Серия «Математика»
2019. Т. 27. С. 3—14

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.716
MSC 8A99,03B50
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.27.3

О классах булевых функций, порожденных максимальными частичными ультраклонами *

С. А. Бадмаев
Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются множества мультифункций. Под мультифункцией на конечном множестве A понимается функция, определенная на множестве A и принимающая в качестве значений его подмножества. Очевидно, что суперпозиция в обычном смысле при работе с мультифункциями не подходит. Поэтому для них необходимо новое определение суперпозиции. Обычно рассматривается два способа определения суперпозиции: в основе первого лежит объединение подмножеств множества A, и в этом случае замкнутые множества, содержащие все проекции, называются мультиклонами, а в основе второго — пересечение подмножеств множества A, и замкнутые множества, содержащие все проекции, называются частичными ультраклонами. Множество мультифункций на A, с одной стороны, содержит в себе все функции $|A|$-значной логики, а с другой является подмножеством функций $2^{|A|}$-значной логики с суперпозицией, сохраняющей эти подмножества.

Для функций k-значной логики интересной является задача их классификации. Одним из известных вариантов классификации функций k-значной логики является тот, при котором функции в замкнутом подмножестве B замкнутого множества M могут быть разбиты согласно их принадлежности предполным в M классам. В данной работе в роли подмножества B выступает множество всех булевых функций, а в качестве множества M — множество всех мультифункций на двухэлементном множестве, и при этом предполными классами являются максимальные частичные ультраклоны.

Ключевые слова: мультифункция, суперпозиция, клон, ультраклон, максимальный клон.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-31-00020.

1. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^{\overline{*}} = \{f | f : E^n \to F\}, P_2^{\overline{*}} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{\overline{*}}$;

$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$;

$P_{2,n}^{-} = \{f | f : E^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\}, P_2^{-} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{-}$;

$P_{2,n}^{*} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n\}, P_2^{*} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{*}$.

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на E.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)),$$

где $f, f_1, \ldots, f_n \in P_2^{\overline{*}}$, определяла мультифункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$, следуя [1;8], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества A следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$.

Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in F^n$.

Отметим, что в настоящей работе мы будем придерживаться терминологии, принятой в [8], что позволит нам здесь не вводить дополнительных определений.

Из [2] известно, что в клоне всех мультифункций на E максимальными частичными ультраклонами являются следующие 12 множеств:

1) K_1 — множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на нулевом наборе либо значение 0, либо значение $*$;

2) K_2 — множество, состоящее из всех мультифункций f, принимающих на единичном наборе либо значение 1, либо значение $*$;

3) K_3 — множество, состоящее из всех мультифункций f, для которых выполняется одно из двух условий:

– $f(\tilde{0}) = *$ или $f(\tilde{1}) = *$;

– $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$.

4) K_4 — множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

– $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = -$;

– $f(\tilde\alpha) = f(\bar{\tilde\alpha}) = *$;

– $f(\tilde\alpha) = \overline{f(\bar{\tilde\alpha})}$, где $f(\tilde\alpha) \in \{0,1\}$.

5) K_5 — множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde\alpha$ выполняется одно из двух условий:

– $f(\tilde\alpha) = *$ или $f(\bar{\tilde\alpha}) = *$;

– $f(\tilde\alpha) = \overline{f(\bar{\tilde\alpha})}$, где $f(\tilde\alpha) \in \{0,1\}$.

6) $K_6 = P_2^- \cup \{*\}$;

7) $K_7 = P_2^*$;

8) K_8 — множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

– если $f(\tilde\alpha), f(\tilde\beta), f(\tilde\gamma) \in \{0,1\}$, то

$$f\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\\ \tilde\gamma\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$

где $\tilde\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \tilde\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n), \tilde\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i\beta_i\gamma_i) \in \{(000),(001),(010),(111)\}$ для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$;

– если существует двоичный набор $\tilde\alpha$ такой, что $f(\tilde\alpha) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde\beta$ верно $f(\tilde\beta) \neq 1$;

– пусть двоичные наборы $\tilde\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \tilde\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ такие, что $\alpha_i \le \beta_i$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$, тогда, если $f(\tilde\alpha) = *$, то $f(\tilde\beta) = *$.

9) K_9 — множество всех мультифункций f, одновременно удовлетворяющих трем условиям:

– если $f(\tilde\alpha), f(\tilde\beta), f(\tilde\gamma) \in \{0,1\}$, то

$$f\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\\ \tilde\gamma\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$

где $\tilde\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \tilde\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n), \tilde\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i\beta_i\gamma_i) \in \{(000),(011),(101),(111)\}$ для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$;

– если существует двоичный набор $\tilde\alpha$ такой, что $f(\tilde\alpha) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde\beta$ верно $f(\tilde\beta) \neq 0$;

– пусть двоичные наборы $\tilde\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \tilde\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ такие, что $\alpha_i \le \beta_i$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$, тогда, если $f(\tilde\beta) = *$, то $f(\tilde\alpha) = *$.

10) K_{10} — множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:

$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&1&1&-&\alpha\\ 0&0&1&1&1&1&0&0&-&\beta\\ 0&1&0&1&1&0&1&0&-&\gamma\\ 0&1&1&0&1&0&0&1&-&\delta \end{pmatrix},$$ где $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)^t$ – всевозможные столбцы, в которых $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \{0,1,-,*\}$ одновременно удовлетворяют двум условиям:

– в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как минимум два принимают значение $*$;
– в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$, если среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ встречается 0 или 1, то все они неравны $-$.

11) K_{11} — множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&0&-&-&0&1&-&*&*&*&*&*&*&* \\ 0&0&1&0&1&0&-&0&-&*&*&*&0&1&-&*&*&*&* \\ 0&1&0&0&1&-&0&0&-&*&*&*&*&*&*&0&1&-&* \end{pmatrix};$$

12) K_{12} – множество всех мультифункций f, сохраняющих предикат:

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&-&-&0&1&-&*&*&*&*&*&*&* \\ 0&1&0&1&1&1&-&1&-&*&*&*&0&1&-&*&*&*&* \\ 0&1&1&0&1&-&1&1&-&*&*&*&*&*&*&0&1&-&* \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}^0$ и $\tilde{\alpha}^1$ уточнения набора $\tilde{\alpha}$, в которых все значения $-$ заменили соответственно на 0 и на 1.

Далее для каждой мультифункции f однозначно определим вектор принадлежности $\tau(f) = (\tau_1, \ldots, \tau_{12})$ классам $K_1 - K_{12}$, в котором для всех $i \in \{1, \ldots, 12\}$

$$\tau_i = \begin{cases} 0, \text{если } f \in K_i; \\ 1, \text{если } f \notin K_i. \end{cases}$$

Отношение принадлежности множествам $K_1 - K_{12}$ является отношением эквивалентности и порождает разбиение $P_2^{\overline{*}}$ на классы эквивалентности. У функций из одного класса векторы принадлежности множествам $K_1 - K_{12}$ совпадают.

В данной работе определим число классов эквивалентности, которые состоят только из булевых функций. Так как каждая булева функция принадлежит классам K_6 и K_7, то максимальное число таких классов $2^{10} = 1024$.

Отметим, что классы эквивалентности и типы базисов для различных множеств функций k-значной логики изучались, например в работах [3–7; 9–12].

2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе будем считать, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$.

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

1) функция f принадлежит множеству $K_1 \bigcap K_2$ тогда и только тогда, когда f принадлежит классу K_3;

2) функция f принадлежит классу K_4 тогда и только тогда, когда f принадлежит классу K_5;

3) функция f принадлежит классу K_8 тогда и только тогда, когда f принадлежит классу K_{11};

4) функция f принадлежит классу K_9 тогда и только тогда, когда f принадлежит классу K_{12}.

Доказательство. Пункты *1)* и *2)* непосредственно следуют из определений классов $K_1 - K_5$.

3) Пусть $f \in K_{11}$. Предположим, что $f \notin K_8$. Допустим, что найдутся наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, такие, что столбец $(\alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3)^t$ совпадает с одним из столбцов $(000)^t$, $(001)^t$, $(010)^t$, $(111)^t$ для любого j и $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\alpha}^2\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Но тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\\0\end{pmatrix}$, где набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такой, что $\beta_k = -$ для тех k, для которых $(\alpha_k^1 \alpha_k^2 \alpha_k^3)^t = (010)^t$, и $\beta_k = \alpha_k^2$ для остальных k. Так как $(1-0)^t \notin R_{11}$, то получим противоречие, что $f \in K_{11}$.

Пусть теперь $f \in K_8$. Предположим, что $f \notin K_{11}$. Допустим, существуют наборы $\tilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, такие, что $(\alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3)^t \in R_{11}$ для любого j, но значение функции f на этих наборах представляет набор, который не принадлежит R_{11}. Обозначим через M матрицу, состоящую из столбцов $(\alpha_j^1 \alpha_j^2 \alpha_j^3)^t$, где $j \in \{1, \dots, n\}$. Так как перестановка строк в R_{11} не меняет его, то $f(M)$ совпадает с одним из наборов $(011)^t$, $(--0)^t$, $(--1)^t$, $(-11)^t$, $(01-)^t$. Пусть в M столбцы (100) имеют только номера $s_1, \dots, s_k$, а столбцы (-00) — номера $r_1, \dots, r_l$, где $k + l \le n$. Рассмотрим доказательство только для первых двух случаев, для оставшихся аналогично.

а) Пусть $f(M) = (011)^t$. Имеем $f(\tilde{\alpha}^{1,0}) = 0$ и $f(\tilde{\alpha}^{2,0}) = f(\tilde{\alpha}^{3,0}) = 1$. Действительно, если, например, $f(\tilde{\alpha}^{1,0}) = 1$, то $f(\tilde{\alpha}^1) \ne 0$. Заметим, что $f(\tilde{\beta}) = 0$, где $\tilde{\beta}$ — набор такой, что $\beta_i = 0$ для всех $i \in \{s_1, \dots, s_k\}$ и $\beta_i = \alpha_i^{1,0}$ для остальных i. Иначе $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{1,0}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_8$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{2,0}\\ \tilde{\alpha}^{3,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Противоречие $f \in K_8$.

б) Пусть $f(M) = (--0)^t$. Имеем $f(\tilde{\alpha}^{3,1}) = 0$, иначе $f(\tilde{\alpha}^3) \ne 0$. Заметим также, что $f(\tilde{\alpha}^{1,1}) = f(\tilde{\alpha}^{2,1}) = 1$. Действительно, если бы, например, $f(\tilde{\alpha}^{1,1}) = 0$, то поскольку обязательно найдется уточнение $\tilde{\gamma}$ набора $\tilde{\alpha}^1$, на котором значение f равно 1, получим, что $f\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}\\ \tilde{\alpha}^{1,1}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, противоречие $f \in K_8$. Рассмотрим наборы $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$ такие, что $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 1$, $\delta_i = 1$ для всех $i \in \{s_1, \dots, s_k, r_1, \dots, r_l\}$ и $\beta_i = \alpha_i^{1,1}$, $\gamma_i = \alpha_i^{2,1}$,

$\delta_i = \alpha_i^{3,1}$ для остальных i. Заметим, что $f(\tilde{\gamma}) = 0$, иначе $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{2,1}\\ \tilde{\gamma}\\ \tilde{\alpha}^{2,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_8$. Если $f(\tilde{\beta}) = 1$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{2,1}\\ \tilde{\alpha}^{3,1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_8$. Если $f(\tilde{\delta}) = 0$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^{1,1}\\ \tilde{\gamma}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_8$. Если $f(\tilde{\beta}) = 0$ и $f(\tilde{\delta}) = 1$, то $f\begin{pmatrix}\tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}^{2,1}\\ \tilde{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, что также противоречит $f \in K_8$.

4) Доказательство аналогично предыдущему пункту. $\square$

Лемма 2. *Если функция f принадлежит множеству $K_8 \bigcap K_9$, то f является либо проекцией, либо константой.*

Доказательство. Покажем, что немонотонные и нелинейные функции не могут принадлежать $K_8 \bigcap K_9$, а несохраняющие 0, несохраняющие 1 и несамодвойственные функции, принадлежащие $K_8 \bigcap K_9$, являются константами.

а) Предположим, что f не сохраняет 0, т.е. $f(\tilde{0}) = 1$. Тогда либо f является константой 1, либо существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = 0$. Во втором случае получим, что $f\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\alpha}\\ \tilde{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_8$.

б) Предположим, что f не сохраняет 1, т. е. $f(\tilde{1}) = 0$. Тогда либо f является константой 0, либо существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Во втором случае получим, что $f\begin{pmatrix}\tilde{1}\\ \tilde{\alpha}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_9$.

в) Предположим, что f — несамодвойственная функция, тогда существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = \lambda \in \{0, 1\}$. Для определенности считаем, что $\lambda = 0$. Допустим, существует набор $\tilde{\beta}$ такой, что $f(\tilde{\beta}) = 1$. Тогда $f(\tilde{1}) = 1$, иначе $f\begin{pmatrix}\tilde{1}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Но тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_9$. Если такого набора не существует, то f является константой 0. Аналогично, если $\lambda = 1$, то f является константой 1.

г) Предположим, что f — немонотонная функция, т. е. существуют наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $f(\tilde{\alpha}) = 1$, $f(\tilde{\beta}) = 0$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, что противоречит $f \in K_8$.

д) Предположим, что f — нелинейная функция, тогда в ее полиноме Жегалкина есть слагаемое степени больше 1. Если их несколько, то выберем слагаемое наименьшей степени. Не умаляя общности можно считать, что оно имеет вид $x_1x_2\dots x_k$, $k > 1$. Запишем f в виде $x_1x_2\dots x_k + ax_1 + bP(x_2, \dots, x_k) + Q(x_1, \dots, x_n) + c$, где $P(x_2, \dots, x_k) = b_2x_2 + b_3x_3 + \dots + b_kx_k$, $Q(x_1, \dots, x_n)$ – сумма слагаемых степени больше k. Далее вычислим столбец $\tilde{\lambda}_1$ значений f на наборах $(000)^t$, $(001)^t$, $(010)^t$ и столбец $\tilde{\lambda}_2$ значений f на наборах $(000)^t$, $(011)^t$, $(101)^t$. Наборы будем подставлять по следующей схеме: либо в x_1 подставляем $(001)^t$, в $x_2, \dots, x_k$ – $(010)^t$, в остальные – $(000)^t$, либо в x_1 подставляем $(011)^t$, в $x_2, \dots, x_k$ – $(101)^t$, в остальные – $(000)^t$.

Возможны случаи.

а) $a = b = c = 0$. Тогда $\tilde{\lambda}_2 = (001)^t$. Противоречие $f \in K_9$.
б) $a = b = 0, c = 1$. Тогда $\tilde{\lambda}_2 = (110)^t$. Противоречие $f \in K_9$.
в) $a = c = 0, b = 1$. Тогда $\tilde{\lambda}_2 = (100)^t$. Противоречие $f \in K_9$.
д) $a = 0, b = c = 1$. Тогда $\tilde{\lambda}_1 = (101)^t$. Противоречие $f \in K_8$.
е) $a = 1, b = c = 0$. Тогда $\tilde{\lambda}_2 = (010)^t$. Противоречие $f \in K_9$.
ж) $a = c = 1, b = 0$. Тогда $\tilde{\lambda}_1 = (110)^t$. Противоречие $f \in K_8$.
з) $a = b = 1, c = 0$. Тогда $\tilde{\lambda}_1 = (011)^t$. Противоречие $f \in K_8$.
и) $a = b = c = 1$. Тогда $\tilde{\lambda}_1 = (100)^t$. Противоречие $f \in K_8$.

Как известно, единственными булевыми функциями, которые одновременно сохраняют 0 и 1, самодвойственны, монотонны и линейны, являются проекции. □

Лемма 3. *Справедливы утверждения:*

1) функция f принадлежит множеству $K_4 \bigcap K_8$ тогда и только тогда, когда является проекцией;

2) функция f принадлежит множеству $K_4 \bigcap K_9$ тогда и только тогда, когда является проекцией.

Доказательство. 1) Очевидно, что проекции принадлежат пересечению K_4 и K_8. Докажем, что в этом пересечении нет функций отличных от проекций. Для этого предположим, что $f \in K_4 \bigcap K_8$ и покажем, что $f \in K_9$. Допустим противное, пусть найдутся наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ такие, что $(\alpha_i\beta_i\gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и

$$f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

Так как $f \in K_4$, то

$$f\begin{pmatrix}\bar{\tilde{\gamma}}\\ \bar{\tilde{\beta}}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\},$$

причем, $(\bar{\gamma}_i\bar{\beta}_i\bar{\alpha}_i) \in \{(111),(001),(010),(000)\}$. Противоречие $f \in K_8$.

Так как константы не принадлежат K_4, то по лемме 2 получим, что f является проекцией.

2) Доказательство аналогично предыдущему пункту. □

Лемма 4. *Если функция f принадлежит множеству $K_1 \bigcap K_2$ и не принадлежит классу K_4, то f не принадлежит классу K_{10}.*

Доказательство. Пусть $f \in K_1 \bigcap K_2$ и $f \notin K_4$. Так как $f \in K_1 \bigcap K_2$, то $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$. Так как $f \notin K_4$, то существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = \lambda \in \{0,1\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \lambda\\ \lambda\\ 1\end{pmatrix} \notin R_{10}$. □

Лемма 5. *Если функция f принадлежит либо множеству $K_1 \setminus K_2$, либо множеству $K_2 \setminus K_1$, то f не принадлежит классу K_4.*

Доказательство. Утверждение выполняется в силу того, что на нулевом и единичном наборах, которые являются противоположными, значения функции совпадают. □

Лемма 6. *Если функция f принадлежит либо множеству $K_1 \setminus K_2$, либо множеству $K_2 \setminus K_1$, то f либо принадлежит множеству $K_8 \bigcap K_9$, либо не принадлежит множеству $K_8 \bigcup K_9$.*

Доказательство. Докажем для случая, когда $f \in K_1 \setminus K_2$. Для случая, когда $f \in K_2 \setminus K_1$ доказательство аналогично. Имеем $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1}) = 0$. Если f – константа 0, то $f \in K_8 \bigcap K_9$. Предположим, что существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{1}\\ \tilde{\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ и $f\begin{pmatrix}\tilde{1}\\ \tilde{\alpha}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Поэтому $f \notin K_8$ и $f \notin K_9$. □

Лемма 7. *Пусть функция f принадлежит множеству $K_8 \bigcap K_9$. Тогда справедливы утверждения:*

1) если $f \in K_1 \setminus K_2$, то f является константой 0;

2) если $f \in K_2 \setminus K_1$, то f является константой 1.

Доказательство. Следует из лемм 2 и 6. □

Лемма 8. *Если функция f не принадлежит множеству $K_1 \bigcup K_2$, то f одновременно не принадлежит классам K_8 и K_9.*

Доказательство. Имеем $f(\tilde{0}) = 1$ и $f(\tilde{1}) = 0$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{1}\\ \tilde{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ и $f\begin{pmatrix}\tilde{1}\\ \tilde{0}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$. Поэтому $f \notin K_8$ и $f \notin K_9$. □

Лемма 9. *Если функция f не принадлежит множеству $K_1 \bigcup K_2$ и не принадлежит классу K_4, то f не принадлежит классу K_{10}.*

Доказательство. Так как $f \in K_1 \bigcup K_2$, то $f(\tilde{0}) = 1$ и $f(\tilde{1}) = 0$. А из того, что $f \notin K_4$, следует существование набора $\tilde{\alpha}$ такого, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = \lambda \in \{0, 1\}$. Тогда $f\begin{pmatrix}\tilde{0}\\ \tilde{\alpha}\\ \bar{\tilde{\alpha}}\\ \tilde{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda\\ 0\end{pmatrix} \notin R_{10}$. □

3. Основной результат

Теорема 1. *Множество всех булевых функций порождает 15 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам.*

Доказательство. Свойства булевых функций, описанные в леммах 1–9, позволяют понизить верхнюю оценку числа классов эквивалентности до 15.

В результате компьютерных вычислений над функциями от трех переменных были найдены 15 различных векторов принадлежности классам $K_1 - K_{12}$. В таблице ниже приведены векторы принадлежности и соответствующие им функции.

4. Заключение

Результат, полученный в данной работе, можно рассматривать как основу для дальнейших исследований разбиения множества мультифункций на двухэлементном множестве на классы эквивалентности относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам. Получив полное разбиение, можно перейти к решению задачи оценивания мощности всех возможных базисов и подсчету количества различных типов базисов одинаковой мощности.

№	$\tau(f)$	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	(000000000000)	(00001111)
2	(000000011011)	(01101001)
3	(000000011111)	(00010111)
4	(000110001101)	(00000001)
5	(000110010110)	(00111111)
6	(000110011111)	(00000111)
7	(011110000000)	(00000000)
8	(011110011011)	(00111100)
9	(011110011111)	(00000010)
10	(101110000000)	(11111111)
11	(101110011011)	(10011001)
12	(101110011111)	(10000001)
13	(111000011011)	(10010110)
14	(111000011111)	(10001110)
15	(111110011111)	(10000000)

□

Список литературы

1. Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К. О максимальных клонах частичных ультрафункций на двухэлементном множестве // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 16. С. 3–18.
2. Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 450–474. https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.040
3. Замарацкая С. В., Пантелеев В. И. О максимальных клонах ультрафункций ранга 2 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 15. С. 26–37.
4. Замарацкая С. В., Пантелеев В. И. Классификация и типы базисов ультрафункций ранга 2 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 16. С. 58–70.
5. Зинченко А. С., Пантелеев В. И. О классах гиперфункций ранга 2, порожденных максимальными мультиклонами // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 21. С. 61–76. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.61
6. Казимиров А. С., Пантелеев В. И., Токарева Л. В. Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 7. С. 61–78.
7. Казимиров А. С., Пантелеев В. И. О классах булевых функций, порожденных максимальными мультиклонами // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. и инф. 2015. № 9. С. 16–22.
8. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5. № 4. С. 46–53.

9. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 2(72). С. 329–348.
10. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations in many-valued logics // Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. Boston, 1987. P. 151–160.
11. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic. Rostock, 1989. P. 8–13. https://doi.org/10.1109/ISMVL.1989.37752
12. Miyakawa M., Stojmenović I., Rosenberg I. Classification of three-valued logical functions preserving 0 // Discrete Applied Mathematics. 1990. Vol. 28. P. 231–249. https://doi.org/10.1016/0166-218X(90)90005-W

Сергей Александрович Бадмаев, ассистент, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, Российская Федерация, 670000,Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а тел.: (3012)219757 (e-mail: `badmaevsa@mail.ru`)

Поступила в редакцию 01.02.19

On the Classes of Boolean Functions Generated by Maximal Partial Ultraclones

S. A. Badmaev

Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation

Abstract. The sets of multifunctions are considered. A multifunction on a finite set A is a function defined on the set A and taking its subsets as values. Obviously, superposition in the usual sense does not work when working with multifunctions. Therefore, we need a new definition of superposition. Two ways of defining superposition are usually considered: the first is based on the union of subsets of the set A, and in this case the closed sets containing all the projections are called multiclones, and the second is the intersection of the subsets of A, and the closed sets containing all projections are called partial ultraclones. The set of multifunctions on A on the one hand contains all the functions of $|A|$-valued logic and on the other, is a subset of functions of $2^{|A|}$-valued logic with superposition that preserves these subsets.

For functions of k-valued logic, the problem of their classification is interesting. One of the known variants of the classification of functions of k-valued logic is one in which functions in a closed subset B of a closed set M can be divided according to their belonging to the classes that are complete in M. In this paper, the subset of B is the set of all Boolean functions, and the set of M is the set of all multifunctions on the two-element set, and the partial maximal ultraclones are pre-complete classes.

Keywords: multifunction, superposition, clone, ultraclone, maximal clone.

References

1. Badmaev S.A., Sharankhaev I.K. On Maximal Clones of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2016, vol. 16, pp. 3-18. (in Russian)

2. Badmaev S.A. A Completeness Criterion of Set of Multifunctions in Full Partial Ultraclone of Rank 2. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 15, pp. 450-474. (in Russian) https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.040
3. Zamaratskaya S.V., Panteleev V.I. On Maximal Clones of Ultrafunctions of Rank 2. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2016, vol. 15, pp. 26-37. (in Russian)
4. Zamaratskaya S.V., Panteleev V.I. Classification and Types of Bases of All Ultrafunctions on Two-Element Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2016, vol. 16, pp. 58-70. (in Russian)
5. Zinchenko A.S., Panteleev V.I. On Classes of Hyperfunctions of Rank 2 Generated by Maximal Multiclones. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2017, vol. 21, pp. 61-76. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.61
6. Kazimirov A.S., Panteleyev V.I., Tokareva L.V. Classification and Enumeration of Bases in Clone of All Hyperfunctions on Two-Elements Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2014, vol. 7, pp. 61-78. (in Russian)
7. Kazimirov A.S., Panteleyev V.I. On the Classes of Boolean Functions Generated by Maximal Multiclones. *The Bulletin of Buryat State University. Mathematics and Informatics*, 2015, vol. 9, pp. 16-22. (in Russian)
8. Panteleyev V.I. On Two Maximal Multiclones and Partial Ultraclones. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 46-53. (in Russian)
9. Yablonskij S.V. On the Superpositions of Logic Functions. *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30, no. 2(72), pp. 329-348. (in Russian)
10. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations in many-valued logics. *Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. Boston*, 1987, pp. 151-160.
11. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions. *Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic. Rostock*, 1989, pp. 8-13. https://doi.org/10.1109/ISMVL.1989.37752
12. Miyakawa M., Stojmenović I., Rosenberg I. Classification of three-valued logical functions preserving 0. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, pp. 231-249. https://doi.org/10.1016/0166-218X(90)90005-W

Sergey Badmaev, assistant, Buryat State University, 24a, Smolin st., Ulan-Ude, 670000, Russian Federation, tel.: (3012)219757
(e-mail: badmaevsa@mail.ru)

Received 01.02.19