей теории Галуа, следуя [2].

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.

Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняются условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

Если при этом выполняется $\pi(\rho(c)) = c$, то связь Галуа совершенна в $\mathcal{C}$, если $\rho(\pi(d)) = d$, то совершенна в $\mathcal{D}$ и просто совершенной, если является совершенной там и там. Часто полезен следующий критерий [2].

Теорема 1. *1. Связь Галуа совершенна в $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда для любых различных элемента $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ следует, что $\rho(c_1)$ и $\rho(c_2)$ различны.*
2. Связь Галуа совершенна в $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда для любых различных элемента $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ следует, что $\pi(d_1)$ и $\pi(d_2)$ различны.

5. Теория Галуа для V_k^n и W_k^m

Для формулировки тождества полуперестановочности распространим определение суперпозиции на случай мультиопераций разной размерности следующим образом. Если $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$, то

$$(f * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f(b_1, ..., b_n).$$

Пусть $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$. Определим тождество полуперестановочности для f и g так:

$$(f * (g * e_1^{nm}, \ldots, e_m^{nm}), \ldots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$

$$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \ldots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \ldots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})),$$

где верхний индекс у проекций указывает на их размерность.

В этом случае будем говорить, что f *стабильна относительно* g и g *нормальна относительно* f.

Пусть $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $f \in \mathcal{O}_k^{(n)}$. Тогда

$$S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_k^{(n)} \text{ и } f \text{ стабильна относительно } g\};$$

$$N^m(f) = \{g \mid g \in \mathcal{M}_k^{(m)} \text{ и } g \text{ нормальна относительно } f\}.$$

Множество $S^n(g)$ называется *n-стабилизатором* g, а множество $N^m(f)$ — *m-нормализатором* f.

Пусть $R \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $K \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$. Тогда

$S^n(R) = \bigcap\limits_{g \in R} S^n(g)$ — *n-стабилизатор* множества мультиопераций R;

$N^m(K) = \bigcap\limits_{f \in K} N^m(f)$ — *m-нормализатор* множества операций K.

Теорема 2. *Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа между множествами V_k^n и W_k^m.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in V_k^n$ и $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$. Тогда

$$N^m(\mathcal{K}_2) = \bigcap_{f \in \mathcal{K}_2} N^m(f) \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2} N^m(f) = N^m(\mathcal{K}_1).$$

Теперь пусть $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in W_k^m$ и $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$. Тогда

$$S^n(\mathcal{R}_2) = \bigcap_{g \in \mathcal{R}_2} S^n(g) \subseteq \bigcap_{g \in \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2} S^n(g) = S^n(\mathcal{R}_1).$$

Пусть $\mathcal{K} \in V_k^n$. Тогда любая $f \in \mathcal{K}$ стабильна со всеми $g \in N^m(\mathcal{K})$, а значит $f \in S^n(N^m(\mathcal{K}))$. Получили $\mathcal{K} \subseteq S^n(N^m(\mathcal{K}))$.
Теперь пусть $\mathcal{R} \in W_k^m$. Тогда любая $g \in \mathcal{R}$ нормальна со всеми $f \in S^n(\mathcal{R})$, а значит $g \in N^m(S^n(\mathcal{R}))$. Получили $\mathcal{R} \subseteq N^m(S^n(\mathcal{R}))$.
Доказали выполнимость условий определения связи Галуа. □

6. Теория Галуа для V_2^n и W_2^m

В случае ранга $k = 2$ получаются необходимые и достаточные условия для того чтобы связь Галуа являлась совершенной.

Теорема 3. *Для ранга 2 верно:*
1) пара соответствий S^n и N^m является совершенной в V_2^n связью Галуа тогда и только тогда, когда $m \geq \max\{3, n-1\}$;
2) пара соответствий S^n и N^m является совершенной в W_2^m связью Галуа тогда и только тогда, когда $n \geq \max\{3, m+1\}$;
3) пара соответствий S^n и N^m является совершенной связью Галуа тогда и только тогда, когда $m = n - 1 \geq 3$.

Доказательство. Для доказательства пункта 1) проведем следующие рассуждения. Так как число алгебр операций размерности n конечно, то следуя теореме 1 связь Галуа будет совершенной в V^n тогда и только тогда, когда различных нормализаторов N^m будет столько же. Отсюда так же следует, что если пара соответствий S^n и N^m является совершенной в V_2^n связью Галуа, то и пара соответствий S^n и N^r для всех $r \geq m$ является совершенной в V_2^n. А если пара соответствий S^n и N^m не является совершенной в V_2^n связью Галуа, то и пара соответствий S^r и N^m для всех $r \geq n$ не является совершенной в V_2^r.

Число алгебр операций фиксированной размерности определяется из результатов Э. Поста (см., например, [3; 8]).

Число алгебр операций размерности 2 равно 26, при этом число нормализаторов N^2 равно 25, а число N^3 равно 26.

Далее, число алгебр операций размерности $n \geq 3$ и число нормализаторов N^{n-1} совпадают и равно $8n + 22$.

Покажем как вычислялось число нормализаторов при различных размерностях на примере $n = 4$ и $m = 3$.

Строим таблицу следующим образом:

– столбцы отмечаем всеми n-местными операциями;
– строки отмечаем всеми m-местными мультиоперациями;
– в клетке таблицы отмеченной операцией f и мультиоперацией g ставим 1, если g нормальна относительно f, иначе ставим 0;
– среди одинаковых строк оставляем одну;
– среди одинаковых столбцов оставляем один.

Получаем таблицу 1.

Далее берем всевозможные произведения столбцов и оставляем только различные. В итоге получим таблицу где каждый столбец определяет нормализатор. Число столбцов равно числу различных нормализаторов.

Аналогичные рассуждения проводим для доказательства пункта 2), только число алгебр мультиопераций фиксированной размерности определяется кроме результатов Э. Поста еще из работ [1; 4].

Число алгебр мультиопераций размерности 2 равно 44, при этом число стабилизаторов S^2 равно 25, а число S^3 равно 44.

Далее, число алгебр мультиопераций размерности $m \geq 3$ и число стабилизаторов S^{m+1} совпадают и равно $8n + 30$.

Для вычисления числа стабилизаторов были проделаны аналогичные действия с построенной таблицей, но уже относительно строк.

Результат вычислений для нахождения числа нормализаторов ранга 4 и числа стабилизаторов размерности 3 приводятся в таблице 2 (вычисления производились на компьютере А. М. Ожогиным при произвольном упорядочении операций и мультиопераций, причем операции стоят по строкам, а мультиоперации по столбцам).

Таблица 1

	(1212121212121212)	(2121212121212121)	(1221211212212112)	(1112122211121222)	(1111111111111111)	(2222222222222222)	(1112111211121112)	(1222122212221222)	(1111212211112122)	(1121222211212222)	(1111222211112222)	(1112222211122222)	(1111111211121222)	(1112122212222222)
(12121212)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(21212121)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(12212112)	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(13321332)	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(13131313)	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
(33323332)	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
(13331333)	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
(11111111)	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
(22222222)	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(31313131)	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
(23232323)	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
(33313331)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
(23332333)	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
(33333331)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
(23333333)	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0

При переходе от n и m к $n+1$ и $m+1$ в таблице, аналогичной Таблице 1, получаются две новые строки отмеченные мультиоперациями (3...31) и (23...3), а также два новых столбца отмеченных операциями f и двойственной к ней, где f принимает 1 на наборах, содержащих не более одной 2.

При построении таблицы, аналогичной таблице 2, образовывается 8 новых столбцов и 8 новых строк. Это вытекает из того, что каждый из двух новых столбцов совпадает с одним уже имеющимся во всех позициях, кроме одной (это одна из новых строк) и этот столбец участвовал в образовании столбцов таблицы 2 четыре раза.

Аналогично проходят рассуждения для строк.

Пункт 3) условия теоремы непосредственно следует из двух предыдущих пунктов. □

Следствие 1. *Для ранга 2 верно:*

1) для любого множества $K \subseteq \mathcal{O}_2^{(n)}$ *для* $n \geq 4$ *выполняется*

$$[K] = S^n(N^m(K)) \text{ при } m \geq n-1;$$

2) для любого множества $R \subseteq \mathcal{M}_2^{(m)}$ *для* $m \geq 3$ *выполняется*

$$\langle R \rangle = N^m(S^n(R)) \text{ при } n \geq m+1;$$

3) упорядоченные множества V_2^n и W_2^{n-1} при $n \geq 4$ антиизоморфны.

Доказательство. 1) Следует из пункта 1) теоремы и равенства $N^m(K) = N^m([K])$, которое несложно доказывается (смотри в [4]).

2) Аналогично следует из пункта 2) теоремы и равенства $S^n(R) = S^n(\langle R\rangle)$.

3) Непосредственно следует из пункта 3) теоремы. □

Таблица 2.

1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0																																							
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																							
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0																																							
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0																																							
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																							
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0																																							
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0																																							
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																							
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																							
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1																																							
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0																																							
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1																																							
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1																																							
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0																																							
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																							
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0																																							
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0																																							

7. Заключение

Общая задача о нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы связь Галуа между упорядоченными множествами алгебр операций и алгебр мультиопераций произвольного фиксированного ранга была совершенной, является достаточно сложной проблемой. Предложенный в данной статье метод уже при ранге 3 неприменим из-за экспоненциального роста вычислений. Решение этой задачи даже для ранга 3 другим методом представляет большой интерес и являлось бы важным развитием теории Галуа для конечных множеств.

Список литературы

1. Теория Галуа для алгебр Поста I-II / В. Г. Боднарчук, Л. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1-10; № 5. С. 1–9.
2. Оре О. Теория графов. М. : Наука, 1980. 336 с.
3. Перязев Н. А., Казимиров А. С. Замкнутые множества булевых функций. Иркутск : Изд-во Вост.-Сиб гос. акад. образования, 2010. 52 с.
4. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Теория Галуа для клонов и суперклонов // Дискретная математика. Т. 27, вып. 4. 2015. С.79–93. https://doi.org/10.4213/dm1349
5. Перязев Н. А. Алгебры n-местных операций и мультиопераций // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» : тез. докл. Тула, 28-31 мая 2018 г.. Тула, 2018. С. 113–116.
6. Пинус А. Г. О фрагментах функциональных клонов // Алгебра и логика. Т. 56, № 4. 2017. С. 477–485. https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.406
7. Черепов А. Н., Черепов И. А. Классы сохранения оснований в многозначных логиках // Труды 4-й Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М. : МАКС Пресс, 2000. С. 135–136.
8. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М. : Наука, 1966. 120 с.
9. Poschel R, Kaluzhnin L. A. Function and Relaction Algebras. Berlin, 1979. 259 p.

Николай Алексеевич Перязев, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, тел.:(812)3464487 (e-mail: `nikolai.baikal@gmail.com`)

Поступила в редакцию 25.04.19

Galois Theory for Finite Algebras of Operations and Multioperations of Rank 2

N. A. Peryazev

Saint-Petersburg Electrotechnical University "LETI", Saint Petersburg, Russian Federation

Abstract. The construction of Galois theory for the algebras of operations and relations is a popular topic for investigation. It finds numerous applications in both algebra and discrete mathematics – especially for the perfect Galois connection, since if such a connection is established for the sets of all subalgebras of some algebra then the algebraic closure in this algebra coincides with the Galois closure, and this is an efficient tool for solving many algebraic problems. The perfect Galois connection is well known for clones and co-clones, as well as for some algebras of operations, for example, for clones and superclones. In all these cases, infinite algebras are considered.

In this article we study Galois theory for finite algebras of operations and multioperations with fixed rank and arbitrary dimension. We find the necessary and sufficient conditions on the dimension of algebras so that the Galois connection between the lattices of subalgebras of algebras of operations and algebras of multioperations of rank 2 is perfect. The problem of finding the necessary and sufficient conditions for the existence of a perfect Galois connection between lattices of algebras of operations and algebras of multioperations of arbitrary fixed rank is posed.

Keywords: operation, multioperation, Galois's theory, stabilizer, normalizer.

References

1. Bodnarchuk V.G., Kaluzhnin L.A., Kotov V.N., Romov B.A. Galois theory for Hjst algebras I-II.*Kibernetika*, 1969, no. 3, pp. 1-10; no. 5, pp. 1-9. (in Russian).
2. Ore O. *Theory of Graphs*. Moscow, 1980, 336 p. (in Russian).
3. Peryazev N.A., Kazimirov A.S. *The closed sets of Boolean functions*. Irkutsk, 2010, 52 p. (in Russian).
4. Peryazev N.A., Sharankhaev I.K. Galois theory for clones and superclones. *Discrete Math. Appl.*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 227–238. (in Russian). https://doi.org/10.4213/dm1349
5. Peryazev N.A. Algebras of n-ary Operations and Multioperations. *XV International Conference «Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems and applications»*, Tula, Tula State Pedagogical University, 2018, pp. 113-116. (in Russian).
6. Pinus A.G. On fragments of the functional clones. *Algebras and Logic*, 2017, vol. 56, no. 4, pp. 477–485. (in Russian). https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.406
7. Cherepov A.N., Cherepov I.A. Classes of preservation of the bases in multiple-valued logicians. *Proceedings of the 4th International conference «Discrete models in the theory of the operating systems»*, Moscow, 2000, pp. 135-136.(in Russian).
8. Yablonskii S.V., Gavrilov G.P., Kudryavtsev V.B. *Functions of algebra of logic and Post's classes*. Moscow, 1966, 120 p. (in Russian).
9. Poschel R, Kaluzhnin L.A. *Function and Relaction Algebras*. Berlin, 1979, 259 p.

Nikolay Peryazev, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Saint-Petersburg Electrotechnical University «LETI», 5, Professor Popov st., Saint Petersburg, 197375, Russian Federation,
tel.:(812)3464487 (e-mail: nikolai.baikal@gmail.com)

Received 25.04.19