КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Серия «Математика»
2019. Т. 27. С. 71—79

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.934; 517.977
MSC 93D05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.27.71

О задаче оптимальной стабилизации одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений

В. Р. Барсегян
Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

Т. А. Симонян
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

Т. В. Барсегян
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения

Аннотация. Возможности современной вычислительной и измерительной техники позволяют использовать наиболее адекватные математические модели по их реальному содержанию управляемых динамических процессов. В частности, математическое описание многих процессов управления из различных областей науки и техники может быть осуществлено при помощи нагруженных дифференциальных уравнений. В данной работе исследуется задача оптимальной стабилизации одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Предполагается, что в точках нагружения функция фазового состояния системы имеет левосторонние пределы. Подобные задачи возникают, например, когда при наблюдении за динамическим процессом измеряются фазовые состояния в некоторые моменты времени и информация непрерывно передается с помощью обратной связи. Эти задачи имеют важное прикладное и теоретическое значение, естественным образом возникает необходимость их исследования в различных постановках. Учитывая характер влияния нагруженных слагаемых на динамику процесса, система нагруженных дифференциальных уравнений представляется в виде поэтапно меняющихся дифференциальных уравнений. Для решения задачи оптимальной стабилизации движения поэтапно меняющейся системы поставленная задача разделяется на две части, одна из которых формулируется на конечном интервале времени, а вторая — на бесконечном интервале. Поставленные задачи решаются на основе метода функции Ляпунова. Приведен конструктивный подход построения оптимального стабилизирующего управления.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с памятью, задача оптимальной стабилизации, функция Ляпунова.

Введение

Изучение разнообразных динамических процессов управления позволяет заключить, что будущее течение многих процессов управления оказывается зависимым не только от настоящего, но и существенно определяется предысторией процесса. Математическое описание подобных процессов управления осуществляется при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также уравнениями с последействием или нагруженными дифференциальными уравнениями. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе [3;4;7;8;11;13] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы (функции) от решения, в частности, значения решения, в которых фазовое состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на динамику процесса в целом. На практике такого рода задачи возникают, например, когда при наблюдении за динамическим процессом измеряются фазовые состояния в некоторые моменты времени и информация непрерывно передается с помощью обратной связи. В последние годы проводится интенсивное исследование нагруженных дифференциальных уравнений, связанное с различными прикладными задачами механики, биологии, экологии и химии, моделируемых с помощью нагруженных уравнений.

Важное теоретическое и прикладное значение имеет исследование и решение различных задач управления и оптимальной стабилизации для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Однако наличие в динамике системы нагруженного слагаемого не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследований, развитые при исследованиях обычных (не нагруженных) динамических систем. Например, наличие нагруженных слагаемых указанного вида не позволяет непосредственно применяя метод моментов (разработанного Н. Н. Красовским) построить решение задач оптимального управления. В зависимости от характера влияния нагруженных слагаемых на динамику процесса, некоторые системы нагруженных дифференциальных уравнений представляются в виде поэтапно меняющихся дифференциальных уравнений [5; 6; 13; 14]. В работах [2; 12] рассмотрены задачи стабилизации движения нестационарной управляемой системы и синтезированы стабилизирующие оптимальные управления многосвязных систем. Исследованию вопросов существования решения нагруженных линейных дифференциальных уравнений посвящено много работ, но задачам их управления и стабилизации уделялось сравнительно мало внимания.

В данной работе исследуется задача оптимальной стабилизации одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Учитывая характер влияния нагруженных слагаемых на динамику процесса, система нагруженных дифференциальных уравнений представляется в виде поэтапно меняющихся линейных дифференциальных уравнений. На основе метода функции Ляпунова [1; 9; 10] предложен способ построения оптимального стабилизирующего управления.

1. Результаты

Рассмотрен управляемый процесс, динамика которого описывается нагруженными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u, \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, матрицы $A_k(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$ непрерывные на $[t_0, \infty)$, $u(t)$ – управляющие воздействия с размерностью $(r \times 1)$. Слагаемые $A_k(t)x(t_k)$, $k = \overline{1,3}$, как функции влияют на систему, начиная с момента времени $t \geq t_k$. Предполагается, что заданы моменты времени t_k такие, что $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$. Функция $x\,(t)$ непрерывна на интервалах $[t_{k-1},\, t_k)$ и в точках нагружения t_k имеет конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t \to t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

Пусть для нагруженной системы (1.1) имеем следующий функционал:

$$J\,[\cdot] = \sum_{k=1}^{3} J_k\,[\cdot] + J_4\,[\cdot] = \\ \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(k)} x_j(t) x_s(t) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(k)} u_j(t) u_s(t) \right] dt + \\ + \int\limits_{t_3}^{\infty} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(4)} x_j(t) x_s(t) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(4)} u_j(t) u_s(t) \right] dt, \tag{1.2}$$

где $\alpha_{js}^{(k)}$ и $\beta_{js}^{(k)}$ постоянные коэффициенты положительно-определенных квадратичных форм. Сформулируем задачу оптимальной стабилизации движения управляемой нагруженной системы следующим образом.

Требуется найти оптимальное управление u^0, которое для произвольных начальных условий обеспечивает асимптотическую устойчивость решения системы (1.1) и минимизирует функционал (1.2).

Для построения решения задачи интервал $[t_0, \infty)$ разбиваем на части точками нагружения $[t_0, \infty) = \bigcup\limits_{k=1}^{3} [t_{k-1},\, t_k) \bigcup [t_3, \infty)$. Учитывая последовательность точек нагружения и характер соответствующих слагаемых $A_k(t)x(t_k)$, $k = \overline{1,3}$, уравнение (1.1) представляется по отдельности на интервалах разбиения в виде поэтапно меняющихся дифференциальных уравнений [4].

$$\dot{x} = \begin{cases} A_0(t)x + B(t)u,\ t \in [t_0, t_1), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u,\ t \in [t_1, t_2), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + B(t)u,\ t \in [t_2, t_3), \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u,\ t \in [t_3, \infty). \end{cases} \tag{1.3}$$

Следуя [1;5], задача может быть разделена на две части, одна из которых формулируется на интервале времени $[t_0, t_3)$ с минимизирующим функционалом

$$\bar{J}\left[\cdot\right] = \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(k)} x_j\left(t\right) x_s\left(t\right) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(k)} u_j\left(t\right) u_s\left(t\right) \right] dt, \tag{1.4}$$

а вторая – на бесконечном интервале $[t_3, \infty)$ с минимизирующим функционалом

$$J_4 = \int\limits_{t_3}^{\infty} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \alpha_{js}^{(4)} x_j\left(t\right) x_s\left(t\right) + \sum_{j,s=1}^{r} \beta_{js}^{(4)} u_j\left(t\right) u_s\left(t\right) \right] dt. \tag{1.5}$$

Предполагается, что существуют определенно-положительные функции Ляпунова $\bar{V}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{3} V_k(x,t)$, $V_k(x,t)$ при $t \in [t_{k-1},\, t_k)$ $(k = \overline{1,3})$ и $V(x,t)$ при $t \in [t_3, \infty)$, где $V_k(x,t)$ $(k = 1, 2, 3)$ и $V(x,t)$ — определенно-положительные функции Ляпунова для подсистем (1.3), допускающих бесконечно малый высший предел, полные производные по времени которых вдоль решений соответствующих подсистем (1.3) являются определенно-отрицательными функциями. При данных предположениях построение функции оптимальной стабилизации применительно к системе (1.1) (или (1.3)) осуществляется на основе подхода, разработанного в работах [1, 9].

Будем искать функции Ляпунова $V_k(x,t)$ $(k=\overline{1,3})$ и $V(x,t)$ в следующем виде:

$$V_k(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^{(k)}(t)\,x_i(t)\,x_j(t)\,,\ t\in[t_{k-1},\,t_k),\ k=\overline{1,3}, \tag{1.6}$$

$$V(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^{(4)}(t)x_i(t)x_j(t),\ t\in[t_3,\infty). \tag{1.7}$$

Получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати относительно переменных $c_{ij}^{(k)}(t)$, а также системы алгебраических уравнений. Если из полученных систем удастся найти частные решения $c_{ij}^{(k)}(t)$ $(k=\overline{1,4})$ такие, что квадратичные формы (1.6) и (1.7) окажутся положительно определенными, то, согласно основной теореме об оптимальной стабилизации [1;9], задача будет решена. Если матрицы системы (1.1) не зависят от t, то вместо дифференциальных уравнений типа Риккати получим алгебраические уравнения относительно величин $c_{ij}^{(k)}$. Подставляя эти решения, т. е. значения $c_{ij}^{(k)}$ в (1.6) и (1.7), получим явные выражения функции Ляпунова $V_k(x,t)$ $(k=\overline{1,3})$ и $V(x,t)$. Следовательно, имея функции Ляпунова $V_k(x,t)$ $(k=\overline{1,3})$ и $V(x,t)$, получим оптимальные управляющие воздействия u^0. При этом оптимальные управляющие воздействия являются линейными функциями от координат фазового вектора $x(t)$.

Подставляя найденные оптимальные управляющие воздействия u^0, $t\in[t_0,\,t_1)$, в уравнение (1.3) и решая это уравнение с некоторым начальным условием $x(t_0)=x_0$ при $t\in[t_0,\,t_1)$, получим соответствующее движение $x(t)$ для промежутка времени $t\in[t_0,\,t_1)$. Учитывая, что $\lim\limits_{t\to t_k-0} x(t)=x(t_k)$ при $t=t_1$ получим значение $x(t_1)$. Принимаем конечное состояние $x(t_1)$ предыдущего этапа в качестве начального состояния для следующего этапа $t\in[t_1,t_2)$. Подставляя найденные оптимальные управляющие воздействия u^0, $t\in[t_1,t_2)$, в уравнение (1.3) и решая это уравнение, получим соответствующее движение $x(t)$ для промежутка времени $t\in[t_1,t_2)$. Продолжая эту процедуру, получим движение системы (1.3) для моментов времени $t\in[t_2,t_3)$ и $t\in[t_3,\infty)$.

Таким образом, будем иметь все значения $x(t_1)$, $x(t_2)$ и $x(t_3)$ фазового вектора $x(t)$ как начальное значение последующего этапа. Следовательно, имеем значение фазового вектора $x(t_3)$ как начальное состояние движения на интервале $[t_3,\infty)$. Далее, согласно формуле (1.4), можно вычислить минимальное значение функционала $\bar{J}[\cdot]=\sum\limits_{k=1}^{m-1} J_k[\cdot]$, а минимальное значение функционала (1.5), согласно [1; 9], будет равно выражению $V(x_1(t_3),...,x_n(t_3))$.

Заключение

В работе система линейных нагруженных дифференциальных уравнений, учитывающая характер влияния нагруженных слагаемых на динамику процесса, представляется в виде поэтапно меняющихся линейных дифференциальных уравнений. На основе метода функции Ляпунова предложен способ построения оптимального стабилизирующего управления системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Альбрехт Э. Г., Шелементьев Г. С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск, 1972. 274 с.
2. Андреев А. С., Румянцев В. В. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 18–31.
3. Бакирова Э. А., Кадирбаева Ж. М. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв.НАН РК. Сер. физ.-мат. 2016. № 5. С. 168–175.
4. Барсегян В. Р. Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 21. С. 19–32. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.19
5. Барсегян В. Р., Шагинян С. Г., Барсегян Т. В. Об одной задаче оптимальной стабилизации линейными составными системами // Изв. НАН РА. Механика. 2014. Т. 67, № 4. С. 40–52.
6. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М. : Наука, 2016. 230 с.
7. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы, 2010. 334 с.
8. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
9. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. С. 475–514.
10. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения : учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1987. 304 с.
11. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.
12. Щенникова Е. В., Дружинина О. В., Мулкиджан А. С. Об оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем // Тр. Ин-та систем. анализа РАН. Динамика неоднород. систем. 2010. Т. 53(3). С. 99–102.
13. Barseghyan V. R., Barseghyan T. V. Control problem for a system of linear loaded differential equations // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991, N 1. Art. numb. 012010. https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012010
14. Barseghyan V. R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012. Vol. 22, N 1. P. 31–39. https://doi.org/10.2298/YJOR111019002B

Ваня Рафаелович Барсегян, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Армения, 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б; профессор факультета математики и механики, Ереванский государственный университет, Армения, 0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1 тел.: (37410)523640 (e-mail: barseghyan@sci.am)

Тамара Алексановна Симонян, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики, Ереванский государственный университет, Армения, 0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
(e-mail: simtom09@gmail.com)

Тигран Ваняевич Барсегян, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Армения, 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б
(e-mail: t.barseghyan@mail.ru)

Поступила в редакцию 13.06.18

On the Problem of Optimal Stabilization of a System of Linear Loaded Differential Equations

V. R. Barseghyan

Institute of Mechanics of NAS of RA, Erevan State University, Yerevan, Armenia

T. A. Simonyan

Yerevan State University, Yerevan, Armenia

T. V. Barseghyan

Institute of Mechanics of NAS of RA, Yerevan, Armenia

Abstract. The possibilities of modern computing and measuring technologies allow using the most adequate mathematical models for the actual content of controlled dynamic processes. In particular, the mathematical description of many processes of control from various fields of science and technology can be realized with the help of loaded differential equations. In this paper we study the problem of optimal stabilization of one system of linear loaded differential equations. It is assumed that at the loading points the phase-state function of the system has left-side limits. Similar problems arise, for example, when in case of necessity to conduct an observation of a dynamic process, phase states at some moments of time are measured and information continuously is transmitted through a feedback. These problems have important practical and theoretical significance; hence the necessity for their investigations in various settings naturally arises. Taking into account the nature of the influence of the loaded terms on the dynamics of the process, the system of loaded differential equations is represented in the form of stage-by-stage change differential equations. To solve the problem of optimal stabilization of the motion of a stage-by-stage changing system, the problem is divided into two parts, one of which is formulated on a finite time interval, and the second one - on an infinite interval. The problems set up are solved on the basis of the Lyapunov function method. A constructive approach to construct an optimal stabilizing control is proposed.

Keywords: loaded differential equations, differential equations with memory, optimal stabilization problem, Lyapunov function.

References

1. Albrecht E.G., Shelementyev G.S. *Lektsii po teorii stabilizatsii* [Lectures on the theory of stabilization]. Sverdlovsk, 1972, 274 p. (in Russian).
2. Andreev A.S., Rumyantsev V.V. On stabilization of motion of a non-stationary controlled system. *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 8, pp. 1309–1321. https://doi.org/10.1134/S0005117907080036
3. Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. O razreshimosti lineynoy mnogotochechnoy krayevoy zadachi dlya nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy [On a Solvability of Linear Multipoint Boundary Value Problem for the Loaded Differential Equations]. *Izvestiya HAH PK. Ser. fiz.-mat.*, 2016, vol. 5, no. 309, pp. 168-175. (in Russian).
4. Barseghyan V.R. The control problem for a system of linear loaded differential equations with nonseparated multi-point intermediate conditions. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*[The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2017, vol. 21, pp. 19-32 (in Russian). https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.19
5. Barseghyan V.R, Shaninyan S.G., Barseghyan T.V. Ob odnoy zadache optimal'noy stabilizatsii lineynymi sostavnymi sistemami [About one problem of optimal stabilization of linear compound systems]. *Proceedings of NAS RA, Mechanics*, 2014, vol. 67, no. 4, pp. 40-52 (in Russian).
6. Barseghyan V.R. *Upravleniye sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of Compound Dynamic Systems and of Systems with Multipoint Intermediate Conditions]. Moscow, Nauka Publ., 2016, 230 p. (in Russian).
7. Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Nagruzhennyye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded Equations as a Perturbation of Differential Equations]. Almaty, 2010, 334 p. (in Russian).
8. Kozhanov A.I. Nonlinear loaded equations and inverse problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 657-678.
9. Krasovskiy N.N. *Problemy stabilizatsii upravlyayemykh dvizheniy* [Problems of stabilization of controlled motions]. In the book "'Teoriya ustoychivosti dvizheniya"' [Theory of stability of motion], Moscow, Nauka Publ., 1966, pp. 475-514. (in Russian).
10. Merkin D.R. *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti dvizheniya* [Introduction to the theory of stability of motion]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 304 p. (in Russian).
11. Nakhushev A.M. *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded Equations and their Applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012, 232 p. (in Russian).
12. Shchennikova E.V., Druzhinina O.V., Mulkijan A.S. Ob optimal'noy stabilizatsii mnogosvyaznykh upravlyayemykh sistem [On the optimal stabilization of multiple connected control systems]. *Proceedings of the Institute of System Analysis of the Russian Academy of Sciences. Dynamics of nonhomogeneous systems.* 2010, vol. 53(3), pp. 99-102. (in Russian).

13. Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. Control problem for a system of linear loaded differential equations. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 991, no. 1, art. numb. 012010. https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012010
14. Barseghyan V.R. Control of Stage by Stage Changing Linear Dynamic Systems. *Yugoslav Journal of Operations Resarch*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 31-39. https://doi.org/10.2298/YJOR111019002B

Vanya Barseghyan, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientific Researcher, Institute of Mechanics of NAS of RA, 24B, Marshal Baghramyan ave., Yerevan, 0019, Armenia; Professor of Mathematics and Mechanics Department, Erevan State University, 1, Alec Manukyan st., Yerevan, 0025, Armenia, tel: (37410) 523640
(e-mail: barseghyan@sci.am)

Tamara Simonyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Mathematics and Mechanics Department, Erevan State University, 1, Alec Manukyan st., Yerevan, 0025, Armenia
(e-mail: simtom09@gmail.com)

Tigran Barseghyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Scientific Researcher of Institute of Mechanics of NAS of RA, 24B, Marshal Baghramyan ave., Yerevan, 0019, Armenia
(e-mail: t.barseghyan@mail.ru)

Received 13.06.18