Серия «Математика»
2018. Т. 26. С. 47—61

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.54+512.57
MSC 17B40, 17B30
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.47

Автоморфизмы некоторых магм порядка $k + k^2$*

А. В. Литаврин
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. Данная работа посвящена изучению автоморфизмов конечных магм и представлению симметрической группы перестановок S_k и ее некоторых подгрупп группами автоморфизмов конечных магм. Теория, изучающая группы автоморфизмов магм, хорошо разработана и представлена множеством работ, когда магма является квазигруппой, полугруппой, петлей, моноидом или группой. Также встречаются исследования, в которых рассматриваются вопросы, связанные с изучением автоморфизмов магм, не являющихся полугруппой или квазигруппой.

В статье вводятся некоторые конечные магмы $\mathfrak{S} = (V, *)$ порядка $k+k^2$. Для магмы $\mathfrak{S}$ удалось описать группу автоморфизмов и записать общий вид автоморфизма. Кроме того, выявилась связь между автоморфизмами магм $\mathfrak{S}$ и перестановками конечного множества из k элементов. Все автоморфизмы магмы $\mathfrak{S}$ параметризованы перестановками из некоторой подгруппы (дается описание этой подгруппы) симметрической группы перестановок S_k.

Кроме того, установлено, что группа S_k изоморфна группе всех автоморфизмов $Aut\ (\mathfrak{S})$ подходящей магмы $\mathfrak{S}$ порядка $k + k^2$.

Ключевые слова: автоморфизмы магмы, автоморфизмы группоида, группы автоморфизмов.

1. Введение

Алгебраическую систему с одной бинарной алгебраической операцией, как обычно, называем магмой (наряду с «магмой» распространен термин «группоид»). Примерами магм являются группы, полугруппы, квазигруппы и моноиды. Для каждой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ (определение см. [9, стр. 46]) определена группа автоморфизмов $Aut\ (\mathfrak{A})$ (см. [13, стр. 21]).

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 16-01-00707.

В данной работе изучаются группы автоморфизмов некоторых конечных магм $\mathfrak{A} = (V, *)$ порядка $k + k^2$. При этом магма $\mathfrak{A}$ такая, что в множестве V можно выделить подмножество M порядка k, для которого будут справедливы равенства

$$V = M \cup (M * M), \quad |M * M| = |M| \cdot |M| = k^2. \tag{1.1}$$

Основные результаты работы сформулированы в виде теорем 1 и 2. Формулировке основных результатов предшествует исторический обзор и постановка основных задач.

Изучение автоморфизмов классических групп началось достаточно давно. В 1928 году вышла работа [22], которая дает описание автоморфизмов группы $PSL_n(P)$ над произвольным полем P для $n \geq 3$. Исследования автоморфизмов классических линейных групп отражаются в известных работах [10; 12; 21] и др. Кроме того, активно изучались автоморфизмы алгебр и групп Шевалле (с.м. [7; 8; 17–19; 23]).

Исследования автоморфизмов матричных полугрупп представлены в работах [2; 3; 11] и [14]. Исследования автоморфизмов квазигрупп см. работу [15] и др. В работе [16] изучаются автоморфизмы некоторых специальных матричных магм. Исследованию вопросов, связанных с автоморфизмами конечных магм, посвящены работы [5] и [6]. В [5] приведена классификация конечных магм $\mathfrak{D} = (D, *)$, имеющих 2-транзитивную на множестве D группу автоморфизмов $Aut\ (\mathfrak{D})$. В [6] построены две серии магм, допускающие $SL(2, q)$ транзитивной (транзитивной на множестве носителе) подгруппой автоморфизмов.

С группами автоморфизмов традиционно связывают задачу

Задача 1. *Описать группу автоморфизмов* $Aut\ (\mathfrak{A})$ *некоторой фиксированной алгебраической системы* $\mathfrak{A}$.

В 1946 году вышла работа Г. Биркгофа [1], в которой доказывается следующее утверждение: *каждая группа является группой всех автоморфизмов некоторой алгебры.* В 1958 году Д. Гроот опубликовал работу [20], в которой было установлено, что *всякая группа есть группа всех автоморфизмов некоторого кольца.* Эти результаты можно интерпретировать как решение следующей задачи

Задача 2. *Для фиксированной группы* G *и фиксированного класса* $\mathfrak{K}$ *алгебраических систем определить системы* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$ *(не обязательно все) такие, что* $G \cong H \leq Aut\ (\mathfrak{A})$. *Либо показать, что в классе* $\mathfrak{K}$ *таких систем* $\mathfrak{A}$ *нет.*

О различных типах задач, связанных с автоморфизмами, подробно написано в [13, стр. 122]. Например, задача 1 – задача г) в [13]. Параграф 2 в [13, стр. 108] посвящен вопросам существования представлений некоторой группы группами автоморфизмов подходящих алгебраических систем. Эти вопросы тесно связаны с вопросом 2.

Как обычно, множество всех перестановок конечного множества из n элементов обозначим символом S_n (множество перестановок S_n называют симметрической группой перестановок). Символом $C(Q)$ будем обозначать централизатор множества $Q \subseteq S_n$ в группе S_n. Если $\alpha \in S_n$ и $x \in \{1, ..., n\}$, то $\alpha(x)$ – образ элемента x под действием перестановки α. Стабилизатором в группе S_n элемента $x \in \{1, ..., n\}$ называем подгруппу

$$Stab(x) := \{\alpha \in S_n \mid \alpha(x) = x\}.$$

Если группа G является симметрической группой S_k или централизатором в S_k некоторых двух перестановок из S_k или пересечением двух стабилизаторов (для некоторых элементов) и $\mathfrak{K}$ – класс всех магм порядка $k + k^2$ с условиями (1.1), то существование решений задачи 2 дает следующая теорема

Теорема 1. *Для всякого натурального числа k справедливы следующие утверждения:*

1) симметрическая группа S_k изоморфна группе всех автоморфизмов $Aut\ (\mathfrak{D}_1)$ некоторой магмы $\mathfrak{D}_1$ порядка $k + k^2$;

2) для любых двух перестановок $\alpha_1, \alpha_2 \in S_k$ существует магма $\mathfrak{D}_2$ порядка $k + k^2$ такая, что

$$Aut\ (\mathfrak{D}_2) \cong C(\{\alpha_1, \alpha_2\});$$

3) для любых двух элементов $a, b \in \{1, ..., k\}$ существует подходящая магма $\mathfrak{D}_3$ порядка $k + k^2$ такая, что

$$Aut\ (\mathfrak{D}_3) \cong Stab(a) \cap Stab(b).$$

При этом магмы $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_3$ удовлетворяют условиям (1.1).

Теорема 1 доказывается конструктивно (строятся магмы $\mathfrak{D}_i$ с указанными свойствами). Данные примеры приводятся в четвертом разделе этой статьи (см. пример 1,2 и 3).

В связи с исследованием задачи 2, в данной работе вводятся магмы $\mathfrak{S}$. Эти магмы вводит

Определение 1. *Для каждого натурального числа k вводим следующие множества:*

$$M := \{a_1, ..., a_k\}, \quad B := \{b_{ij} \mid i, j = 1, ..., k\}, \quad V := M \cup B,$$

$$S_k^m := \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \mid \varepsilon_i \in S_k,\ i = 1, ..., m\}.$$

Далее, фиксируем кортеж $q = (\beta_1, ..., \beta_k, \beta_1', ..., \beta_k') \in S_k^{2k}$. На множестве V зададим бинарную алгебраическую операцию $*$ такую, что справедливы равенства:

$$a_i * a_j = b_{ij}, \quad a_s * b_{ij} = b_{\beta_s(i), \beta_s(j)}, \tag{1.2}$$

$$b_{ij} * a_s = b_{\beta'_s(i),\beta'_s(j)}, \quad b_{mv} * b_{ij} = b_{mj} \quad (m, v, s, i, j = 1, ..., k).$$

Тогда через

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q) = (V, *)$$

обозначим магму $\mathfrak{S}$ с множеством носителем V и бинарной алгебраической операцией $*$, которую задают равенства (1.2).

Данные магмы $\mathfrak{S}$ не являются полугруппами или квазигруппами.

В множестве S_k выделим подмножество $A(q)$ перестановок α таких, что при любых номерах $1 \le s, i \le k$ будут справедливы тождества

$$\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta_s(i)), \quad \beta'_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta'_s(i)). \tag{1.3}$$

Во втором разделе доказывается, что $A(q)$ – подгруппа в S_k. В четвертом разделе приводится лемма 7, которая дает более детальное (чем равенства (1.3)) описание множества $A(q)$. Там же строятся некоторые важные примеры множеств $A(q)$.

Данная статья содержит решение задачи 1, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}$. Одним из основных результатов данной работы является теорема:

Теорема 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}, q \in S_k^{2k}$ и α – перестановка из $A(q)$. Тогда отображение ϕ_α, заданное следующим образом*

$$\phi_\alpha \;:\; a_s \to a_{\alpha(s)}, \quad b_{ij} \to b_{\alpha(i),\alpha(j)} \quad (s, i, j = 1, ..., k),$$

является автоморфизмом магмы $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q)$. Справедливо равенство

$$Aut\ (\mathfrak{S}) = \{\phi_\alpha \mid \alpha \in A(q)\}.$$

Кроме того, имеет место изоморфизм $Aut\ (\mathfrak{S}) \cong A(q)$.

Теорема 2 доказывается в разделе 3. В разделе 4 доказывается лемма 7 и приводятся примеры 1, 2 и 3, которые доказывают теорему 1.

Обозначения. Пусть $\mathfrak{A} = (V, *)$, $\phi \in Aut\ (\mathfrak{A})$ и $x \in V$. Тогда x^ϕ – образ элемента $x \in V$ под действием ϕ (еще элемент x^ϕ называем *ϕ–образом* элемента x). Кроме того, если $\phi_1, \phi_2 \in Aut\ (\mathfrak{A})$, $\alpha, \beta \in S_n$ и $x \in V$, $\ y \in \{1, ..., n\}$, то

$$x^{\phi_1 \cdot \phi_2} := (x^{\phi_2})^{\phi_1}, \quad (\alpha \cdot \beta)(y) := \alpha(\beta(y)).$$

2. Основные определения и предварительные результаты

Далее, приведем определение автоморфизма алгебраической системы с одной бинарной алгебраической операцией (в соответствии с [9] и [13]).

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (W, g(x, y))$ — некоторая алгебраическая система с множеством носителем W и бинарной операцией g. Тогда биективное отображение $\phi :\ W \to W$ множества W на себя называют автоморфизмом системы $\mathfrak{A}$, если для любых элементов $x, y \in W$ справедливо равенство*

$$(g(x, y))^{\phi} = g(x^{\phi}, y^{\phi}) \tag{2.1}$$

Множество всех автоморфизмов системы $\mathfrak{A}$ обозначают символом $Aut\ (\mathfrak{A})$. Хорошо известно, что это множество образует группу относительно композиции двух отображений из $Aut\ (\mathfrak{A})$.

В этом разделе и далее символы $V, M, q, \beta_i, \beta'_j$ обозначают объекты, введенные в определение 1, связанные с магмой $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q) = (V, *)$. Если задать $k \in \mathbb{N},\ \ q \in S_k^{2k}$, то будут заданы (однозначно определены) множества $A(q), M, V$ и задана магма $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q) = (V, *)$. Множесто $A(q)$ вводится равенствами (1.3).

Как обычно, для каждого подмножества $D \subseteq V$ вводится следующее множество: $D * D := \{x * y \mid x, y \in D\}$.

Лемма 1. *Для магмы $\mathfrak{S}$ справедливы условия:*

$$V = M \cup (M * M), \quad M \cap (M * M) = \varnothing, \quad |M * M| = |M| \cdot |M|,$$

$$V * (M * M),\ (M * M) * V \subseteq M * M.$$

Доказательство. Утверждения леммы вытекают из определений множеств V, M и из равенств (1.2), которые задают операцию $*$. □

Лемма 2. *Для любых параметров $k \in \mathbb{N}$ и $q \in S_k^{2k}$ множество $A(q)$ является подгруппой в S_k.*

Доказательство. Очевидно, что единичная перестановка I лежит во множестве $A(q)$.

Покажем замкнутость. Пусть $\alpha, \gamma \in A(q)$. Тогда для всех номеров $1 \le s, i, j \le k$ справедливы равенства (1.3). Заметим, что $\gamma(s), \gamma(i)$ пробегают все номера от 1 до k. Далее, равенства

$$\beta_{\alpha(\gamma(s))}(\alpha(\gamma(i))) = \alpha(\beta_{\gamma(s)}(\gamma(i))) = \alpha(\gamma(\beta_s(i)))$$

и аналогичные равенства для β'_s показывают, что композиция $\alpha \cdot \gamma \in A(q)$.

Пусть $\alpha \in A(q)$. Покажем, что $\alpha^{-1} \in A(q)$. В самом деле, включение $\alpha \in A(q)$ приводит к тому, что α удовлетворяет равенствам (1.3) для произвольных номеров $1 \le \alpha^{-1}(s),\ \ \alpha^{-1}(i) \le k$. Далее, справедливы равенства

$$\beta_{\alpha(\alpha^{-1}(s))}(\alpha(\alpha^{-1}(i))) = \alpha(\beta_{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}(i))),$$

$$\beta_{\alpha(\alpha^{-1}(s))}(\alpha(\alpha^{-1}(i))) = \beta_s(i), \quad \alpha(\beta_{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}(i)) = \beta_s(i).$$

В последнем тождестве действуем α^{-1} на левую и правую части, получаем равенство

$$\alpha^{-1}(\alpha(\beta_{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}(i)))) = \alpha^{-1}(\beta_s(i)),$$

которое дает условие

$$\beta_{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}(i)) = \alpha^{-1}(\beta_s(i)).$$

Аналогичные рассуждения для тождеств с перестановками β'_i показывают включение $\alpha^{-1} \in A(q)$.

Таким образом, $A(q)$ – подгруппа в S_k. □

3. Автоморфизмы магмы $\mathfrak{S}$

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 2. Вначале приведем и докажем технические леммы 3, 4, 5 и 6.

Лемма 3. *Пусть α – перестановка из $A(q)$. Тогда отображение*

$$\phi_\alpha \ : \ a_s \to a_{\alpha(s)}, \quad b_{i,j} \to b_{\alpha(i),\alpha(j)} \quad (s,i,j = 1,...,k) \tag{3.1}$$

является автоморфизмом магмы $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k,q)$.

Доказательство. Не трудно увидеть, что отображение ϕ_α является обратимым отображением множества V на себя. При этом $\phi_\alpha^{-1} = \phi_{\alpha^{-1}}$. Таким образом, ϕ_α (далее ϕ) биективное отображение множества V на себя.

Далее покажем, что отображение ϕ_α (далее ϕ) удовлетворяет условиям (2.1). Ниже рассмотрим случаи.

1) Пусть $x, y \in M$. Значит, $x = a_i, \ \ y = a_j$ для подходящих i, j и справедливы равенства

$$x^\phi * y^\phi = a_i^\phi * a_j^\phi = a_{\alpha(i)} * a_{\alpha(j)} = b_{\alpha(i),\alpha(j)};$$

$$(a_i * a_j)^\phi = (b_{ij})^\phi = b_{\alpha(i),\alpha(j)}.$$

Отсюда получаем, что справедливо равенство $a_i^\phi * a_j^\phi = (a_i * a_j)^\phi$.

2) Пусть $x \in M, y \in (M * M)$. Тогда $x = a_s$ и $y = b_{ij}$ для подходящих s, i, j. Далее, справедливы равенства

$$a_s^\phi * b_{i,j}^\phi = a_{\alpha(s)} * b_{\alpha(i),\alpha(j)} = b_{\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)),\beta_{\alpha(s)}(\alpha(j))};$$

$$(a_s * b_{i,j})^\phi = (b_{\beta_s(i),\beta_s(j)})^\phi = b_{\alpha(\beta_s(i)),\alpha(\beta_s(j))} = b_{\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)),\beta_{\alpha_s}(\alpha(j))},$$

которые приводят к условию $x^\phi * y^\phi = (x * y)^\phi$.

3) Пусть $x \in (M * M), y \in M$. Тогда справедливо равенство $x^\phi * y^\phi = (x * y)^\phi$. Доказательство аналогично пункту 2).

4) Пусть $x, y \notin M$. Значит, $x = b_{mv},\ y = b_{ij}$ для подходящих индексов m, v, i, j. В этом случае равенства

$$b_{mv}^\phi * b_{ij}^\phi = b_{\alpha(m),\alpha(v)} * b_{\alpha(i),\alpha(j)} = b_{\alpha(m),\alpha(j)};$$

$$(b_{mv} * b_{ij})^\phi = (b_{mj})^\phi = b_{\alpha(m),\alpha(j)}$$

показывают, что ϕ сохраняет операцию $*$.

Случаи 1) – 4) показывают, что отображение ϕ удовлетворяет условию (2.1) и, как следствие, является автоморфизмом системы $\mathfrak{S}$. □

Лемма 4. *Пусть $\phi \in Aut\ (\mathfrak{S}(k, q))$, $\alpha \in S_k$ и справедливы равенства*

$$a_i^\phi = a_{\alpha(i)}, \quad i = 1, ..., k.$$

Тогда $\alpha \in A(q)$.

Доказательство. По условию леммы ϕ — автоморфизм системы $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q)$. Следовательно,

$$(b_{ij})^\phi = (a_i * a_j)^\phi = a_i^\phi * a_j^\phi = a_{\alpha(i)} * a_{\alpha(j)} = b_{\alpha(i),\alpha(j)}.$$

Далее, для всех номеров $1 \le s, i, j \le k$ действительны равенства

$$a_s^\phi * b_{ij}^\phi = a_{\alpha(s)} * b_{\alpha(i),\alpha(j)} = b_{\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)),\beta_{\alpha(s)}(\alpha(j))};$$

$$(a_s * b_{ij})^\phi = (b_{\beta_s(i),\beta_s(j)})^\phi = b_{\alpha(\beta_s(i)),\alpha(\beta_s(j))}.$$

Эти равенства приводят к условиям:

$$\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta_s(i)).$$

Аналогичное условие мы получим для перестановок β'_s, если вычислим, а потом сравним левую и правую часть равенства

$$b_{ij}^\phi * a_s^\phi = (b_{ij} * a_s)^\phi,$$

которое справедливо для любых $1 \le s, i, j \le k$. Таким образом, мы показали, что справедливо включение $\alpha \in A(q)$. Лемма доказана.

□

Лемма 5. *Пусть ϕ – произвольный автоморфизм магмы $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q)$. Тогда справедливы включения $M^\phi \subseteq M$, $(M * M)^\phi \subseteq (M * M)$.*

Доказательство. 1) Покажем, что $M^\phi \subseteq M$. Предположим противное. Значит, для некоторых подходящих индексов $1 \leq s, i, j \leq k$ выполняется равенство

$$a_s^\phi = b_{ij}.$$

Далее, ϕ является взаимно однозначным отображением V на себя. Отсюда следует, что каждый элемент $x \in V$ является ϕ — образом ровно для одного элемента $y \in V$. Равенства

$$a_s^\phi * a_s^\phi = (b_{ij} * b_{ij}) = b_{ij};$$

$$(a_s * a_s)^\phi = (b_{ss})^\phi; \quad b_{ij} = (b_{ss})^\phi$$

показывают, что ϕ не является автоморфизмом. Действительно, элемент b_{ij} является ϕ-образом двух различных элементов a_s, b_{ss}, что нарушает обратимость отображения ϕ. Это противоречие показывает справедливость включения $M^\phi \subseteq M$.

2) Докажем включение $(M * M)^\phi \subseteq (M * M)$. В силу включения $M^\phi \subseteq M$, справедливы условия

$$\{x^\phi * y^\phi \mid x, y \in M\} \subseteq \{x * y \mid x, y \in M\} = M * M,$$

которые дают справедливость утверждения

$$(M * M)^\phi := \{(x * y)^\phi \mid x, y \in M\} = \{x^\phi * y^\phi \mid x, y \in M\} \subseteq M * M.$$

Включение $(M * M)^\phi \subseteq M * M$ доказано.

□

Лемма 6. *Пусть $\alpha, \beta \in A(q)$ и ϕ_α, ϕ_β – автоморфизмы системы $\mathfrak{S}$, заданные условиями (3.1). Тогда справедливо равенство*

$$\phi_\alpha \cdot \phi_\beta = \phi_{\alpha \cdot \beta}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Если расписать действие отображений $\phi_\alpha \cdot \phi_\beta$ и $\phi_{\alpha\cdot\beta}$ на множестве V, то получим равенство (3.2). □

Теорема 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $q \in S_k^{2k}$ и α – перестановка из $A(q)$. Тогда отображение ϕ_α, заданное следующим образом*

$$\phi_\alpha \ : \ a_s \to a_{\alpha(s)}, \quad b_{ij} \to b_{\alpha(i),\alpha(j)} \quad (s, i, j = 1, ..., k),$$

является автоморфизмом магмы $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q)$. Справедливо равенство

$$Aut\ (\mathfrak{S}) = \{\phi_\alpha \mid \alpha \in A(q)\}.$$

Кроме того, имеет место изоморфизм $Aut\ (\mathfrak{S}) \cong A(q)$.

Доказательство. 1) В силу леммы 3 отображение ϕ_α является автоморфизмом магмы $\mathfrak{S}$ при $\alpha \in A(q)$. Таким образом, мы показали, что

$$R := \{\phi_\alpha \mid \alpha \in A(q)\} \subseteq Aut\ (\mathfrak{S}).$$

2) Пусть ϕ — произвольный автоморфизм системы $\mathfrak{S}$. В силу леммы 5, имеем равенства

$$a_s^\phi = a_{\gamma_1(s)}, \quad b_{ij}^\phi = b_{\gamma_2(i),\gamma_3(j)},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — некоторые подходящие функции на множестве $\{1, ..., k\}$.

Поскольку ϕ обратимое отображение множества V на себя и в силу условий (которые дают леммы 1 и 5)

$$V = (M * M) \cup M, \quad (M * M) \cap M = \varnothing,$$

$$M^\phi \subseteq M, \quad (M * M)^\phi \subseteq (M * M),$$

получаем, что $M^\phi = M$. Значит, ϕ действует на M как взаимно однозначное отображение и γ_1 является некоторой перестановкой из S_k.

Имеем $\phi \in Aut\ (\mathfrak{S})$, $\gamma_1 \in S_k$, и выполняются равенства $a_s^\phi = a_{\gamma_1(s)}$ для $s = 1, ..., k$. Значит, в силу леммы 4 перестановка $\gamma_1 \in A(q)$.

Далее, равенства

$$(b_{ij})^\phi = (a_i * a_j)^\phi = a_i^\phi * a_j^\phi = a_{\gamma_1(i)} * a_{\gamma_1(j)} = b_{\gamma_1(i),\gamma_1(j)}$$

$$(\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_1)$$

показывают, что ϕ — автоморфизм вида ϕ_α при $\alpha = \gamma_1$, следовательно, $\phi \in R$. Отсюда, $R = Aut\ (\mathfrak{S})$.

Таким образом, мы показали, что *всякий автоморфизм $\phi \in Aut\ (\mathfrak{S})$ является автоморфизмом вида ϕ_α для подходящего $\alpha \in A(q)$.*

3) Далее, рассмотрим отображение

$$\zeta : \ A(q) \ \to Aut\ (\mathfrak{S}),$$

заданное правилом $\zeta(\alpha) = \phi_\alpha$. В силу вышесказанного получаем, что ζ – взаимно однозначное отображение множества $A(q)$ на множество $Aut\ (\mathfrak{S})$. Кроме того, ζ сохраняет операцию умножения:

$$\zeta(\alpha \cdot \beta) = \phi_{\alpha\cdot\beta} = \phi_\alpha \cdot \phi_\beta = \zeta(\alpha) \cdot \zeta(\beta).$$

В последней цепочке равенств было использовано равенство (3.2). Таким образом, показано, что ζ – изоморфизм группы $A(q)$ на группу $Aut\ (\mathfrak{S})$. $\square$

4. Перечисление элементов $A(q)$ и примеры

В этом разделе описываются элементы множества $A(q)$. Доказывается лемма 7 и строятся примеры 1, 2 и 3 (которые доказывают теорему 1).

Определение 3. *Пусть* $q = (\beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k) \in S_k^{2k}$. *Тогда для всякого номера* $1 \leq s \leq k$ *определим множества*

$$U_q(s) := \{\alpha \in C(\beta_s) \mid \alpha(s) = m,\ \beta_m = \beta_s\},$$

$$U'_q(s) := \{\alpha \in C(\beta'_s) \mid \alpha(s) = m,\ \beta'_m = \beta'_s\}.$$

Определение 4. *Пусть* $q = (\beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k) \in S_k^{2k}$ *и* I*–тождественная перестановка в* S_k. *Тогда для всякого номера* $1 \leq s \leq k$ *определим множества*

$$V_q(s) := \{\alpha \in S_k \mid \alpha(s) = m \neq s, \quad \beta_m \neq \beta_s, \quad \beta_m \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta_s\} \cup \{I\},$$

$$V'_q(s) := \{\alpha \in S_k \mid \alpha(s) = m \neq s, \quad \beta'_m \neq \beta'_s, \quad \beta'_m \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta'_s\} \cup \{I\}.$$

Лемма 7. *При всяком* $k \in \mathbb{N}$ *и* $q \in S_k^{2k}$ *справедливо равенство*

$$A(q) = \bigcap_{1 \leq s \leq k} ((U_q(s) \cup V_q(s)) \cap (U'_q(s) \cup V'_q(s))). \tag{4.1}$$

Доказательство. 1) Пусть α – перестановка из правой части равенства (4.1). Покажем, что $\alpha \in A(q)$. В самом деле, если

$$\alpha \in W(s) := (U_q(s) \cup V_q(s)) \cap (U'_q(s) \cup V'_q(s)),$$

то

$$\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta_s(i)), \quad \beta'_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta'_s(i)).$$

Поскольку $\alpha \in W(s)$ при любом $s = 1, ..., k$, то $\alpha \in A(q)$.

2) Пусть теперь α – произвольная перестановка из $A(q)$. Тогда для любых номеров $1 \leq s, i \leq k$ справедливы равенства (1.3):

$$\beta_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta_s(i)), \quad \beta'_{\alpha(s)}(\alpha(i)) = \alpha(\beta'_s(i)).$$

Зафиксируем номер $1 \leq s \leq k$. Если $\alpha = I$, то $\alpha \in U_q(s), V_q(s), U'_q(s), V'_q(s)$. Если $\alpha \neq I$, то выполняется один из случаев, приведенных ниже.

2.1) Справедливы равенства $\alpha(s) = m, \quad \beta_m = \beta_s, \quad \beta_s \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta_s$. В этом случае $\alpha \in U_q(s)$.

2.2) Справедливы равенства $\alpha(s) = m \neq s, \quad \beta_m \neq \beta_s, \quad \beta_m \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta_s$. В этом случае $\alpha \in V_q(s)$.

Аналогично формулируются случаи для $U'_q(s)$ и $V'_q(s)$. Получаем, что $\alpha \in (U_q(s) \cup V_q(s)) \cap (U'_q(s) \cup V'_q(s)) = W(s)$. В силу произвольности номера $1 \leq s \leq k$ получаем, что перестановка α лежит одновременно во всех множествах $W(s),\ s = 1, ..., k$. Следовательно, $A(q) \subseteq \bigcap_{1 \leq s \leq k} W(s)$. Теорема доказана. □

Ниже приведены примеры, которые показывают существования магм $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_3$ из теоремы 1.

Пример 1. (Магма $\mathfrak{D}_1$) Пусть k — некоторое натуральное число и $q = (I, ..., I) \in S_k^{2k}$. Кортеж q состоит из единичных перестановок. Следовательно, $U_q(s) = U'_q(s) = S_k$ при всяком $1 \leq s \leq k$. По лемме 7 получаем, что $A(q) = S_k$.

Теорема 2 дает изоморфизм

$$Aut\ (\mathfrak{S}(k, q)) \cong S_k.$$

Магма $\mathfrak{D}_1 := \mathfrak{S}(k, q)$ имеет порядок $k + k^2$.

Пример 2. (Магма $\mathfrak{D}_2$) Пусть k — некоторое натуральное число и

$$q = (\beta, \beta, ..., \beta, \beta', \beta', ..., \beta') \in S_k^{2k}.$$

Здесь q – кортеж у которого позиции $1, ..., k$ равны перестановке $\beta \in S_k$ и позиции $k+1, ..., 2k$ равны $\beta' \in S_k$. Тогда справедливы равенства

$$U_q(1) = U_q(2) = ... = U_q(k) = C(\beta);$$

$$U'_q(1) = U'_q(2) = ... = U'_q(k) = C(\beta'); \quad V_q(i) = V'_q(i) = \{I\}, \quad i = 1, ..., k;$$

Используя лемму 7, находим

$$A(q) = \bigcap_{1 \leq s \leq k} ((U_q(s) \cup V_q(s)) \cap (U'_q(s) \cup V'_q(s))) = \bigcap_{1 \leq s \leq k} (U_q(s) \cap U'_q(s)) =$$

$$= U_q(1) \cap U'_q(1) = C(\beta) \cap C(\beta') = C(\{\beta, \beta'\}).$$

Наконец, теорема 2 дает изоморфизм

$$Aut\ (\mathfrak{S}(k, q)) \cong C(\beta) \cap C(\beta') = C(\{\beta, \beta'\}).$$

Магма $\mathfrak{D}_2 := \mathfrak{S}(k, q)$ имеет порядок $k + k^2$.

Пример 3. (Магма $\mathfrak{D}_3$) Пусть k — некоторое натуральное число, a, b – некоторые фиксированные символы из $\{1, ..., k\}$ и

$$q = (\beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k) \in S_k^{2k},$$

где $\beta_s = (s, a)$ и $\beta'_s = (s, b)$, для $s = 1, ..., k$. Тогда справедливы равенства

$$Stab(a, b) := Stab(a) \cap Stab(b);$$

$$U_q(s) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(s) = s, \alpha(a) = a\}, \quad s \neq a;$$
$$U'_q(s) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(s) = s, \alpha(b) = b\}, \quad s \neq b;$$
$$V_q(s) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(s) \neq s, \alpha(a) = a\} \cup \{I\}, \quad s \neq a; \quad V_q(a) = \{I\};$$
$$V'_q(s) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(s) \neq s, \alpha(b) = b\} \cup \{I\}, \quad s \neq b; \quad V'_q(b) = \{I\};$$
$$U_q(a) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(a) = a\}, \quad U_q(b) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(b) = b\};$$
$$U_q(s) \cup V_q(s) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(a) = a\}, \quad U'_q(s) \cup V'_q(s) = \{\alpha \in S_k \mid \alpha(b) = b\},$$

Используя лемму 7, находим

$$A(q) = \bigcap_{1 \leq s \leq k} ((U_q(s) \cup V_q(s)) \cap (U'_q(s) \cup V'_q(s))) = Stab(a, b).$$

Теорема 2 дает изоморфизм $Aut\ (\mathfrak{S}(k, q)) \cong Stab(a, b)$. Магма $\mathfrak{D}_3 := \mathfrak{S}(k, q)$ имеет порядок $k + k^2$.

Список литературы

1. Биркгоф Г. О группах автоморфизмов // Revista de la Union Math. Argentina. 1946. № 4. С. 155–157.
2. Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 2. С. 69–100. https://doi.org/10.1007/s10958-009-9650-5
3. Глускин Л. М. Автоморфизмы мультипликативных полугрупп матричных алгебр // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 1. С. 199–206.
4. Глускин Л. М. Автоморфизмы полугрупп бинарных отношений // Мат. записки Урал. гос. ун-та. 1967. Т. 6. С. 44—54.
5. Ильиных А. П. Классификация конечных группоидов с 2 транзитивной группой автоморфизмов // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 6. С. 51–78. https://doi.org/10.1070/SM1995v082n01ABEH003557
6. Ильиных А. П. Группоиды порядка $q(q \pm 1)/2, q = 2r$, имеющие группу автоморфизмов, изоморфную SL(2,q) // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1336–1341. https://doi.org/10.1007/BF02106838
7. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 141—161; № 3. С. 316–338.
8. Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 543–557.
9. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М. : Наука, 1970.
10. Мерзляков Ю. И. Автоморфизмы классических групп. М. : Мир, 1976.
11. Михалев А. В. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы, полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. 1970. Т. 81(123), № 4. С. 600–609.
12. Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 4. С. 534–547.
13. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М. : Наука, 1966.

14. Халезов Е. А. Автоморфизмы матричных полугрупп // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 2. С. 245–248.
15. Халезов Е. А. Автоморфизмы примитивных квазигрупп // Мат. сб. 1961. Т. 61, № 3. С. 329–342.
16. Шматков В. Д. Изоморфизмы и автоморфизмы алгебр матриц над решетками // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 1. С. 195–204. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2614-z
17. Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra and Analysis. 1993. Vol. 5, N 2. P. 74–90.
18. Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. 2012. Vol. 355, N 1. P. 154–170. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.002
19. Gibbs J. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. Vol. 14, N 2. P. 203–228.
20. Groot J. Automorphism groups of rings // Int. Congr. of Mathematicians. Edinburgh, 1958. P. 18.
21. Hahn A. J. Homomorphisms of algebraic and classical groups: a survay // Can. Math. Soc. 1984. N 4. P. 249–296.
22. Schreier O. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1928. Vol. 6. P. 303–322.
23. Seligman G.B. On automorphisms of Lie algebras of classical type // Trans. Amer. Math. Part III. 1960. Vol. 97. P. 286–316.

Андрей Викторович Литаврин, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, Российская Федерация,
(e-mail: `anm11@rambler.ru`)

Поступила в редакцию 09.06.18

Automorphisms of some magmas of order $k + k^2$

A. V. Litavrin

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. This paper is devoted to the study of automorphisms of finite magmas and to the representation of the symmetric permutation group S_k and some of its subgroups by automorphism groups of finite magmas. The theory that studies automorphism groups of magmas is well developed and is represented by a multitude of works, when magma is a quasigroup, semigroup, loop, monoid or group. There are also studies in which problems related to the study of automorphisms of magmas that are not a semigroup or quasigroup are considered.

In this paper, we introduce some finite magmas $\mathfrak{S} = (V, *)$ of order $k+k^2$. For magma $\mathfrak{S}$ it was possible to describe the automorphism group and write down the general form of the automorphism. In addition, the connection between automorphisms of magmas $\mathfrak{S}$ and permutations of a finite set of k elements has been revealed. All automorphisms of magma $\mathfrak{S}$ are parametrized by permutations from a certain subgroup (a description of this subgroup is given) of the symmetric permutation group S_k.

In addition, it is established that the group S_k is isomorphic to the group of all automorphisms Aut $(\mathfrak{S})$ of a suitable magma $\mathfrak{S}$ of order $k + k^2$.

Keywords: automorphisms of a magma, automorphisms of a groupoid, groups of automorphisms.

References

1. Birkgof G. O gruppakh avtomorfizmov [On groups of automorphisms]. *Revista de la Union Math. Argentina*, 1946, no. 4, pp. 155–157.
2. Bunina E.I., Semenov P.P. Automorphisms of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements over commutative partially ordered rings. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 162, no. 5, pp. 633–655. https://doi.org/10.1007/s10958-009-9650-5
3. Gluskin L.M. Avtomorfizmy mul'tiplikativnykh polugrupp matrichnykh algebr [Automorphisms of multiplicative semigroups of matrix algebras]. *Uspekhi matematicheskikh nauk,* 1956, vol. 11, no. 1, pp. 199–206. (In Russian).
4. Gluskin L.M. Avtomorfizmy polugrupp binarnykh otnosheniy [Automorphisms of semigroups of binary relations]. *Mat. zapiski Ural. State Univ.,* 1967, vol. 6, pp. 44—54. (In Russian).
5. Il'inykh A.P. Classification of finite groupoids with 2-transitive automorphism group. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* 1995, vol. 82, no. 1, pp. 175–197. https://doi.org/10.1070/SM1995v082n01ABEH003557
6. Il'inykh A.P. Groupoids of order $q(q \pm 1)/2, q = 2r$, with automorphism group isomorphic to SL(2,q). *Siberian Math. J.* 1995, vol. 36, no. 6, pp. 1159–1163. https://doi.org/10.1007/BF02106838
7. Levchuk V.M. Avtomorfizmy unipotentnykh podgrupp grupp Shevalle [Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups]. *Algebra i logika,* 1990, vol. 29, no. 2, pp. 141-161. no. 3, pp. 316-338. (In Russian).
8. Levchuk V.M. Svyazi unitreugol'noy gruppy s nekotorymi kol'tsami. Ch. 2. Gruppy avtomorfizmov [Connections of the unitriangular group with certain rings. Part 2. Automorphism groups]. *Sibirskiy matem. zhurnal,* 1983, vol. 24, no. 4, pp. 543–557. In Russian).
9. Mal'tsev A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 392 p. (In Russian).
10. Merzlyakov Yu.I. *Avtomorfizmy klassicheskikh grupp* [Automorphisms of classical groups]. Moscow, Mir Publ., 1976, 272 p. (In Russian).
11. Mikhalev A.V., Shatalova M.A. Avtomorfizmy i antiavtomorfizmy, polugruppy obratimykh matrits s neotritsatel'nymi elementami [Automorphisms and anti-automorphisms, semigroups of invertible matrices with nonnegative elements]. *Matem. sb.*, 1970, vol. 81, no. 4, pp. 600–609. (In Russian).
12. Petechuk V.M. Automorphisms of matrix groups over commutative rings. *Mathematics of the USSR-Sbornik.* 1983, vol. 45, no. 4, pp. 527–542.
13. Plotkin B.I. *Gruppy avtomorfizmov algebraicheskikh sistem* [Groups of automorphisms of algebraic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1966.
14. Khalezov E.A. Avtomorfizmy matrichnykh polugrupp [Automorphisms of matrix semigroups]. *Doklady AN SSSR,* 1954, vol. 96, no. 2, pp. 245-248. (In Russian).
15. Khalezov E.A. Avtomorfizmy primetivnykh kvazigrupp [Automorphisms of primitive quasigroups]. *Matematicheskiy sbornik,* 1961, vol. 61, no. 3, pp. 329-342. (In Russian).
16. Shmatkov V.D. Isomorphisms and Automorphisms of Matrix Algebras Over Lattices. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 211, no. 3, pp. 434–440. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2614-z

17. Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings. *Algebra and Analysis*, 1993, vol. 5, no. 2, pp.74–90.
18. Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings. *J. Algebra.*, 2012, vol. 355, no.1, pp. 154–170. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.002
19. Gibbs J. Automorphisms of certain unipotent groups. *J. Algebra.* 1970, vol. 14, no. 2, pp. 203–228.
20. Groot J. Automorphism groups of rings. *in: Int. Congr. of Mathematicians, Edinburgh.*, 1958, p. 18.
21. Hahn A.J., James D.G., Weisfelier B. Homomorphisms of algebraic and classical groups: a survay. *Can. Math. Soc.*, 1984, no. 4, pp. 249–296.
22. Schreier O., van der Varden B.L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.,* 1928, vol. 6, pp. 303–322.
23. Seligman G.B. On automorphisms of Lie algebras of classical type. *Trans. Amer. Math. Part III*, 1960, vol. 97, pp. 286–316.

Andrey Litavrin, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Siberian Federal University, 79, Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation. (e-mail: anm11@rambler.ru)

Received 09.06.18