**Серия «Математика»**
2019. Т. 28. С. 36—52

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
*Иркутского государственного университета*

УДК 510.67:514.146
MSC 03C07, 03C60, 03G15, 51E30
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.36

# Алгебры распределений бинарных формул для теорий архимедовых тел *

Д. Ю. Емельянов
*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация*

**Аннотация.** Алгебры распределений бинарных изолирующих и полуизолирующих формул являются производными объектами для данной теории и отражают бинарные формульные связи между реализациями 1-типов. Эти алгебры связаны со следующими естественными классификационными вопросами: 1) по данному классу теорий определить, какие алгебры соответствуют теориям из этого класса, и классифицировать эти алгебры; 2) классифицировать теории из класса в зависимости от определяемых этими теориями алгебр изолирующих и полуизолирующих формул. При этом описание конечной алгебры бинарных изолирующих формул однозначно влечет и описание алгебры бинарных полуизолирующих формул, что позволяет отслеживать поведение всех бинарных формульных связей данной теории.

В статье описаны алгебры бинарных формул для теорий архимедовых тел. Для полученных алгебр приведены таблицы Кэли. Показано, что эти алгебры исчерпываются описанными алгебрами для усеченного куба, усеченного октаэдра, ромбокубооктаэдра, икосододекаэдра, усеченного тетраэдра, кубооктаэдра, плосконосого куба, плосконосого додекаэдра, усеченного кубооктаэдра, ромбоикосододекаэдра, усеченного икосаэдра, усеченного додекаэдра, ромбоусеченного икосододекаэдра.

**Ключевые слова:** алгебра распределений бинарных формул, архимедово тело.

Алгебры распределений бинарных изолирующих и полуизолирующих формул являются производными объектами для данной теории и отражают бинарные формульные связи между реализациями 1-типов. Эти объекты играют важную роль как при классификации данных теорий, так и при изучении общих вопросов восстановления информации по производным объектам. Наряду с развитой общей теорией алгебр би-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05132546).

нарных формул [12; 13; 15], получен ряд классификационных результатов по упорядоченным и счетно категоричным теориям [6;7;16], теориям абелевых групп [2], теориям унаров [5], полигонометрическим теориям [8], включая теории правильных многогранников, теориям симплексов [9] и др.

В настоящей работе продолжается изучение алгебр распределений бинарных изолирующих формул: описываются такие алгебры для теорий архимедовых тел.

## 1. Предварительные сведения

Пусть $T$ — полная теория, $\mathcal{M} \models T$. Рассмотрим типы $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, реализуемые в $\mathcal{M}$, а также всевозможные $(p,q)$-*устойчивые*, или $(p,q)$-*полуизолирующие*, формулы $\varphi(x,y)$ теории $T$, т. е. формулы, для которых найдутся элементы $a \in M$ такие, что $\models p(a)$ и $\varphi(a,y) \vdash q(y)$. Напомним [3; 4; 11; 13; 14], что если $\models p(a)$ и $\models \varphi(a,b)$ для $(p,q)$-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$, то говорят, что *$a$ полуизолирует $b$*. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара $(a,b)$ называется $(p,\varphi,q)$-*дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула (над $a$), то $(p,\varphi,q)$-дуга $(a,b)$ также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$-*формулой*, т. е. одновременно $(p,q)$- и $(q,p)$-устойчивой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется $(p,\varphi,q)$-*ребром* [3; 4; 11; 13; 14]. Если $(p,\varphi,q)$-ребро $[a,b]$ состоит из главных $(p,\varphi,q)$- и $(q,\varphi^{-1},p)$-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* $(p,\varphi,q)$-ребром.

Будем называть $(p,\varphi,q)$-дуги и $(p,\varphi,q)$-рёбра *дугами* и *рёбрами* соответственно, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь, или речь идёт о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Дуги $(a,b)$, у которых пары $(b,a)$ не являются дугами ни по каким $(q,p)$-формулам, будем называть *необращаемыми*.

Для типов $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$ обозначим через $\mathrm{PF}(p,q)$ множество

$$\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y) \text{ — главная формула,}$$

$$\varphi(a,y) \vdash q(y), \text{ где } \models p(a)\}.$$

Пусть $\mathrm{PE}(p,q)$ — множество пар $(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ формул из $\mathrm{PF}(p,q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации $a$ типа $p$ совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $\mathrm{PE}(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathrm{PF}(p,q)$. Заметим, что каждому $\mathrm{PE}(p,q)$-классу $E$ соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов $p$ и $q$ посредством любой (некоторой) формулы из $E$. Таким образом, фактор-множество $\mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $\mathrm{PFS}(p,q)$ и $\mathrm{PFN}(p,q)$, где $\mathrm{PFS}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих главным рёбрам, а $\mathrm{PFN}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Множества $\mathrm{PF}(p,p)$, $\mathrm{PE}(p,p)$, $\mathrm{PFS}(p,p)$ и $\mathrm{PFN}(p,p)$ обозначаются соответственно через $\mathrm{PF}(p)$, $\mathrm{PE}(p)$, $\mathrm{PFS}(p)$ и $\mathrm{PFN}(p)$ [12; 13].

Зафиксируем полную теорию $T$, не имеющую конечных моделей. Пусть $U = U^- \,\dot\cup\, \{0\} \,\dot\cup\, U^+$ — некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ — через $U^{\geq 0}$. Элементы множества $U$ будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные *меточные функции*

$$\nu(p,q)\colon \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q) \to U,$$

$p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, при которых классам из $\mathrm{PFN}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $\mathrm{PFS}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ — элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задаётся по формуле $(x \approx y)$, $\nu(p) \rightleftharpoons \nu(p,p)$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где, как обычно, через $\rho_f$ обозначается область значений функции $f$) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \emptyset$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $\mathrm{PF}(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$. Если тип $p$ фиксирован и $p = q$, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)$ обозначается через $\theta_u(x,y)$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ — формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций $a$ и $b$ типов $p$ и $q$ соответственно пары $(a,b)$ и $(b,a)$ являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке $u$ однозначно соответствует (неотрицательная) метка $v$ и наоборот. Метки $u$ и $v$ будем называть *взаимно обратными* и обозначать через $v^{-1}$ и $u^{-1}$ соответственно.

Для типов $p_1, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$ и множеств меток $X_1, \ldots, X_k \subseteq U$ обозначим через

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x,y)$, которые для реализаций $a$ типа $p_1$ и некоторых $u_1 \in$

$X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a,y) \vdash \theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(a,y),$$

где

$$\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(x,y) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots, x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x,x_2) \wedge \theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2,x_3) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1},x_k) \wedge \theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k,y)).$$

Тем самым, на булеане $\mathcal{P}(U)$ множества $U$ образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с $k$-местными операциями

$$P(p_1,\cdot,p_2,\cdot,\ldots,p_k,\cdot,p_{k+1}),$$

где $p_1,\ldots,p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами

$$\bigcup_{p,q} \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q).$$

Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток $U$, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $\mathcal{P}(U)$.

Заметим, что если хотя бы одно из множеств $X_i$ не пересекается с $\rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ и, в частности, если оно пусто, справедливо равенство

$$P(p_1,X_1,p_2,X_2,\ldots,p_k,X_k,p_{k+1}) = \emptyset.$$

Отметим также, что если $X_i \not\subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ для некоторого $i$, то

$$P(p_1,X_1,p_2,X_2,\ldots,p_k,X_k,p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, p_2, X_2 \cap \rho_{\nu(p_2,p_3)}, \ldots, p_k, X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}, p_{k+1}).$$

На основании последнего равенства в дальнейшем при рассмотрении значений

$$P(p_1,X_1,p_2,X_2,\ldots,p_k,X_k,p_{k+1})$$

будем предполагать, что $X_i \subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$, $i=1,\ldots,k$.

Если каждое множество $X_i$ состоит лишь из одного элемента $u_i$, то в записи

$$P(p_1,X_1,p_2,X_2,\ldots,p_k,X_k,p_{k+1})$$

вместо множеств $X_i$ будем использовать элементы $u_i$ и писать

$$P(p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}).$$

По определению справедливо следующее равенство:

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \dots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$
$$= \cup\{P(p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_k, u_k, p_{k+1}) \mid u_1 \in X_1, \dots, u_k \in X_k\}.$$

Таким образом, задание множества

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \dots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

сводится к заданию множеств $P(p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_k, u_k, p_{k+1})$. Отметим также, что для любого множества $X \subseteq \rho_{\nu(p,q)}$ имеет место $P(p, X, q) = X$.

Заметим, что если $u_i = 0$, то $p_i = p_{i+1}$ для непустых множеств

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_i, 0, p_{i+1}, \dots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

и при этом выполняются следующие соотношения:

$$P(p_1, 0, p_1) = \{0\},$$

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_i, 0, p_{i+1}, u_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_k, u_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_i, u_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

Если все типы $p_i$ совпадают с типом $p$, то вместо записей

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \dots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

и

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \dots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

будем писать $P_p(X_1, X_2, \dots, X_k)$ и $P_p(u_1, u_2, \dots, u_k)$ соответственно, а также $\lfloor X_1, X_2, \dots, X_k\rfloor_p$ и $\lfloor u_1, u_2, \dots, u_k\rfloor_p$. Будем также опускать индексы $\cdot_p$, если из контекста ясно, о каком типе $p$ идет речь. При этом вместо формул $\theta_{p,u_1,p,u_2,\dots,p,u_k,p}(x, y)$ будем писать $\theta_{u_1,u_2,\dots,u_k}(x, y)$.

При наличии модели $\mathcal{M}_p$ группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}; \lfloor\cdot,\cdot\rfloor\rangle$, будучи *полуассоциативной* (*слева*) алгеброй, позволяет представить всевозможные операции $\lfloor\cdot,\cdot,\dots,\cdot\rfloor$ термами сигнатуры $\lfloor\cdot,\cdot\rfloor$. В дальнейшем операцию $\lfloor\cdot,\cdot\rfloor$ будем также обозначать через $\cdot$ и использовать запись $uv$ вместо $u \cdot v$. При этом в случае отсутствия полуассоциативности справа будем в записи $u_1u_2\dots u_k$ предполагать следующую расстановку скобок: $(((u_1 \cdot u_2) \cdot \dots) \cdot u_k)$.

Поскольку по выбору метки 0 для формулы $(x \approx y)$ справедливы равенства $X \cdot \{0\} = X$ и $\{0\} \cdot X = X$ для любого $X \subseteq \rho_{\nu(p)}$, группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеет единичный элемент $\{0\}$ и, при выполнении свойства полуассоциативности справа, является моноидом. В этой системе для любых множеств $Y, Z \in \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}$ справедливо соотношение

$$Y \cdot Z = \bigcup\{yz \mid y \in Y, z \in Z\}. \tag{1.1}$$

Для семейства 1-типов $R \subset S(T)$ обозначим через $I_R$ (в модели $\mathcal{M}$) множество
$$\{(a,b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ изолирует } b\},$$
а через $\mathrm{SI}_R$ (в модели $\mathcal{M}$) множество
$$\{(a,b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ полуизолирует } b\}.$$

Очевидно, что $I_R \subseteq \mathrm{SI}_R$ и на любом множестве реализаций типов из $R$ отношения $I_R$ и $\mathrm{SI}_R$ рефлексивны. Известно, что отношение полуизолированности на множестве кортежей произвольной модели транзитивно и, в частности, транзитивно любое отношение $\mathrm{SI}_R$. Что касается отношения $I_R$, оно может быть как транзитивным, так и нетранзитивным:

**Предложение 1.** [12; 13] *Пусть $p(x)$ — полный тип полной теории $T$, имеющей модель $\mathcal{M}_p$, $\nu(p)$ — правильная меточная функция. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение $I_p$ (на множестве реализаций типа $p$ в любой модели $\mathcal{M} \models T$) транзитивно;*

(2) *для любых меток $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(p)}$ множество $P_p(u_1, u_2)$ конечно.*

**Предложение 2.** [12;13] *Если $p, q \in R$ — главные типы, то $\rho_{\nu(p,q)} \cup \rho_{\nu(q,p)} \subseteq U^{\geq 0}$.*

Расширяя множество меток $U$ положительными и отрицательными метками для полуизолирующих формул, а также *нейтральными* метками $u' \in U'$ (совмещающими необратимые дуги и главные ребра в множество решений полуизолирующих формул), получаем $\mathfrak{SI}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{SI}$ для полуизолирующих формул, а также si-ранги, булевы операции на метках этих формул, отношения доминирования меток, соответствующие отношению $\vdash$, и $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системы, включающие все указанные атрибуты [13; 15].

**Предложение 3.** [13;16] *Для любой теории $T$, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка $u$ имеет дополнение $\bar{u}$ такое, что $u \wedge \bar{u} = \emptyset$ и $u \vee \bar{u}$ является максимальным элементом. Если $R = \{p\}$, то моноид $\mathfrak{SI}_{\nu(p)} = \langle M_{\nu(R)}, \cdot \rangle$ порождается булевой алгеброй, для которой $u \vee \bar{u}$ соответствует изолирующим формулам типа $p$.*

**Следствие 1.** [13; 16] *Для любой $\omega$-категоричной теории $T$, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-система $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ конечна, состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка $u$ имеет дополнение $\bar{u}$.*

**Теорема 1.** [13;16] *Для любой* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы* $\mathfrak{M}$*, у которой каждая метка положительная или нулевая и при этом имеет дополнение, существует теория* $T$*, непустое семейство* $R \subseteq S^1(\emptyset)$ *изолированных типов и правильное семейство* $\nu(R)$ *меточных функций для полуизолирующих формул такие, что* $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.

**Следствие 2.** [13; 16] *Для любой конечной* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы* $\mathfrak{M}$*, у которой любая метка положительна или нулевая и имеет дополнение, существует* $\omega$*-категоричная теория* $T$*, непустое семейство* $R \subseteq S^1(\emptyset)$ *и правильное семейство* $\nu(R)$ *меточных функций для полуизолирующих формул такие, что* $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.

**Замечание 1.** Отметим, что если $u_1, \ldots, u_n$ — все метки, связывающие реализации 1-типов $p$ и $q$ главными дугами, то для любой метки $u = u_{i_1} \vee \ldots \vee u_{i_k}$ её дополнением является метка $\bar{u} = u_{j_1} \vee \ldots \vee u_{j_l}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\}, \{j_1, \ldots j_l\}$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$. Поэтому в следствиях 1 и 2 о наличии дополнений можно не упоминать.

Кроме того, поскольку в любой конечной $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системе $\mathfrak{M}$ все метки сводятся к меткам изолирующих формул, эта система однозначно определяется своей подалгеброй распределений изолирующих формул.

## 2. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий архимедовых тел

**Определение 1.** [1; 10]. *Архимедовы тела* — выпуклые многогранники, обладающие двумя свойствами: все грани являются правильными многогранниками двух или более типов, для любой пары вершин существует симметрия многогранника, переводящая одну вершину в другую.

Количество меток для алгебр задается диаметром. Под диаметром подразумевается понятие диаметра для графа.

**Определение 2.** Для усеченного куба обозначим через $\mathfrak{UQ}$ алгебру $\langle UQ; * \rangle$ с носителем $UQ = \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} |
| 1 | {1} | {0,1,2} | {0,1,2,3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} |
| 2 | {2} | {0,1,2,3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} |
| 3 | {3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} |
| 4 | {4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} |
| 5 | {5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} |
| 6 | {6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6} |

**Определение 3.** Для усеченного октаэдра обозначим через $\mathfrak{UO}$ алгебру $\langle UO; *\rangle$ с носителем $UO = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} |
| 1 | {1} | {0,2} | {1,3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,2,4,6} | {1,3,5} |
| 2 | {2} | {1,3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,2,4,6} | {1,3,5} | {2,4,6} |
| 3 | {3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,1,2,4,5,6} | {1,3,5} | {2,4,6} | {1,3,5} |
| 4 | {4} | {1,3,5} | {0,2,4,6} | {1,3,5} | {0,1,2,3,5,6} | {1,3,5} | {0,2,3,4} |
| 5 | {5} | {0,2,4,6} | {1,3,5} | {2,4,6} | {1,3,5} | {0,1,2,3,4,6} | {1,3,5} |
| 6 | {6} | {1,3,5} | {2,4,6} | {1,3,5} | {0,2,3,4} | {1,3,5} | {0,1,2,3,4,5} |

**Определение 4.** Для ромбокубооктаэдра обозначим через $\mathfrak{RQO}$ алгебру $\langle RQO; *\rangle$ с носителем $RQO = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} |
| 1 | {1} | {1,2} | {0,1,2,3} | {0,1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 2 | {2} | {0,1,2,3} | {0,1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 3 | {3} | {0,1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5 | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 4 | {4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5 } | {0,1,2,3,4,5} |
| 5 | {5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 6 | {6} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |

**Определение 5.** Для икосододекаэдра обозначим через $\mathfrak{ID}$ алгебру $\langle ID; *\rangle$ с носителем $ID = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} |
| 1 | {1} | {1,2} | {0,2,3} | {0,1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 2 | {2} | {0,2,3} | {0,1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 3 | {3} | {0,1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 4 | {4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 5 | {5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |
| 6 | {6} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5} |

**Определение 6.** Для усеченного тетраэдра обозначим через $\mathfrak{UT}$ алгебру $\langle UT; *\rangle$ с носителем $UT = \mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {1} | {3} |
| 1 | {1} | {0, 1, 2} | {0, 2, 3} | {1, 2, 3} |
| 2 | {2} | {0, 2, 3} | {1, 2, 3} | {0, 1, 2, 3} |
| 3 | {3} | {1, 2, 3} | {0, 1, 2, 3} | {0, 1, 2, 3} |

**Определение 7.** Для усеченного кубооктаэдра обозначим через $\mathfrak{QO}$ алгебру $\langle QO; * \rangle$ с носителем $QO = \mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$, задаваемую следующей таблицей:

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{3\}$ |
| 1 | $\{1\}$ | $\{0,1,2\}$ | $\{0,1,2,3\}$ | $\{0,1,2,3\}$ |
| 2 | $\{2\}$ | $\{0,1,2,3\}$ | $\{0,1,2,3\}$ | $\{0,1,2,3\}$ |
| 3 | $\{3\}$ | $\{0,1,2,3\}$ | $\{0,1,2,3\}$ | $\{0,1,2,3\}$ |

**Определение 8.** Для плосконосого куба обозначим через $\mathfrak{PQ}$ алгебру $\langle PQ; * \rangle$ с носителем $PQ = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4\})$, задаваемую следующей таблицей:

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{3\}$ | $\{4\}$ |
| 1 | $\{1\}$ | $\{1,2\}$ | $\{0,1,2,3\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ |
| 2 | $\{2\}$ | $\{0,1,2,3\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ |
| 3 | $\{3\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ |
| 4 | $\{3\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ | $\{0,1,2,3,4\}$ |

**Определение 9.** Для плосконосого додекаэдра обозначим через $\mathfrak{PD}$ алгебру $\langle PD; * \rangle$ с носителем $PD = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} | {7} |
| 1 | {1} | {0,1,2} | {0,1,2,3} | {0,1,2, 3,4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2,3, 4,5,6} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} |
| 2 | {2} | {0,1,2,3} | {0,1,2, 3,4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2,3 4,5,6} | {0,1,2,3 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} |
| 3 | {3} | {0,1,2, 3,4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2,3, 4,5,6} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} |
| 4 | {4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2,3, 4,5,6} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} |
| 5 | {5} | {0,1,2,3, 4,5,6} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7 } |
| 6 | {6} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} |
| 7 | {7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} | {0,1,2,3, 4,5,6,7} |

**Определение 10.** Для усеченного кубооктаэдра обозначим через $\mathfrak{UQO}$ алгебру $\langle UQO; * \rangle$ с носителем $UQO = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\})$, задаваемую следующей таблицей:

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} | {7} | {8} |
| 1 | {1} | {0,2} | {1,2,3} | {0,2,4, | {1,3,5, | {0,2,4, 6} | {1,3,5, 7} | {0,2,4 6,8} | {1,3,5, 7} |
| 2 | {2} | {1,2,3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,2,4, 6} | {1,3,5, 7} | {0,2,4 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} |
| 3 | {3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,2,4, 6 | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} |
| 4 | {4} | {1,3,5} | {0,2,4, 6} | {1,3,5, 7} | {0,2,4 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} |
| 5 | {5} | {0,2,4, 6} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} |
| 6 | {6} | {1,3,5, 7} | {0,2,4 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} |
| 7 | {7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} |
| 8 | {8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} |

**Определение 11.** Для ромбоикосододекаэдра обозначим через $\mathfrak{RID}$ алгебру $\langle RID; *\rangle$ с носителем $RID = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\})$, задаваемую следующей таблицей:

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} | {7} | {8} |
| 1 | {1} | {1,2} | {0,1,2, 3} | {0,1,2, 3,4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2, 3,4,5, 6} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |
| 2 | {2} | {0,1,2, 3} | {0,1,2, 3,4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2, 3,4,5, 6} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |
| 3 | {3} | {0,1,2, 3,4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2, 3,4,5, 6} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |
| 4 | {4} | {0,1,2, 3,4,5} | {0,1,2, 3,4,5, 6} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |
| 5 | {5} | {0,1,2, 3,4,5, 6} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |
| 6 | {6} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |
| 7 | {7} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |
| 8 | {8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} | {0,1,2, 3,4,5, 6,7,8} |

**Определение 12.** Для усеченного икосаэдра обозначим через $\mathfrak{UI}$ алгебру $\langle UI; *\rangle$ с носителем $UI = (\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} | {7} | {8} |
| 1 | {1} | {0,2} | {1,2,3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 2 | {2} | {1,2,3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 3 | {3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 4 | {4} | {0,1,2,3,4,5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 5 | {5} | {0,1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 6 | {6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 7 | {7} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 8 | {8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8} |

**Определение 13.** Для усеченного додекаэдра обозначим через $\mathfrak{UD}$ алгебру $\langle UD; *\rangle$ с носителем $UD = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} |
| 1 | {1} | {0,1} | {0,1,2,3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {1,2,3,4,5,6} |
| 2 | {2} | {0,1,2,3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} |
| 3 | {3} | {1,2,3,4} | {0,1,2,3,4,5} | {1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {1,2,3,4,5,6,7,8} |
| 4 | {4} | {0,1,2,3,4,5} | {1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} |
| 5 | {5} | {1,2,3,4,5,6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 6 | {6} | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, | {1,2,3,5,6,7,7,8,9,10}, | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | {7 } | {1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,8,9} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 8 | {8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 9 | {9} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 10 | {10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |

| · | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {6} | {7} | {8} | {9} | {10} |
| 1 | {0,1,2,3,4,5,6,7} | {1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 2 | {1,2,3,4,5,6,7,8} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 3 | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} | {1,2,3,4,5,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,5,6,7,8,9,10} |
| 4 | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 5 | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 6 | {1,2,3,4,4,5,6,9,10 | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 7 | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 8 | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 9 | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |
| 10 | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} | {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} |

**Определение 14.** Для ромбоусеченного икосододекаэдра обозначим через $\mathfrak{RUID}$ алгебру $\langle RUID; *\rangle$ с носителем $RUID = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\})$, задаваемую следующей таблицей:

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | {5} | {6} | {7} |
| 1 | {1} | {0,2} | {1,3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,2,4,6} | {1,3,5,7} | {0,2,4,6,8} |
| 2 | {2} | {1,3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,2,4,6} | {1,3,5,7} | {0,2,4,6,8} | {1,3,5,7,9} |
| 3 | {3} | {0,2,4} | {1,3,5} | {0,2,4,}6} | {1,3,5,7} | {0,2,4,6,8} | {1,3,5,7,9} | {0,2,4,6,8,10} |

| · | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | {4} | {1,3,5} | {0,2,4, 6} | {1,3,5, 7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7,9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} |
| 5 | {5} | {0,2,4,6} | {1,3,5,7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7,9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} |
| 6 | {6} | {1,3,5,7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7,9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 7 | {7} | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7,9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 8 | {8} | {1,3,5, 7,9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 9 | {9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 10 | {10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 11 | {11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 12 | {12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 13 | {13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 14 | {14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |

| · | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | {7} | {8} | {9} | {10} | {11} | {12} | {13} | {14} |
| 1 | {0,2,4, 6,8} | {1,3,5, 7,9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 2 | {1,3,5, 7,9} | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 3 | {0,2,4, 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 4 | {1,3,5, 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |

| · | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | {0,2,4, 6,8,10, 12} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 6 | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 7 | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 8 | {1,3,5, 7,9,11, 13} 7,9 } | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} 6,8,10} | {1,3,5, 7,9,11, 13} 7,9,11} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} 6,8,10, | {1,3,5, 7,9,11, 13} 7,9,11, | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} 6,8,10, | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 9 | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 10 | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 11 | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 12 | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |
| 13 | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} |
| 14 | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} | {1,3,5, 7,9,11, 13} | {0,2,4, 6,8,10, 12,14} |

На основании полученного описания таблиц Кэли для алгебр бинарных изолирующих формул теорий архимедовых тел справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если $T$ — теория архимедовых тел, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории $T$, то алгебра $\mathfrak{B}$ задается ровно одной из следующих алгебр: алгеброй $\mathfrak{UQ}$, алгеброй $\mathfrak{UO}$, алгеброй $\mathfrak{RQO}$, алгеброй $\mathfrak{ID}$, алгеброй $\mathfrak{UT}$, алгеброй $\mathfrak{QO}$, алгеброй $\mathfrak{PQ}$, алгеброй $\mathfrak{PO}$, алгеброй $\mathfrak{UQO}$, алгеброй $\mathfrak{RID}$, алгеброй $\mathfrak{UI}$, алгеброй $\mathfrak{UD}$, алгеброй $\mathfrak{RUID}$.*

В силу предложений 1–3 полученная теорема 2 представляет описание алгебр бинарных полуизолирующих формул теорий архимедовых тел.

## 3. Заключение

В работе получены таблицы Кэли для тринадцати архимедовых тел: усеченного куба, усеченного октаэдра, ромбокубооктаэдра, икосододекаэдра, усеченного тетраэдра, кубооктаэдра, плосконосого куба, плосконосого додекаэдра, усеченного кубооктаэдра, ромбоикосододекаэдра, усеченного икосаэдра, усеченного додекаэдра, ромбоусеченного икосододекаэдра. На основании этих таблиц сформулирована теорема, описывающая все алгебры распределений бинарных формул для теорий архимедовых тел. Показано, что они полностью задаются указанными алгебрами.

## Список литературы

1. Ashkinuze V. G. On the number of semi-regular polyhedra // Matem. prosv. 1957. Vol. 1. P. 107–118.
2. On algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered expansions / K. A. Baikalova, D. Yu. Emelyanov, B. Sh. Kulpeshov, E. A. Palyutin, S. V. Sudoplatov // Russian Math. 2018. N 4. P. 1–13. https://doi.org/10.3103/s1066369x18040011
3. Baizhanov B. S. Orthogonality of one types in weakly $o$-minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov. Novosibirsk : NSTU Publisher, 1999. P. 5–28.
4. Baizhanov B. S., Sudoplatov S. V., Verbovskiy V. V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2012. Vol. 9. P. 161–184.
5. Emel'yanov D. Yu. On algebras of distributions of binary formulas for theories of unars // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2016. Vol. 17. P. 23–36. (in Russian)
6. Emel'yanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly $o$-minimal structures // Algebra and Logic. 2017. Vol. 56, N 1. P. 13–36. https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.102
7. Emel'yanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions of binary isolating formulas for quite $o$-minimal theories // Algebra and Logic. 2018. Vol. 57, no 6. P. 429–444. https://doi.org/10.33048/alglog.2018.57.603
8. Emel'yanov D. Yu., Sudoplatov S. V. On deterministic and absorbing algebras of binary formulas of polygonometrical theories// The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2017. Vol. 20. P. 32–44. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.32
9. Emel'yanov D. Yu. Algebras of binary isolating formulas for simplex theories // Algebra and Model Theory 11. Collection of papers, Novosibirsk : NSTU Publ., 2017. P. 66–74.
10. Gurin A. M. To history of studying of convex polyhedra with regular faces // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2010. Vol. 7. P. A.5–A.23.
11. Pillay A. Countable models of stable theories. // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 89, N 4. P. 666–672.

12. Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.
13. Sudoplatov S. V. Classification of countable models of complete theories. Part 1. Novosibirsk : NSTU Publ., 2018. 376 p.
14. Sudoplatov S. V. Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // J. Math. Sciences. 2010. Vol. 169, N 5. P. 680–695. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0069-9
15. Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 408–433.
16. Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories // International Mathematical Forum. 2014. Vol. 9, N 21. P. 1029–1033.

**Дмитрий Юрьевич Емельянов**, аспирант, Новосибирский государственный технический университет, Российская Федерация, 630073, г. Новосибирск, проспект К. Маркса, 20, тел.: (383) 3461166.
(e-mail: dima-pavlyk@mail.ru)

*Поступила в редакцию 25.04.19*

---

## Algebras of Distributions of Binary Formulas for Theories of Archimedean Solids

D. Yu. Emel'yanov

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation*

**Abstract**. Algebras of distributions of binary isolating and semi-isolating formulas are derived objects for given theory and reflect binary formula relations between realizations of 1-types. These algebras are associated with the following natural classification questions: 1) for a given class of theories, determine which algebras correspond to the theories from this class and classify these algebras; 2) to classify theories from a given class depending on the algebras defined by these theories of isolating and semi-isolating formulas. Here the description of a finite algebra of binary isolating formulas unambiguously entails a description of the algebra of binary semi-isolating formulas, which makes it possible to track the behavior of all binary formula relations of a given theory.

In the article we describe algebras of binary formulas for the theories of Archimedean solids. For the obtained algebras, Cayley tables are given. It is shown that these algebras are exhausted by described algebras for a truncated cube, truncated octahedron, rhombocuboctahedron, icosododecahedron, truncated tetrahedron, cubooctahedron, flat-nosed cube, flat-nosed dodecahedron, truncated cubooctahedron, rhomboicosododecahedron, truncated icosahedron, truncated dodecahedron, rhombo-truncated icosododecahedron.

**Keywords:** algebra of distributions of binary formulas, Archimedean solid.

## References

1. Ashkinuze V.G. On the number of semi-regular polyhedra. *Matem. prosv.*, 1957, vol. 1, pp. 107-118.

2. Baikalova K.A., Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Palyutin E.A., Sudoplatov S.V. On algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered expansions. *Russian Math.*, 2018, no. 4, pp. 1-13. https://doi.org/10.3103/s1066369x18040011
3. Baizhanov B.S. Orthogonality of one types in weakly *o*-minimal theories. *Algebra and Model Theory* 2, Collection of papers, Pinus A.G., Ponomaryov K.N. (eds.). Novosibirsk, NSTU Publisher, 1999, pp. 5-28.
4. Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2012, vol. 9, pp. 161-184.
5. Emel'yanov D.Yu. On algebras of distributions of binary formulas for theories of unars. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2016, vol. 17, pp. 23-36. (in Russian)
6. Emel'yanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly *o*-minimal structures. *Algebra and Logic*, 2017, vol. 56, no. 1, pp. 13-36. https://doi.org/10.17377/alglog.2017.56.102
7. Emel'yanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions of binary isolating formulas for quite *o*-minimal theories. *Algebra and Logic*, 2018, vol. 57, no. 6, pp. 429-444. https://doi.org/10.33048/alglog.2018.57.603
8. Emel'yanov D.Yu., Sudoplatov S.V. On deterministic and absorbing algebras of binary formulas of polygonometrical theories. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, 2017, vol. 20, pp. 32-44. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.32
9. Emel'yanov D.Yu. Algebras of binary isolating formulas for simplex theories. *Algebra and Model Theory* 11. Collection of papers, Novosibirsk, NSTU Publisher, 2017, pp. 66–74.
10. Gurin A.M. To history of studying of convex polyhedra with regular faces. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2010, vol. 7, pp. A.5–A.23.
11. Pillay A. Countable models of stable theories. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 89, no. 4, pp. 666-672.
12. Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 380-407.
13. Sudoplatov S.V. Classification of countable models of complete theories. Part 1. Novosibirsk, NSTU Publisher, 2018, 376 p.
14. Sudoplatov S.V. Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories. *J. Math. Sciences*, 2010, vol. 169, no. 5, pp. 680-695. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0069-9
15. Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 408-433.
16. Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories. *International Mathematical Forum*, 2014, vol. 9, no. 21, pp. 1029-1033.

**Dmitry Emel'yanov**, Postgraduate, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Ave., 630073, Novosibirsk, Russian Federation, tel.: (383)3461166 (e-mail: dima-pavlyk@mail.ru)

*Received 25.04.19*