Серия «Математика»
2018. Т. 26. С. 105—120

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.98
MSC 35D35
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.105

Малые движения системы идеальных стратифицированных жидкостей, полностью покрытой крошеным льдом

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматривается линеаризованная задача о колебаниях системы слоев несжимаемой идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений данной системы. Математическая постановка начально-краевой задачи позволяет осуществить выбор функциональных пространств. Далее с помощью метода ортогонального проектирования удается совершить переход от исходной начально-краевой задачи к задаче Коши для неполного дифференциального уравнения второго порядка в сумме гильбертовых пространств. Изучение свойств операторных коэффициентов полученного уравнения позволяет доказать теорему о существовании и единственности сильного решения задачи Коши. На этой основе получены условия, при которых существует единственное сильное решение исходной начально-краевой задачи, описывающей рассматриваемую гидросистему.

Ключевые слова: идеальная стратифицированная жидкость, крошеный лед, задача Коши, операторное уравнение, сильно решение.

1. Введение

В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные и флотирующие жидкости. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Во многих случаях математические модели таких проблем существенно нелинейны и поддаются исследованию лишь численными методами. Однако ряд интересных и полезных задач можно рассматривать в рамках линейных моделей, приводящих к нетрадиционным начально-краевым задачам. Это, безусловно, определяет самостоятельный математический интерес к таким проблемам.

При исследовании реальных задач о колебаниях стратифицированной жидкости важным аспектом является не только учет непрерывного изменения плотности жидкости вдоль вертикальной координаты, но и учет возможных скачков плотности. Такие скачки (быстрые изменения плотности от одного значения к другому) встречаются в реальных ситуациях на некоторых глубинах в морях и океанах. Подобные модели, содержащие системы стратифицированных жидкостей, рассматривались в работе [9]. Были исследованы спектр и моды колебаний системы слоев идеальной стратифицированной жидкости, полностью и частично заполняющей сосуд цилиндрической формы, а также спектр колебаний многослойной вязкой стратифицированной жидкости полностью заполняющей произвольный контейнер. Доказаны теоремы существования обобщенных решений соответствующих начально-краевых задач.

Поясним теперь термин «крошеный лед». Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость, ограниченную свободной поверхностью и имеющую конечную или бесконечную глубину. Предположим, что на свободной поверхности жидкости плавают весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебаний свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало. Такая ситуация с физической точки зрения возникает, например, когда мы имеем дело с очисткой или обогащением минерального сырья с помощью известной технической процедуры, называемой флотацией, или при наличии на свободной поверхности плавающего крошеного льда. Одной из первых работ, посвященных линейной теории флотирующей жидкости, является [10]. В дальнейшем был выполнен ряд исследований, которые были обобщены и подытожены в [2]. В частности, в работе [2] изучаются вопросы разрешимости начально-краевой задачи динамики флотирующей жидкости, описывающей малые колебания однородной жидкости. Отметим работу [8], где рассматривалась одна стратифицированная жидкость, полностью покрытая крошеным льдом.

В представленной работе изучается задача о малых движениях идеальной многослойной стратифицированной жидкости в сосуде со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом. Исходная задача сводится к дифференциально-операторному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, при этом структура операторных коэффициентов имеет более сложную структуру, чем в перечисленных выше работах, что приводит к усложнению получения итоговой теоремы о разрешимости.

2. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд, частично заполненный системой из двух идеальных стратифицированных несжимаемых жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Обозначим через Ω_i $(i = 1,2)$ область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_{0i} $(i = 1,2)$, соответствующий участок твердой стенки — через S_i $(i = 1,2)$. Представим $\Gamma = \partial\Omega_2 \setminus \overline{S_2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — это нижняя и верхняя границы области Ω_2 соответственно, причем Γ_2 полностью покрыта крошеным льдом. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности раздела Γ_1. Обозначим через $\vec{n}_i$ $(i = 1,2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ $(i = 1,2)$ и направленный вне Ω_i.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_{0i} = \rho_{0i}(x_3)$ $(i = 1,2)$:

$$0 < N^2_{i,\min} \leq N^2_i(x_3) \leq N^2_{i,\max} =: N^2_{0,i} < \infty, \tag{2.1}$$
$$N^2_i(x_3) := -\frac{g\rho'_{0i}(x_3)}{\rho_{0i}(x_3)}, \qquad (i = 1,2).$$

Функции $N_i(x_3)$ $(i = 1,2)$ называют частотами Вяйсяля – Брента, или частотами плавучести. Физически $N_i(x_3)$ равна частоте колебаний, с которой частица жидкости, находящаяся на уровне $x_3 = \text{const}$, будет колебаться в стратифицированной жидкости, если сместится с этого уровня.

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_i$ $(i = 1,2)$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta_i = \zeta_i(t,\hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma_i$ представляют собой отклонение свободно движущихся поверхностей жидкостей $\Gamma_i(t)$ от Γ_i $(i = 1,2)$ по нормали $\vec{n}_i$; $p_i = p_i(t,x)$, $x \in \Omega_i$ $(i = 1,2)$ — отклонение полей давлений от равновесных; $\rho_i = \rho_i(t,x)$, $x \in \Omega_i$ $(i = 1,2)$ — отклонения полей плотности от исходных $\rho_{0i}(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом (см., например, [2; 5; 6]):

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = \rho_{0i}^{-1}(x_3)(-\nabla p_i - \rho_i g \vec{e}_3) + \vec{f}_i \quad (\text{в } \Omega_i\,), \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_i = 0, \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \rho_{0i} \cdot \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i\,),$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (\text{на } S_i\,), \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1\,), \tag{2.3}$$

$$p_1 - p_2 = \Delta\rho g \zeta_1, \quad \Delta\rho := \rho_{01} - \rho_{02} > 0 \quad (\text{на } \Gamma_1\,), \quad \int_{\Gamma_i} \zeta_i d\Gamma_i = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{на } \Gamma_2\,), \quad p_2 = g\rho_{02}\zeta_2 + \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma_2\,), \tag{2.4}$$

$$\vec{u}_i(0,x) = \vec{u}_i^0(x), \quad \rho_i(0,x) = \rho_i^0(x), \quad \zeta_i(0,\hat{x}) = \zeta_i^0(\hat{x}).$$

Записывая второй закон Ньютона для частиц ледовой крошки и линеаризуем его, получим динамическое условие 2.4 на Γ_2 (см. подробнее [2]), где ρ_0 — поверхностная плотность ледовой крошки. Последние три условия — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки, $\int_{\Gamma_i} \zeta_i d\Gamma_i = 0$ есть условие сохранения объема.

Отметим, что для классического решения задачи 2.2 — 2.4 имеет место закон баланса полной энергии:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \rho_{0i}(x_3)|\vec{u}_i|^2\, d\Omega + \rho_0 \int_{\Gamma_2} \left|\frac{\partial \zeta_2}{\partial t}\right|^2 d\Gamma_2\Bigg) +$$

$$+\Bigg(\sum_{i=1}^{2} g^2 \int_{\Omega_i} \left[\rho_{0i} N_{0i}^2\right]^{-1} |\rho_i|^2\, d\Omega_i + \rho_{02} g \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2\, d\Gamma_2 + g\Delta\rho \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2\, d\Gamma_1\Bigg)\Bigg] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \rho_{0i}(x_3) \vec{f}_i \cdot \vec{u}_i\, d\Omega_i. \tag{2.5}$$

Левая часть 2.5 представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (первая скобка) равна сумме кинетических энергий жидкостей в областях Ω_i и кинетической энергии крошеного льда. Полная потенциальная энергия (вторая скобка) равна сумме потенциальной энергии жидкости, обусловленной наличием сил плавучести, смещением свободной поверхности и поверхности раздела. Правая часть есть мощность внешних сил.

В начально-краевой задаче 2.2 — 2.4 можно исключить поля плотностей $\rho_i(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}_i(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}_i(t,x)$, связанных с $\vec{u}_i(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \vec{u}_i, \quad \operatorname{div} \vec{v}_i = 0 \quad (\, i = 1, 2\,) \quad (\text{в}\, \Omega\,). \tag{2.6}$$

Тогда вместо 2.2 придем к связи (см. подробнее, например, [8])

$$\begin{gathered}\rho_i(t,x) = -\nabla\rho_{0i}\cdot\vec{v}_i(t,x) + f_{i,0}(x) = -\rho_{0i}^{'}(x_3)v_{i,3}(t,x) + f_{i,0}(x),\\ f_{i,0}(x) := \rho_i(0,x) + \rho_{0i}^{'}(x_3)v_{i,3}(0,x), \quad v_{i,3} := \vec{v}_i\cdot\vec{e}_3,\end{gathered} \tag{2.7}$$

и к уравнениям для $\vec{v}_i(t,x)$ и $p_i(t,x)$:

$$\frac{\partial^2\vec{v}_i}{\partial t^2} = -\rho_{0i}^{-1}(x_3)\nabla p_i - N_i^2(x_3)v_{i,3}\vec{e}_3 + \psi_{i,0}(x), \quad \operatorname{div}\vec{v}_i = 0 \quad (\text{ в }\Omega_i\,),$$
$$\psi_{i,0}(x) = \vec{f}_i(t,x) - g f_{i,0}(x)\vec{e}_3/\rho_{0i}(x_3). \tag{2.8}$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу 2.2 — 2.4 в виде:

$$\frac{\partial^2\vec{v}_i}{\partial t^2} = -\rho_{0i}^{-1}(x_3)\nabla p_i - N_i^2(x_3)v_{i,3}\vec{e}_3 + \psi_{i,0}(x), \quad \operatorname{div}\vec{v}_i = 0 \quad (\text{ в }\Omega_i\,),$$
$$\vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{ на } S\,), \quad \vec{v}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{v}_2\cdot\vec{n}_2 \quad (\text{ на }\Gamma_2\,), \quad \int_{\Gamma_i} v_{i,3}d\Gamma_i = 0,$$
$$p_1 - p_2 = \Delta\rho g v_{1,3}, \quad (\text{ на } \Gamma_1\,), \quad p_2 = g\rho_{02}(0)v_{2,3} + \rho_0\frac{\partial^2 v_{2,3}}{\partial t^2} \quad (\text{ на }\Gamma_2\,),$$
$$\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial t}(0,x) = \vec{u}_i(0,x) = \vec{u}_i^0(x), \quad \vec{v}_i(0,x) = \vec{v}_i^0(x),$$
$$v_{i,3}(0,\hat{x}) = \zeta_i(0,\hat{x}) = \zeta_i^0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma_i\,), \quad i = 1,2. \tag{2.9}$$

3. Об одном ортогональном разложении гильбертова пространства

Пусть задана область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Граница области $\partial\Omega = \overline{S}\cup\Gamma$, где Γ — связное множество с $\operatorname{mes}\Gamma > 0$. Введем пространство $H_\Gamma^1(\Omega,\rho)$ функций из $H^1(\Omega,\rho)$, имеющих средним значением по Γ нуль, с нормой

$$\|p\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho)} = \int_\Omega \rho^{-1}|\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \quad \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0. \tag{3.1}$$

Как и при $\rho = \mathrm{const}$, для $H^1_\Gamma(\Omega,\rho)$ имеет место ортогональное разложение:

$$H^1_\Gamma(\Omega,\rho) = H^1_{h,S}(\Omega,\rho)\oplus H^1_{0,\Gamma}(\Omega,\rho), \tag{3.2}$$

где

$$H^1_{h,S}(\Omega,\rho) = \{\,p\in H^1_\Gamma(\Omega,\rho)\,|\quad \nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla p) = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,),$$
$$\rho^{-1}\nabla p\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{ на } S\,), \quad \int_\Gamma p\,d\Gamma = 0\,\},$$
$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega,\rho) = \{\,p\in H^1_\Gamma(\Omega,\rho)\,|\quad p = 0 \quad (\text{ на } \Gamma\,)\,\},$$

причем ортогональность в 3.2 понимается относительно скалярного произведения, соответствующего норме 3.1.

Предположим теперь, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, Γ_1 и Γ_2 — связные множества ненулевой меры, расположенные горизонтально.

Введем в рассмотрение множество

$$H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega,\rho) := \Big\{ p \in H^1_\Gamma(\Omega,\rho) |\ \nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla p) = 0 \ (\text{в } \Omega\,),$$
$$\rho^{-1}\nabla p \cdot \vec{n} = 0 \ (\,\text{на}\, S\,),\ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_1 = 0,\ \int_{\Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_2 = 0,\ \int_\Gamma p\, d\Gamma = 0 \Big\}.$$

В работе [6] доказана

Лемма 1. *Справедливо ортогональное разложение*

$$H^1_{h,S}(\Omega,\rho) = H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega,\rho) \oplus \{\alpha\,\varphi_0\}, \tag{3.3}$$

где $\{\alpha\,\varphi_0\}$ *— одномерное подпространство, а функция* φ_0 *является решением следующей краевой задачи:*

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla\varphi_0) = 0 \quad (\,\textit{в } \Omega\,), \quad \rho^{-1}\nabla\varphi_0\cdot\vec{n} = 0 \quad (\,\textit{на } S\,),\\ \varphi_0 = mes\,\Gamma_1 \quad (\,\textit{на } \Gamma_2\,), \quad \varphi_0 = -mes\,\Gamma_2 \quad (\,\textit{на } \Gamma_1\,). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Разложение 3.3 порождает разложение подпространства потенциальных полей $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho) = \vec{G}_{\widehat{h,S}}(\Omega,\rho) \oplus \{\alpha\,\rho^{-1}\nabla\varphi_0\}. \tag{3.5}$$

4. Метод ортогонального проектирования. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Для области Ω_1 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1,\rho_{01})$ в ортогональную сумму (см. [6]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1,\rho_{01}) = \vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01}) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01}) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01}). \tag{4.1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01}) := \{\, \vec{u}_1 \mid \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1\,),\ \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = 0 \ (\,\text{на } \partial\Omega_1\,)\,\},$$
$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01}) := \{\, \vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 = \rho_{01}^{-1}(x_3)\nabla p_1,\ \vec{v}_1\cdot\vec{n}_1 = 0 \ (\,\text{на } S_1\,),$$
$$\nabla\cdot\vec{v}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1\,),\ \int_{\Gamma_1} p_1\, d\Gamma_1 = 0\,\},$$
$$\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01}) := \{\, \vec{w}_1 \mid \vec{w}_1 = \rho_{01}^{-1}(x_3)\nabla\varphi_1,\ \varphi_1 = 0 \ (\,\text{на } \Gamma_1\,)\,\}.$$

Будем считать $\vec{u}_1(t,x)$ и $\rho_{01}^{-1}\nabla p_1(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega,\rho_{01})$, тогда в силу уравнений и граничных условий 2.9, ортогонального разложения 4.1 имеем

$$\vec{v}_1(t,x)\in \vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01})\oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01})=\vec{J}_{0,S_1}\left(\Omega_1,\rho_{01}\right),$$
$$\rho_{01}^{-1}\nabla p_1(t,x)\in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01})\oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01})=\vec{G}\left(\Omega_1,\rho_{01}\right).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{gathered}\vec{v}_1(t,x)=\vec{w}_1(t,x)+\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1(t,x),\\ \vec{w}_1(t,x)\in\vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01}),\quad \rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1(t,x)\in\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01}),\\ \rho_{01}^{-1}\nabla p_1(t,x)=\rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,1}(t,x)+\rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2}(t,x),\\ \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,1}(x,t)\in\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01}),\quad \rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2}(t,x)\in\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01}).\end{gathered}\tag{4.2}$$

Обозначим через $P_{0,1}$, P_{h,S_1} и P_{0,Γ_1} ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01})$, $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01})$, $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01})$ соответственно. Тогда, подставляя 4.2 в первое уравнение 2.9 для $i=1$ и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2\vec{w}_1}{\partial t^2}+P_{0,1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}+w_{1,3}\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,1}\psi_{1,0},\tag{4.3}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1\right)+\rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,1}+P_{h,S_1}\left[N_1^2\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}+w_{1,3}\right)\vec{e}_3\right]=P_{h,S_1}\psi_{1,0},$$
$$\rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2}+P_{0,\Gamma_1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}+w_{1,3}\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,\Gamma_1}\psi_{1,0}.\tag{4.4}$$

Из 4.4 следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_{01}^{-1}\nabla p_{1,2}$, определяется лишь полем вертикального смещения $v_{1,3}$ и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничных условий и начальных данных с соответствующей заменой $p_1\to p_{1,2}$, так как $p_1=p_{1,1}+p_{1,2}$, $p_{1,2}=0$ (на Γ_1).

Для области Ω_2 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_{02})$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_{02})=\vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}).\tag{4.5}$$

Подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{02})$ из 4.5 состоит из квазипотенциальных гармонических полей с нулевой нормальной составляющей на твердой стенке S_2, для которых также выполнено условие сохранения объема по всей границе $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. В изучаемой задаче, в силу несжимаемости жидкостей, условие сохранения объема должно выполняться на каждой из границ Γ_1 и Γ_2 в отдельности. Отсюда следует, что подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{02})$ шире, чем требуется. В связи с этим, воспользуемся разложением этого подпространства в ортогональную сумму двух подпространств (см. 3.5), естественным образом приспособленных к данной задаче.

Учитывая 3.5 и 4.5, введем ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_{02})=\vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\{\alpha\,\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0\}\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}),$$

где $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Введем также ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,2},\ P_{\widehat{h,S_2}},\ P_{\varphi},\ P_{0,\Gamma}$.

Как и прежде, в силу условия соленоидальности и условия непротекания на твердой стенки S_2 считаем, что $\vec{v}_2\in\vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})$.

Поле $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ квазипотенциально, поэтому

$$\rho_{02}^{-1}\nabla p_2\in\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\{\alpha\rho_{02}^{-1}\,\nabla\varphi_0\}\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}).$$

Представим поля $\vec{v}_2$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ в виде:

$$\begin{gathered}\vec{v}_2=\vec{w}_2+\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2,\qquad\vec{w}_2\in\vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02}),\quad\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2\in\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}),\\ \rho_{02}^{-1}\nabla p_2=\rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,1}+\rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,2}+\alpha(t)\,\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0,\\ \rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,1}\in\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02}),\quad\rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,2}\in\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_{02}).\end{gathered}\tag{4.6}$$

Подставим эти представления в уравнение движения для идеальной жидкости из Ω_2 и применим к нему ортопроекторы. Получим:

$$\frac{\partial^2\vec{w}_2}{\partial t^2}+P_{0,2}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}+w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,2}\psi_{2,0},\tag{4.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2)+\rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,1}+P_{\widehat{h,S_2}}\left[N_2^2\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}+w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right]=P_{\widehat{h,S_2}}\psi_{2,0},$$

$$\alpha(t)\rho_{02}^{-1}\nabla\varphi_0+P_{\varphi}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}+w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right]=P_{\varphi}\psi_{2,0},\tag{4.8}$$

$$\rho_{02}^{-1}\nabla p_{2,2}=+P_{0,\Gamma}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}+w_{2,3}\right)\vec{e}_3\right]=P_{0,\Gamma}\psi_{2,0}.\tag{4.9}$$

Соотношения 4.8 и 4.9 показывают, что $\alpha\,\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2}$ определяется лишь полем вертикального смещения $v_{2,3}$ и начальными условиями. Учитывая тривиальные соотношения 4.8, 4.9, в дальнейшем будем рассматривать для идеальной жидкости из Ω_2 уравнения 4.7.

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$\nabla\cdot(\rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_1)=0\quad(\text{в }\Omega_2),\quad\rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2=0\quad(\text{на }S_2),$$

$$\rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2=0\ (\text{на }\Gamma_2),\ \rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2=\eta_1\ (\text{на }\Gamma_1),\ \int_\Gamma\Psi_1\,d\Gamma=0.$$

Вспомогательная задача II.

$$\nabla\cdot(\rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_2)=0 \quad (\text{ в } \Omega_2\,), \quad \rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2=0 \quad (\text{ на } S_2\,),$$

$$\rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2=0 \;(\text{ на } \Gamma_1\,),\; \rho_{02}^{-1}\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2=\eta_2 \;(\text{ на } \Gamma_2\,),\; \int_\Gamma \Psi_2\,d\Gamma=0.$$

Задачи I и II — это задачи Неймана. Если $\eta_1\in\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача I имеет единственное решение $\Psi_1\in H^1_\Gamma(\Omega_2,\rho_{02})$, аналогично, если $\eta_2\in\widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$, то задача II имеет единственное решение $\Psi_{2,2}\in H^1_\Gamma(\Omega_2,\rho_{02})$ (см. [5, с.45]). Символом $\widetilde{\ }$ обозначен класс функций из $H_{\Gamma_i}^{-1/2}$ продолженных нулем на всю границу $\partial\Omega_i$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_i)$ $(i=1,2)$ (см. [1;4]).

Введем по решениям задач I и II операторы:

$$\begin{aligned} &\rho_{02}^{-1}P_{\Gamma_1}\Psi_1|_{\Gamma_1}=:S_1\eta_1, \quad \rho_{02}^{-1}P_{\Gamma_2}\Psi_1|_{\Gamma_2}=:S_2\eta_1,\\ &\rho_{02}^{-1}P_{\Gamma_1}\Psi_2|_{\Gamma_1}=:S_3\eta_2, \quad \rho_{02}^{-1}P_{\Gamma_2}\Psi_2|_{\Gamma_2}=:S_4\eta_2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь следует отметить, что оператор S_1 — самосопряженный, положительный и компактный в L_{2,Γ_1}, а оператор S_4 — самосопряженный, положительный и компактный в L_{2,Γ_2}.

Вспомогательная задача III.

$$\nabla\cdot(\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1)=0 \;(\text{ в } \Omega_1\,), \quad \rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1\cdot\vec{n}_1=0 \quad (\text{ на } S_1\,),$$

$$\rho_{01}^{-1}(0)\nabla\Phi_1\cdot\vec{n}_1=\eta_0 \quad (\text{ на } \Gamma_1\,), \quad \int_{\Gamma_1}\Phi_1\,d\Gamma_1=0.$$

Задача III — это задача Неймана. Если $\eta_0\in\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_1\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1,\rho_{01})$. Введем по решению задачи III оператор:

$$\rho_{01}^{-1}P_{\Gamma_1}\Phi_1|_{\Gamma_1}=:S_0\eta_0,$$

оператор S_0 является самосопряженным, положительным и компактным в L_{2,Γ_1}.

5. Приведение системы к дифференциально-операторному уравнению

Введем новые переменные

$$\begin{gathered} \rho_{01}^{-1}\nabla m_1=P_{h,S_1}\left[N_1^2(x_3)\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\right], \rho_{01}^{-1}\nabla k_1=P_{h,S_1}\left(N_1^2(x_3)w_{1,3}\vec{e}_3\right),\\ \rho_{01}^{-1}\nabla F_1=P_{h,S_1}\psi_{1,0}, \qquad \rho_{02}^{-1}\nabla F_2=P_{\widehat{h,S_2}}\psi_{2,0}, \qquad (5.1)\\ \rho_{02}^{-1}\nabla m_2=P_{\widehat{h,S_2}}\left[N_2^2(x_3)\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_3\right], \rho_{01}^{-1}\nabla k_2=P_{\widehat{h,S_2}}\left(N_2^2(x_3)w_{2,3}\vec{e}_3\right). \end{gathered}$$

Тогда из вторых уравнений 4.3 и 4.7 приходим к следующим интегралам Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t^2}+p_{i,1}+m_i+k_i=F_i+c_i(t)\quad(\text{в}\,\Omega_i\,)\quad(i=1,2),\tag{5.2}$$

где $c_i(t)$ — произвольная функция времени.

Рассмотрим 5.2 на Γ_i $(i=1,2)$ и перепишем условия на Γ_1 и Γ_2 в следующем виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Phi_1|_{\Gamma_1}-\Phi_2|_{\Gamma_1}\right)+g\Delta\rho\left(\rho_{01}^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_1}+ \\ +P_{\Gamma_1}m_1+P_{\Gamma_1}k_1-P_{\Gamma_1}m_2-P_{\Gamma_1}k_2=P_{\Gamma_1}F_1-P_{\Gamma_1}F_2\;(\text{ на }\Gamma_1),\tag{5.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Phi_2|_{\Gamma_2}+\rho_0\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2}\right)+g\rho_{02}\left(\rho_{02}^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right)_{\Gamma_2}+ \\ +P_{\Gamma_2}m_2+P_{\Gamma_2}k_2=P_{\Gamma_2}F_2\;(\text{ на }\;\Gamma_2).\tag{5.4}$$

В силу принадлежности $\rho_{02}^{-1}\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})$ и определения пространства $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})$ потенциал Φ_2, с помощью решений I и II вспомогательных задач, можно представить в виде:

$$\Phi_2=\Psi_1+\Psi_2,\tag{5.5}$$

при этом разложим пространство $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_2)$ в виде следующей прямой суммы:

$$\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_{02})=\vec{G}_1(\Omega_2,\rho_{02})\oplus\vec{G}_2(\Omega_2,\rho_{02}),\tag{5.6}$$

где

$$\vec{G}_1(\Omega_2,\rho_{02}):=\{\rho_{02}^{-1}\nabla p\,|\;\nabla(\rho_{02}^{-1}\nabla p)=0\;(\text{ в }\;\Omega_2\,),\;\rho_{02}^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0\;(\text{ на }\;S_2\,), \\ \rho_2^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0\;(\text{ на }\;\Gamma_2\,),\;\int_\Gamma p\,d\Gamma=0\},$$

$$\vec{G}_2(\Omega_2,\rho_{02})=:\{\rho_{02}^{-1}\nabla p\,|\,\nabla(\rho_{02}^{-1}\nabla p)=0\;(\text{ в }\;\Omega_2\,),\;\rho_{02}^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0\;(\text{ на }\;S_2\,), \\ \rho_{02}^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2=0\;(\text{ на }\;\Gamma_1\,),\;\int_\Gamma p\,d\Gamma=0\}.$$

Выразив $P_{\Gamma_i}(\Phi_i)$ $(i=1,2)$ с помощью представления 5.5 и операторов S_j $(j=\overline{0,4})$ при этом учитывая, что

$$\eta_0=\left(\rho_{01}^{-1}(\partial\Phi_1/\partial x_3)\right)_{\Gamma_1}=-\left(\rho_{02}^{-1}(\partial\Phi_2/\partial x_3)\right)_{\Gamma_1}=-\eta_1,$$

приходим вместо 5.3 и 5.4 к системе уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left((\rho_{01}S_0+\rho_{02}S_1)\eta_0-\rho_{02}S_3\right)+g\Delta\rho\eta_0+$$
$$+P_{\Gamma_1}m_1+P_{\Gamma_1}k_1-P_{\Gamma_1}m_2-P_{\Gamma_1}k_2=P_{\Gamma_1}F_1-P_{\Gamma_1}F_2:=\widehat{F}_1, \tag{5.7}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\rho_{02}S_2\eta_0+(\rho_{02}S_4+\rho_0I_2)\eta_2\right)+g\rho_{02}\eta_2+$$
$$+P_{\Gamma_2}m_2+P_{\Gamma_2}k_2=P_{\Gamma_2}F_2:=\widehat{F}_2. \tag{5.8}$$

В дальнейшем все искомые функции и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt.

Начально-краевая задача 2.9 перепишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}:=\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H,\quad \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)=\vec{J}_0(\Omega_1,\rho_{01})\oplus\vec{J}_0(\Omega_2,\rho_{02}),$$
$$H:=H_1\oplus H_2,\quad H_i=L_2(\Gamma_i)\ominus\{1_i\}\quad (i=1,2),$$

в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}\mathcal{X}+\mathcal{B}_g\mathcal{X}=\mathcal{F},\quad \mathcal{X}(0)=\mathcal{X}^0,\quad \mathcal{X}'(0)=\mathcal{X}^1. \tag{5.9}$$
$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix}I_0 & 0\\ 0 & M\end{pmatrix},\quad \mathcal{B}_g:=\mathcal{I}+\mathcal{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & gI_H\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Здесь $I_0=\operatorname{diag}(I_{01},I_{02})$, I_{0i} — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega_i,\rho_{0i})$, $I_H=\operatorname{diag}(\Delta\rho I_1,\rho_{02}I_2)$, I_i — единичные операторы в H_i, $\mathcal{X}:=(\vec{w};\eta)^t$, $\mathcal{F}:=(F_\psi,F)^t$, $F=(\widehat{F}_1;\widehat{F}_2)^t$, $F_\psi=(P_{h,S_1}\psi_{1,0},P_{\widehat{h,S_1}}\psi_{2,0})^t$, $\vec{w}=(\vec{w}_1;\vec{w}_2)^t$, $\eta=(\eta_0;\eta_2)^t$,

$$M:=\begin{pmatrix}\rho_{01}S_0+\rho_{02}S_1 & -\rho_{02}S_3\\ -\rho_{02}S_2 & \rho_{02}S_4+\rho_0I_2\end{pmatrix},\quad B_{11}:=\begin{pmatrix}B_{11}^1 & 0\\ 0 & B_{11}^2\end{pmatrix}, \tag{5.11}$$
$$B_{12}:=\begin{pmatrix}B_{12}^1 & 0\\ 0 & B_{12}^2\end{pmatrix},\quad B_{21}:=\begin{pmatrix}B_{21}^1 & \widehat{B}_{21}^1\\ 0 & B_{21}^2\end{pmatrix},\quad B_{22}:=\begin{pmatrix}B_{22}^1 & \widehat{B}_{22}^1\\ 0 & B_{22}^2\end{pmatrix}; \tag{5.12}$$

$$B_{11}^i\vec{w}_i:=P_{0,i}\left(N_i^2(x_3)w_{i,3}\vec{e}_3\right),\quad B_{12}^i\eta_i:=P_{0,i}\left(N_i^2(x_3)(U_i\eta_i)\vec{e}_3\right),$$
$$B_{21}^i\vec{w}_i:=P_{\Gamma_i}k_i,\ \widehat{B}_{21}^1\vec{w}_2:=-P_{\Gamma_1}k_2,\ B_{22}^i\vec{\eta}_i:=P_{\Gamma_i}m_i,\ \widehat{B}_{22}^1\vec{\eta}_2:=-P_{\Gamma_1}m_2,$$

где $i=1$ соответствует η_0 и через $U_1:\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}\to\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_{01})$ обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи

III ставит в соответствие элементу $\eta_0 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$ функцию $\rho_{01}^{-1}\nabla\Phi_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_{01})$, аналогично $U_2 : \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2} \to \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_{02})$.

Начальные условия 5.9 также можно записать:

$$\eta^0 = \left(\eta_0^0(\hat{x}), \eta_2^0(\hat{x})\right)^t, \quad \eta^1 = \left(\eta_0^1(\hat{x}), \eta_2^1(\hat{x})\right)^t, \tag{5.13}$$

где $\eta_0^1(\hat{x}) = \left[\left(P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x)\right) \cdot \vec{n}_1\right]_{\Gamma_1}$, $\eta_2^1(\hat{x}) = \left[\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)\right) \cdot \vec{n}_2\right]_{\Gamma_2}$, причем для начальных данных, в силу разложения 5.6, должно выполняться следующее кинематическое условие:

$$\gamma_1 P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x) = -\gamma_2 \Pi_1 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x) \quad (\text{ на } \Gamma_1\,). \tag{5.14}$$

Здесь через Π_1 обозначен проектор на подпространство $\vec{G}_1(\Omega_2, \rho_)02)$, через символы γ_i — операция взятия нормального следа на Γ_1 для полей, заданных в области Ω_i $(i = 1, 2)$.

Итогом проведенных рассуждений является

Лемма 2. *Классическое решение задачи 2.9 является решением задачи Коши 5.9, 5.13 в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Рассмотрим свойства операторных блоков из 5.9.

Лемма 3. *Оператор M из 5.11 ограничен, самосопряжен и положительно определен.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы M.

Найдем квадратичную форму оператора M, для любого $\eta \in H$ имеем

$$(M\eta, \eta) = \left(\begin{pmatrix} (\rho_{01}S_0 + \rho_{02}S_1)\eta_0 - \rho_{02}S_3\eta_2 \\ -\rho_{02}S_2\eta_0 + (\rho_{02}S_4 + \rho_0 I_2)\eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= (\rho_{01}S_0\eta_0, \eta_0) + (\rho_{02}S_1\eta_0 - \rho_{02}S_3\eta_2, \eta_0) + (-\rho_{02}S_2\eta_0 + \rho_{02}S_4\eta_2, \eta_2) +$$
$$+\rho_0(\eta_2, \eta_2) = (\rho_{01}S_0\eta_0, \eta_0) + (-\rho_{02}P_{\Gamma_1}\Phi_2, \eta_0) + (\rho_{02}P_{\Gamma_2}\Phi_2, \eta_2) + \rho_0(\eta_2, \eta_2) =$$
$$= \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_2 + \rho_0 \int_{\Gamma_2} |\eta_2|^2\, d\Gamma_2.$$

С учетом ограниченности оператора M из последнего видно, что он самосопряжен и положительно определен. □

Лемма 4. *Оператор $\mathcal{B}$ из 5.10 самосопряженный ограниченный и неотрицательный оператор.*

Доказательство следует из равенства (см. подробнее [8])

$$(B\mathcal{X},\mathcal{X})_{\mathcal{H}} = \left(\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{w}\\ \eta\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} =$$
$$= (B_{11}\vec{w},\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{12}\eta,\vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega,\rho_0)} + (B_{21}\vec{w},\eta)_H + (B_{22}\eta,\eta)_H =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} N_i^2(x_3)\rho_{0i}(x_3)\left|w_{i,3} + \left(\rho_{0,i}^{-1}\nabla\Phi_i\cdot\vec{e}_3\right)\right|^2 d\Omega_i.$$

6. Теорема существования сильного решения

Исходя из формулировок задач 2.2 — 2.4 и 5.9 дадим (согласованные между собой) определения так называемых сильных по переменной t решений этих задач.

Определение 1. *Назовем функцию $\mathcal{X}(t)$, заданную на отрезке $[0,T]$, сильным решением задачи 5.9 со значениями в $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus H$, если выполнены следующие условия:*

1. $\mathcal{A}\mathcal{X}(t)\in C^2([0,T];\mathcal{H})$, $\mathcal{B}\mathcal{X}(t)\in C([0,T];\mathcal{H})$;
2. *выполнено уравнение и начальные условия из 5.9.*

Определение 2. *Сильным (по переменной t) решением задачи 2.2 — 2.4 на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}_i(t,x)$, $p_i(t,x)$, $\rho_i(t,x)$ и $\zeta_i(t,\hat{x})$, $(i=1,2)$ для которых выполнены следующие условия:*

1. $\vec{u}_i(t)\in C^1\left([0,T];\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_{0i})\right)$, $\rho_{0i}^{-1}\nabla p_i\in C\left([0,T];\vec{G}(\Omega_i,\rho_{0i})\right)$, $\rho_i(t)\in C^1([0,T];\mathfrak{L}_2(\Omega_i))$ *и при любом $t\in[0,T]$ справедливо первое уравнение 2.2, где $\mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением*

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_i)} := g^2\int_{\Omega_i}\left[\rho_{0i}(x_3)N_i^2(x_3)\right]^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega_i;$$

2. *выполнены граничные условия на Γ_i:*
$\partial\zeta_i/\partial t\in C([0,T];H_i)$,
$p_1 = p_2 + \Delta\rho g\zeta_1\in C([0,T];H_1)$,
$p_2 = g\rho_{02}\zeta_2 + \rho_0(\partial^2\zeta_2/\partial t^2)\in C([0,T];H_2)$,
где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в H_i.
3. *выполнены начальные условия.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}_i^0 \in \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_{0i}), \quad \rho_i^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega_i), \quad \zeta_i^0 \in H_i = L_2(\Gamma_i) \ominus \{1_{\Gamma_i}\},$$
$$\left[\left(P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x)\right)\cdot \vec{n}_1\right]_{\Gamma_1} \in H_1, \quad \left[\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)\right)\cdot \vec{n}_2\right]_{\Gamma_2} \in H_2, \tag{6.1}$$
$$\vec{f}_i(t) \in C^1\left([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_i, \rho_{0i})\right).$$

причем $\gamma_1 P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x) = -\gamma_2 \Pi_1 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)$ *(на* Γ_1 *) (см. подробнее 5.14). Тогда каждая из задач 2.2 — 2.4 и 5.9 имеет единственное сильное по* t *решение.*

Доказательство. Пусть выполнены условия 6.1, тогда задача Коши 5.9 имеет единственное сильное по t решение. Действительно, с одной стороны, в уравнении 5.9 оператор $\mathcal{A}$ с учетом его определения 5.9 и леммы 3 удовлетворяет следующим свойствам: $0 << \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — пространство ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Однако, операторный коэффициент при искомой функции не является положительно определенным оператором, а именно $0 \leq \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (лемма 4). Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см., например, [3, с.133]). С другой стороны, из работы [7] (лемма 1) для существования сильного решения задачи 5.9 достаточно выполнения условий, которые следуют из условий 6.1.

Дальнейшее доказательство основано на обратном переходе от задачи Коши 5.9 к начально-краевой задаче 2.2 — 2.4. □

7. Заключение

В работе рассмотрена линеаризованная задача о колебаниях многослойной идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом. С помощью метода ортогонального проектирования удается совершить переход от исходной начально-краевой задачи к задаче Коши для неполного дифференциального уравнения второго порядка в сумме гильбертовых пространств. Изучение свойств операторных коэффициентов полученного уравнения позволяет доказать теорему о существовании и единственности сильного решения задачи Коши. На этой основе получены условия, при которых существует единственное сильное решение исходной начально-краевой задачи, описывающей рассматриваемую гидросистему.

Список литературы

1. Агронович М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57, вып. 5 (347). С. 3–78. https://doi.org/10.4213/rm552
2. Габов С. А., Свешников А. Г. Математические задачи динамики флотирующей жидкости // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1990. № 28. С. 3–86. https://doi.org/10.1007/BF01138947
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 534 с.
4. Копачевский Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. Симферополь : Форма, 2016. 280 с.
5. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М. : Наука, 1989. 416 с.
6. Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. Колебания стратифицированных жидкостей // Соврем. математика. Фундам. направления. 2008. Т. 29. С. 103–130.
7. Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом // Таврич. Вестн. информатики и математики. 2018. Вып. 1 (38). С. 31–39.
8. Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом // Уфим. мат. журн. 2018. Т. 10, № 3. С. 44–59. https://doi.org/10.13108
9. Темченко Т. П. Спектральные и эволюционные задачи колебаний стратифицированных жидкостей : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. М., 1989. 147 с. https://search.rsl.ru/ru/record/01007932205
10. Petters A.S. The effect of a floating mat on the water waves // Communs Pure and Appl. Math. 1950. Vol. 3, N 4. P. 319–354.

Денис Олегович Цветков, кандидат физико-математических наук, доцент, Таврическая академия, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, 295000, г. Симферополь, просп. акад. Вернадского, 4, Российская Федерация, (e-mail: tsvetdo@gmail.com)

Поступила в редакцию 10.10.18

Small Movements of a System of Ideal Stratified Fluids Completely Covered with Crumbled Ice

D. O. Tsvetkov

Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation

Abstract. We study the problem on small motions of two non mixing ideal stratified fluids with a free surface, covered with crumbling ice. Using method of orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface and the introduction of auxiliary problems of the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for a differential equation of second order in some Hilbert space. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system.

Keywords: stratification effect in ideal fluids, initial boundary value problem, differential equation in Hilbert space, Cauchy problem, strong solution.

References

1. Agranovich M.S. Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. *Russian Math. Surveys*, 2002, vol. 57, no. 5, pp. 847–920. https://doi.org/10.4213/rm552
2. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. Problems in the dynamics of flotation liquids. *J. Math. Sci.*, 1991, vol. 54, no.4, pp. 979-1041. https://doi.org/10.1007/BF01138947
3. Daletsky Yu.L., Krein M.G. *Stability of solutions of differential equations in a Banach space.* Moscow, 1970, 534 p. (in Russian)
4. Kopachevskii N.D. *Abstract green's formula and its applications.* Simferopol, 2016, 280 p. (in Russian)
5. Kopachevskii N.D., Krein S.G., Ngo Zuy Can. *Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems.* Moscow, Nauka Publ., 1989, 416 p. (in Russian)
6. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. Oscillations of stratified fluids. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 164, no. 4, pp. 574-602. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9764-9
7. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. Cauchy problem generated by oscillations of stratified fluid partially closed by ice. *Tavricheskij vestnik informatiki i matematiki*, 2018, vol. 1, no. 38, pp. 31-39 (in Russian)
8. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. Small motions of ideal stratified liquid with a free surface totally covered by a crumbled ice. *Ufa Mathematical Journal,* 2018, vol. 10, no. 3, pp. 44–59. DOI: 10.13108/2018-10-3-43
9. Temchenko T.P. Spectral and evolutionary the problems of the oscillations of a stratified fluids. Cand. sci. diss. Moscow, 1989, 147 p. https://search.rsl.ru/ru/record/01007932205
10. Petters A.S. The effect of a floating mat on the water waves. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1950, vol. 3, no. 4, pp. 319-354.

Denis Tsvetkov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Taurida Academy, Crimean Federal University, 4, Vernadskii pr., Simferopol, 295007, Russian Federation (e-mail: `tsvetdo@gmail.com`)

Received 10.10.18