



Серия «Математика»

2018. Т. 26. С. 16–34

Онлайн-доступ к журналу:

<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 517.958:519.633

MSC 35K65

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.16>

Трехмерная тепловая волна, порожденная краевым режимом, заданным на подвижном многообразии*

А. Л. Казаков

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация;

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация

П. А. Кузнецов

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация;

Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация

Л. Ф. Спевак

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация

Аннотация. Работа посвящена изучению нелинейного уравнения теплопроводности в случае степенной нелинейности (уравнение пористой среды; уравнение нелинейной фильтрации), для которого исследуется задача об иницировании краевым режимом, заданным на подвижном многообразии, тепловой волны, движущейся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью, в случае трех пространственных переменных. Доказана новая теорема существования и единственности решения указанной задачи в классе аналитических функций (основная теорема). Само решение строится в виде ряда по степеням независимых переменных, коэффициенты которого определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования с использованием рекуррентной процедуры — на каждом шаге решается система алгебраических уравнений с возрастающей (вообще говоря, неограниченно) размерностью. Локальная сходимость построенного ряда доказывается методом мажорант с использованием классической теоремы Коши – Ковалевской. Тем самым обобщаются и усиливаются ранее полученные авторами результаты в части построения решений задачи о движении тепловой волны по холодному фону в цилиндрических и сферических координатах. Кроме того, рассматриваются некоторые частные

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00608 и Комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-5.

случаи задачи, когда построение решения может быть сведено к интегрированию нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, не решенного относительно старшей производной. Поскольку проинтегрировать в квадратурах упомянутое обыкновенное дифференциальное уравнение, вообще говоря, не удастся, проводится его качественное исследование, а также выполняются численные эксперименты с использованием граничноэлементного подхода, развиваемого в последние годы авторами. Приводится интерпретация полученных результатов с точки зрения исходной задачи о движении тепловой волны.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, теорема существования, инвариантное решение, метод граничных элементов, численный эксперимент.

Введение

Рассматривается нелинейное уравнение параболического типа

$$T_t = \operatorname{div}(K(T)\nabla T), \quad (0.1)$$

где $T(t, x, y, z)$ — температура среды в точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ в момент времени t . Коэффициент теплопроводности $K(T)$ возьмем в виде $K(T) = \lambda T^\sigma$, λ, σ — положительные константы. Уравнение (0.1) используется при описании процессов теплопроводности [14], фильтрации газа в пористом грунте [18] и т.д. Важный класс решений (0.1) составляют тепловые волны (волны фильтрации), распространяющиеся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. Геометрически тепловая волна представляет собой два решения (0.1) (возмущенное $u \geq 0$ и тривиальное), непрерывно состыкованные вдоль фронта волны. Первые примеры тепловых волн в нелинейном случае можно встретить в статье Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца [3]. В работах Г. И. Баренблатта [1] описываются решения типа волн фильтрации. Среди публикаций, посвященных исследованию тепловых волн для уравнения (0.1), отметим работы А. А. Самарского [14], А.Ф. Сидорова [15], Н. А. Кудряшова [11].

Настоящая статья продолжает цикл работ авторов, посвященных исследованию нелинейного уравнения теплопроводности. Так, статьи [6; 7; 9] посвящены исследованию одномерных задач об иницировании тепловой волны известным краевым режимом. В работе [4] рассматривается трехмерная задача с данными на сфере постоянного радиуса, доказано существование единственного ненулевого аналитического решения. В статье [12] рассмотрен случай трехмерной звездной области с неподвижной границей. Двумерная задача с краевым режимом, заданным на замкнутой нестационарной кривой, изучена в [5]. Настоящая работа развивает исследования, выполненные в [4] и [12], и обобщает полученные ранее результаты на случай нестационарной границы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$u_{t_1} = u(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{1}{\sigma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2), \quad (1.1)$$

$$u(t_1, x, y, z)|_{\Gamma} = \delta(t_1, x, y, z), \quad \delta(0, x, y, z) = 0, \quad \delta_{t_1}(0, x, y, z) \geq 0. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) получено из (0.1) с помощью замен $u = T^\sigma$, $t_1 = \lambda t$. Краевой режим $\delta(t_1, x, y, z)$ задан на замкнутой нестационарной достаточно гладкой поверхности $\Gamma = \Gamma(t_1, x, y, z)$. Далее для удобства будем вместо t_1 писать t .

Пусть теперь при каждом фиксированном t из некоторой окрестности $t = 0$ поверхность $\Gamma(t, x, y, z)$ ограничивает в \mathbb{R}^3 область, звездную относительно точки $(0, 0, 0)$. В подобных областях удобно перейти в сферическую систему координат $x = \rho \cos \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $z = \rho \sin \theta$. Тогда уравнение Γ можно записать в виде $\rho = R(t, \varphi, \theta)$, где $R(t, \varphi, \theta) > 0$ определена при $\varphi \in [-\pi; \pi]$, $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. Кроме того, из замкнутости Γ следует равенство $R(t, -\pi, \theta) = R(t, \pi, \theta)$. Далее будем предполагать, что $\rho > 0$, $\varphi \in [-\pi; \pi]$, $\theta \in [-\pi/2 + \theta_1; \pi/2 - \theta_1]$, где $\theta_1 > 0$ — малая константа. Якобиан перехода к сферическим координатам $J = \rho^2 \cos \theta$, ограничения на θ необходимы для невырожденности замены. Введем обозначения $f(t, \varphi, \theta) = \delta(t, \rho = R(t, \varphi, \theta), \varphi, \theta)$, $f_0 = f(0, \varphi, \theta) = 0$, $f_1 = f_t(0, \varphi, \theta) \geq 0$. В результате, (1.1), (1.2) примет вид

$$u_t = u \left(\frac{2}{\rho} u_\rho - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\rho^2} u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \theta} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} \right) + \frac{1}{\sigma} \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \theta} u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2 \right), \quad (1.3)$$

$$u(t, \rho, \varphi, \theta)|_{\rho=R(t, \varphi, \theta)} = f(t, \varphi, \theta). \quad (1.4)$$

При существовании у (1.3), (1.4) достаточно гладкого решения можно утверждать, что оно имеет тип тепловой волны: существует (при малых $t \geq 0$) поверхность $\rho = a(t, \varphi, \theta)$ такая, что $u(t, \rho, \varphi, \theta)|_{\rho=a(t, \varphi, \theta)} = 0$. Это следует из гладкости решения и соотношений $f_0 = 0$ и $u_{0,1} a_1 < 0$, где $u_{0,1} = u_\rho(0, R(0, \varphi, \theta), \varphi, \theta)$, $a_1 = a_t(0, \varphi, \theta) = -f_1/u_{0,1}$.

Задача (1.3), (1.4) рассматривалась авторами в работах [4] и [12] в частных случаях: при $R = \text{const}$ и $R = R(\varphi, \theta)$ соответственно. В настоящей статье доказывается разрешимость (1.3), (1.4) в классе аналитических функций (раздел 2). В разделе 3 приведены инвариантные решения типа тепловых волн, качественному исследованию свойств которых посвящен раздел 4. В разделе 5 выполнены численные расчеты.

2. Основная теорема

Теорема 1. Пусть функции R и f аналитичны в некоторой окрестности $t = 0$ и при всех допустимых φ и θ . Тогда задача (1.3), (1.4) имеет единственное (при выборе направления движения фронта тепловой волны) ненулевое аналитическое решение.

Доказательство. Приведем краткую схему дальнейших рассуждений. Вначале строится решение в виде степенного ряда. Затем с помощью невырожденных замен задача (1.3), (1.4) сводится к одному уравнению, для которого строится мажорантная задача. Наконец, доказывается существование и единственность аналитического решения последней.

Чтобы упростить краевые условия, сделаем замену $r = \rho - R(t, \varphi, \theta)$, $x_1 = \varphi$, $x_2 = \theta$. Легко показать, что якобиан замены отличен от нуля. Вводя обозначения $c_1(\theta) = 1/\cos^2 \theta$, $c_2 = 1$, получаем задачу

$$\begin{aligned} u_t - R_t u_r = u \left[\frac{2}{r+R} u_r - \frac{\operatorname{tg} x_2}{(r+R)^2} (u_{x_2} - R_{x_2} u_r) + u_{rr} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(r+R)^2} \sum_{i=1}^2 c_i (u_{x_i x_i} - 2R_{x_i} u_{r x_i} - R_{x_i x_i} u_r + R_{x_i}^2 u_{rr}) \right] + \\ + \frac{1}{\sigma} \left[u_r^2 + \frac{1}{(r+R)^2} \sum_{i=1}^2 c_i (u_{x_i} - R_{x_i} u_r)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u(t, r, x_1, x_2)|_{r=0} = f(t, x_1, x_2). \quad (2.2)$$

Построим теперь решение задачи (2.1), (2.2) в виде ряда Тейлора

$$u(t, r, x_1, x_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(x_1, x_2) \frac{t^n}{n!} \frac{r^m}{m!}, \quad u_{n,m}(x_1, x_2) = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial t^n \partial r^m} \Big|_{t=r=0}. \quad (2.3)$$

В силу аналитичности известных функций, справедливы разложения

$$f(t, x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1, x_2) \frac{t^n}{n!}, \quad R(t, x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_1, x_2) \frac{t^n}{n!}.$$

Из краевого условия (2.2) следуют равенства $u_{n,0} = f_n$, причем $f_0 = 0$. Остальные коэффициенты (2.3) определим рекуррентно.

Положим в (2.1) $t = r = 0$. Полученное уравнение разрешаем как квадратное относительно $u_{0,1}$. Имеем

$$u_{0,1} = \frac{-\sigma R_0^2 R_1 \pm \sqrt{D}}{2(R_0^2 + c_1 R_{0x_1}^2 + c_2 R_{0x_2}^2)},$$

где $D = (\sigma R_0^2 R_1)^2 + 4(R_0^2 + c_1 R_{0x_1}^2 + c_2 R_{0x_2}^2) \sigma R_0^2 f_1$. При $f_1 > 0$ знак $u_{0,1}$ совпадает со знаком перед \sqrt{D} , независимо от значений R_1 . От выбора знака $u_{0,1}$ зависит направление движения тепловой волны. Так, при $u_{0,1} < 0$ тепловая волна отдаляется от начала координат, при $u_{0,1} > 0$ — приближается. Случай $f_1 = 0$ требует дополнительного исследования.

Продифференцируем уравнение (2.1) поочередно по t и r при $t = r = 0$. Вводя обозначения $p(t, x_1, x_2) = R^2 / (R^2 + c_1 R_{x_1}^2 + c_2 R_{x_2}^2)$, $p_0(x_1, x_2) = p(0, x_1, x_2)$, а также

$$\begin{aligned} \mu &= -f_1 \left[\frac{2}{R_0} u_{0,1} + \frac{\operatorname{tg} x_2}{R_0^2} R_{0x_2} u_{0,1} - \frac{1}{R_0^2} \sum_{i=1}^2 c_i (2R_{0x_i} u_{0,1x_i} + R_{0x_i x_i} u_{0,1}) \right] + \\ &+ \frac{2}{\sigma} \left[\frac{1}{R_0^2} \sum_{i=1}^2 c_i R_{0x_i} u_{0,1} (f_{1x_i} - R_{1x_i} u_{0,1}) + \frac{R_1}{R_0^3} \sum_{i=1}^2 c_i R_{0x_i}^2 u_{0,1}^2 \right] + f_2 - R_2 u_{0,1}, \\ \nu &= u_{0,1} \left[\frac{2}{R_0} u_{0,1} + \frac{\operatorname{tg} x_2}{R_0^2} R_{0x_2} u_{0,1} - \frac{1}{R_0^2} \sum_{i=1}^2 c_i (2R_{0x_i} u_{0,1x_i} + R_{0x_i x_i} u_{0,1}) \right] - \\ &- \frac{2}{\sigma} \left[\frac{1}{R_0^3} \sum_{i=1}^2 c_i R_{0x_i}^2 u_{0,1}^2 + \frac{1}{R_0^2} \sum_{i=1}^2 c_i R_{0x_i} u_{0,1} u_{0,1x_i} \right], \end{aligned}$$

получаем систему

$$\begin{cases} f_1 u_{0,2} + \left(\frac{2}{\sigma} u_{0,1} + p_0 R_1 \right) u_{1,1} = p_0 \mu, \\ u_{1,1} = [R_1 + u_{0,1} (1 + \frac{2}{\sigma}) / p_0] u_{0,2} + \nu. \end{cases}$$

Разрешив ее, находим коэффициенты

$$\begin{cases} u_{0,2} = \frac{p_0 \mu - \nu \left(\frac{2}{\sigma} u_{0,1} + p_0 R_1 \right)}{f_1 + \left(\frac{2}{\sigma} u_{0,1} + p_0 R_1 \right) [R_1 + u_{0,1} (1 + \frac{2}{\sigma}) / p_0]}, \\ u_{1,1} = \frac{[R_1 + u_{0,1} (1 + \frac{2}{\sigma}) / p_0] [p_0 \mu - \nu \left(\frac{2}{\sigma} u_{0,1} + p_0 R_1 \right)]}{f_1 + \left(\frac{2}{\sigma} u_{0,1} + p_0 R_1 \right) [R_1 + u_{0,1} (1 + \frac{2}{\sigma}) / p_0]} + \nu. \end{cases}$$

При дифференцировании видно, что лишь некоторые слагаемые уравнения (2.1) зависят от коэффициентов старшего порядка. Выделим их, предварительно умножив уравнение (2.1) на $(r + R)^2$. Уравнение примет вид

$$p u_t - g u_r - u u_{rr} - \frac{1}{\sigma} u_r^2 = P, \quad (2.4)$$

где $g(t, x_1, x_2) = R_t p$ и

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{R^2 + c_1 R_{x_1}^2 + c_2 R_{x_2}^2} \left\{ u \left[(r + R) u_r - \operatorname{tg} x_2 (u_{x_2} - R_{x_2} u_r) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^2 c_i (u_{x_i x_i} - 2R_{x_i} u_{rx_i} - R_{x_i x_i} u_r) \right] + \frac{1}{\sigma} u_r^2 (r^2 + 2rR) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^2 c_i (u_{x_i}^2 - 2R_{x_i} u_{x_i} u_r) - (u_t - R_t u_r)(r^2 + 2rR) + (r^2 + 2rR) u u_{rr} \}.$$

Дифференцируя (2.4) k раз по r , $n - k$ раз по t и полагая $t = r = 0$, получаем равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i u_{i+1,k} p_{n-k-i} - \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j} u_{n-k-i,k-j+2} - \\ & - \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i u_{i,k+1} g_{n-k-i} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j+1} u_{n-k-i,k-j+1} = P_{n-k,k}, \end{aligned}$$

в котором использованы обозначения

$$p_{n-k-i} = \frac{\partial^{n-k-i} p}{\partial t^{n-k-i}} \Big|_{t=0}, \quad g_{n-k-i} = \frac{\partial^{n-k-i} q}{\partial t^{n-k-i}} \Big|_{t=0}, \quad P_{n-k,k} = \frac{\partial^n P}{\partial t^{n-k} \partial r^k} \Big|_{t=r=0}.$$

Выделяя коэффициенты старшего порядка, получаем равенство

$$u_{n-k+1,k} + a_k u_{n-k,k+1} + b_{n-k} u_{n-k-1,k+2} = L_{n-k,k}, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} a_k = & - \left[R_1 + \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) \frac{u_{0,1}}{p_0} \right], \quad b_{n-k} = -(n-k) \frac{f_1}{p_0}, \quad L_{n-k,k} = \frac{1}{p_0} \left(P_{n-k,k} - \right. \\ & - \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-k}^i u_{i+1,k} p_{n-k-i} + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0}}^{n-k} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \neq 1}}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j} u_{n-k-i,k-j+2} + \\ & \left. + \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-k}^i u_{i,k+1} g_{n-k-i} + \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0}}^{n-k} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \neq n}}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j+1} u_{n-k-i,k-j+1} \right). \end{aligned}$$

Видно, что $b_0 = 0$ и $b_{n-k} < 0$ при $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Можно показать, что a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, противоположны по знаку коэффициенту $u_{0,1}$.

Полагая в (2.5) $k = 0, 1, \dots, n$, получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n-1,2} \\ \vdots \\ u_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,0} - f_{n+1} \\ L_{n-1,1} \\ \vdots \\ L_{0,n} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Невырожденность квадратной трехдиагональной матрицы в левой части можно доказать индукцией по ее порядку [5]. Следовательно,

система (2.6) однозначно разрешима и коэффициенты ряда (2.3) определяются однозначно. Решение построено, первый этап завершен.

Остальные этапы доказательства неоднократно освещались авторами в работах [4;5;12] и здесь будут изложены кратко. Постановка задачи подразумевает наличие теплового фронта, т. е. линии $\rho = a(t, x_1, x_2)$, на которой искомая функция обращается в нуль. При этом $a(0, x_1, x_2) = R(0, x_1, x_2)$. В задаче (2.1), (2.2), эквивалентной исходной, делается замена $s = r - b(t, x_1, x_2)$, где b — расстояние от линии $\rho = R(t, x_1, x_2)$ до теплового фронта $\rho = a(t, x_1, x_2)$, т.е.

$$b(t, x_1, x_2) = a(t, x_1, x_2) - R(t, x_1, x_2),$$

при этом $b(0, x_1, x_2) = a(0, x_1, x_2) - R(0, x_1, x_2) = 0$. Теперь задача состоит из одного уравнения и двух краевых условий

$$u(t, s, x_1, x_2)|_{s=-b(t, x_1, x_2)} = f(t, x_1, x_2), \quad u(t, s, x_1, x_2)|_{s=0} = 0. \quad (2.7)$$

Следующая замена меняет ролями неизвестную функцию u и независимую переменную s . Из первого условия (2.7), которое теперь запишется в виде $s|_{u=f} = -b$, выражается неизвестная функция b и подставляется в полученное уравнение. После этого, с целью сделать поверхность $u = f$ новой координатной плоскостью, вводится переменная $w = u - f$. Далее искомая функция представляется в виде $s(u, w, x_1, x_2) = us_1(w, x_1, x_2) + u^2 S(u, w, x_1, x_2)$, где s_1 — известная аналитическая функция. Отметим, что в таком случае второе краевое условие (2.7) выполняется, а задача сведется к одному уравнению вида

$$\beta_0(w, x_1, x_2)S|_{w=0} + \beta_1(w, x_1, x_2)u(S_u|_{w=0}) + \beta_2(w, x_1, x_2)u^2(S_{uu}|_{w=0}) + B_0S + B_1uS_u + B_2u^2S_{uu} = h_0 + uh_1 + u^2h_2 + u^3h_3. \quad (2.8)$$

В этом уравнении $B_0 = 2(1 + 1/\sigma)$, $B_1 = (4 + 1/\sigma)$, $B_2 = 1$ — константы; β_i при $i = 0, 1, 2$ и h_j при $j = 0, 1, 2, 3$ — аналитические функции своих переменных, причем $h_0 = h_0(w, x_1, x_2)$, а остальные h_j зависят от производных функции S по переменной u порядка не выше $j - 1$. Функции $\beta_i(w, x_1, x_2)$ положительны при $w = 0$. Нетрудно убедиться, что для уравнения (2.8) выполнены все условия леммы 2 из [5], и оно разрешимо в классе аналитических функций. Построение мажорантной задачи и доказательство существования аналитического решения последней также проводятся согласно [5]. \square

3. Построение решений в частных случаях

Изучим теперь некоторые частные случаи, в которых рассматриваемая задача (1.3), (1.4) существенно упрощается и появляется возможность исследовать решения более детально. В случае сферической симметрии, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных: времени t и расстояния до начала координат ρ , уравнение (1.3) имеет вид

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2 + \frac{2}{\rho}uu_\rho. \quad (3.1)$$

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде

$$u = \phi(t)v(z), \quad z = 1 - \frac{\rho}{a(t)}. \quad (3.2)$$

Подобные решения иногда называют инвариантными и/или обобщенно-автомодельными [13]. Здесь $a(t)$ — некоторая достаточно гладкая функция, определяющая фронт тепловой волны, т.е. обладающая свойством

$$u|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (3.3)$$

Можно видеть, что (3.1), (3.3) является частным случаем (1.3), (1.4) при $u = u(t, \rho)$, $R(t, \varphi, \theta) = a(t)$, $f(t, \varphi, \theta) \equiv 0$.

При подстановке (3.2) в уравнение (3.1) после приведения подобных слагаемых и умножения обеих частей на $a^2(t)/\phi^2(t)$ получим

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left[\frac{a(t)a'(t)}{\phi(t)}(z-1) + \frac{2v}{z-1} \right] v' - \frac{a^2(t)\phi'(t)}{\phi^2(t)}v = 0. \quad (3.4)$$

Утверждение 1. Уравнение (3.4) является обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) тогда и только тогда, когда $a(t)$ либо степенная функция, либо показательная функция своего аргумента.

Доказательство. Доказательство данного утверждения состоит в интегрировании системы ОДУ

$$\frac{a(t)a'(t)}{\phi(t)} = A_1, \quad \frac{a^2(t)\phi'(t)}{\phi^2(t)} = A_2,$$

где A_1, A_2 — произвольные константы. Для этого следует выразить $\phi(t)$ через $a(t)$ из первого уравнения и подставить во второе. Полученное ОДУ второго порядка легко интегрируется в квадратурах, причем решением является (в зависимости от значений констант A_1, A_2) либо степенная, либо показательная функция. \square

Рассмотрим случаи степенного и показательного фронта отдельно.

1. Пусть $a(t) = (\alpha t + \beta)^\omega$, где $\alpha > 0, \beta > 0, \omega \neq 0$ — константы. Тогда $\phi(t) = \alpha\omega(\alpha t + \beta)^{2\omega-1}/A_1$. Приняв для определенности $A_1 = 1$, получим следующее инвариантное решение, имеющее тип тепловой волны:

$$u(t, \rho) = \alpha\omega(\alpha t + \beta)^{2\omega-1}v(z), \quad z = 1 - \frac{\rho}{(\alpha t + \beta)^\omega}, \quad (3.5)$$

где $v(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(z - 1 + \frac{2v}{z-1}\right)v' - \frac{2\omega-1}{\omega}v = 0. \quad (3.6)$$

2. Пусть $a(t) = \alpha e^{\beta t}$, где $\alpha > 0, \beta \neq 0$ — константы. Тогда $\phi(t) = \alpha^2 \beta e^{\beta t}/A_1$. Приняв для определенности $A_1 = 1$, получим следующее инвариантное решение, имеющее тип тепловой волны:

$$u(t, \rho) = \alpha^2 \beta e^{2\beta t}v(z), \quad z = 1 - \frac{\rho}{\alpha e^{\beta t}}, \quad (3.7)$$

где $v(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(z - 1 + \frac{2v}{z-1}\right)v' - 2v = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что на фронте тепловой волны выполняется условие

$$v(0) = 0. \quad (3.9)$$

Можно видеть, что условие (3.9) приводит к тому, что в (3.6) и (3.8) обращается в нуль множитель перед старшей производной.

Уравнения (3.6) и (3.8) удобно рассматривать совместно в виде

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}(v')^2 + \left(z - 1 + \frac{2v}{z-1}\right)v' - \eta v = 0, \quad (3.10)$$

где η принимает значения $(2\omega - 1)/\omega$ (в случае степенного фронта: уравнение (3.6)) либо 2 (в случае экспоненциального фронта: уравнение (3.8)). Уравнение (3.10), вообще говоря, не интегрируется в квадратурах и может быть сведено заменой переменных (см. утверждение 2) к так называемому «обобщенному уравнению Лье́нара» [8; 10].

Задаче (3.10), (3.9) удовлетворяет тривиальное решение $v \equiv 0$. Кроме того, поскольку, как уже отмечалось, (3.1), (3.3) является частным случаем (1.3), (1.4), теорема 1 обеспечивает существование и единственность нетривиальных аналитических решений у задачи (3.10), (3.9) в некоторой окрестности точки $z = 0$. Условием совместности является равенство

$$v'(0) = \sigma. \quad (3.11)$$

Решения задачи Коши с особенностью перед старшей производной (3.10), (3.9), (3.11) с точки зрения исходной постановки (3.1), (3.3) нас интересуют на полуинтервале $z \in [0, 1)$.

4. Качественный анализ решений

Теорема 1 гарантирует существование и единственность нетривиальных аналитических решений задачи (3.10), (3.9), (3.11) только в малой окрестности нуля. Чтобы расширить область существования решения, откажемся от требования аналитичности.

Утверждение 2. *Задача Коши (3.10), (3.9), (3.11) имеет единственное решение $v(z) \in \mathbb{C}^2[0, 1)$.*

Доказательство. Для того чтобы обосновать существование и единственность гладкого решения на всем полуинтервале $[0, 1)$, следуя [8], выполним замену искомой функции и независимой переменной

$$V = v(z)/(z - 1)^2, \quad \zeta = -\ln(1 - z). \quad (4.1)$$

Можно видеть, что при $0 \leq z < 1$ переменная ζ изменяется в пределах $0 \leq \zeta < +\infty$. Тогда уравнение (3.10) примет вид

$$VV'' + \frac{1}{\sigma}(V')^2 - \left(5 + \frac{4}{\sigma}\right)VV' - V' + \left(6 + \frac{4}{\sigma}\right)V^2 + \kappa V = 0, \quad (4.2)$$

где κ принимает значения $1/\omega$ (в случае степенного фронта) либо 0 (в случае экспоненциального фронта). При этом для уравнения (4.2) выполнены условия

$$V(0) = 0, V'(0) = \sigma. \quad (4.3)$$

Перейдя к динамической системе [2] и исследовав особую точку

$$V = 0, W = V' = \sigma,$$

можно убедиться, что она является простой и имеет тип «седло» (см. [8]) при всех допустимых значениях κ . Иных особых точек при $W > 0$ не существует. Отсюда следует, что имеется единственная фазовая траектория, стремящаяся в особую точку $(0, \sigma)$ при $\zeta \rightarrow +0$, которая отвечает решению задачи (4.2), (4.3). Поскольку $W = V' > 0$, то и $V > 0$. Более тонкий анализ позволяет установить, что вдоль рассматриваемой сепаратрисы $W > \sigma$ и $V \rightarrow +\infty$ при $\zeta \rightarrow +\infty$. Полученное решение (4.2), (4.3), в свою очередь, соответствует решению задачи (3.10), (3.9), (3.11), определенному при $z \in [0, 1)$. \square

Рассмотрим теперь найденные решения (3.5), (3.7) более внимательно при конкретных значениях входных параметров.

1. Пусть в (3.5) $\omega = 1/2$. Тогда в (3.5) множитель перед $v(z)$ становится константой, а последнее слагаемое в левой части (3.6) зануляется. В данном случае решение (3.5) сохраняет постоянное значение вдоль всякой кривой $\rho = \gamma\sqrt{\alpha t + \beta}$, $0 < \gamma \leq 1$.

2. Пусть в (3.5) $\omega = 1$, т. е. фронт тепловой волны движется с постоянной скоростью. Тогда в (3.5) множитель перед $v(z)$ является линейной функцией переменной t . Функция v в данном случае сохраняет постоянные значения вдоль прямых $\rho = \gamma(\alpha t + \beta)$, $0 < \gamma \leq 1$. Таким образом, в данном случае функция $u = u(t, \rho)$ определяет линейчатую поверхность в пространстве переменных t, ρ, u . Отметим, что в случае плоской симметрии тепловая волна, движущаяся с постоянной скоростью, является плоскостью в указанном пространстве, т. е. также линейчатой поверхностью, но более простого вида.

3. Уравнение (3.8) не зависит от параметров α и β , т. е. конкретный вид закона движения тепловой волны влияет только на множитель перед v (см. (3.7)). Несущественен в данном случае даже знак β , хотя от этого принципиальным образом зависит поведение тепловой волны: в случае $\beta < 0$ имеем, что $a(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$; в случае $\beta > 0$ имеем, что $a(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Найдя решение задачи (3.8), (3.9), (3.11), для построения конкретной тепловой волны необходимо будет подставить вместо z соответствующее выражение и домножить на $\alpha^2 \beta e^{2\beta t}$.

5. Вычислительный эксперимент

Для численного решения задачи (1.3), (1.4) в случае сферической симметрии авторами ранее [17] был разработан алгоритм на основе подхода, предложенного в работе [9]. Решение строится по шагам по времени, на каждом шаге методом граничных элементов итерационно разрешается уравнение Пуассона, имеющее в сферической системе координат вид

$$\Delta u = \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_\rho^2}{\sigma} \right), \quad (5.1)$$

с граничными условиями

$$u|_{\rho=a(t)} = 0, \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a(t)} = -\sigma a'(t).$$

Задача на шаге $t = t_k$ решается в области $\Omega_k : \rho \in [a(0); a(t_k)]$, здесь q — поток, n — вектор внешней нормали к поверхности области Ω_k .

Применение такого же итерационного подхода для решения методом граничных элементов (МГЭ) уравнения (3.10) с граничными условиями

(3.9), (3.11) позволит определить в непрерывном виде решение исходной задачи (3.1), (3.3) для любого момента времени. Такое численно-аналитическое решение задачи (3.1), (3.3) имеет безусловные преимущества перед пошаговым решением. Таким образом, для случаев, рассмотренных в утверждении 1, мы можем построить «глобальные» решения, один раз применив итерационную процедуру.

Итак, рассмотрим задачу (3.10), (3.9), (3.11). Представим ее в следующем виде, удобном для применения МГЭ:

$$v'' = \frac{1}{v} \left[(1-z)v' - \frac{(v')^2}{\sigma} \right] + \frac{2v'}{1-z} + \eta, \quad z \in [0; L], \quad L < 1, \quad (5.2)$$

$$v(0) = 0, \quad q(0) = -\sigma. \quad (5.3)$$

Здесь $q = \partial v / \partial n$ — поток, n — внешняя нормаль к границе области решения задачи, $n(0) = -1$, $n(L) = 1$. Итерационное решение задачи (5.2), (5.3) посредством МГЭ имеет вид

$$v_n(z) = -\sigma u^*(z, 0) + q_2^{(n)} u^*(z, L) - v_2^{(n)} q^*(z, L) - \int_0^L \left(\frac{1}{v_{n-1}(x)} \left[(1-x)v'_{n-1}(x) - \frac{(v'_{n-1}(x))^2}{\sigma} \right] + \frac{2v'_{n-1}(x)}{1-x} + \eta \right) u^*(z, x) dx \quad (5.4)$$

где $u^*(\xi, x)$ — фундаментальное решение [16], $q^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n}$, $v_n(z)$ — n -я итерация решения, $v_2^{(n)} = v_n(L)$, $q_2^{(n)} = q_n(L)$ — n -е итерации значений искомой функции и потока в точке $z = L$, которые определяются из решения системы граничных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} v_2^{(n)} = -\sigma L + 2 \int_0^L \left(\frac{1}{v_{n-1}(x)} \left[(1-x)v'_{n-1}(x) - \frac{(v'_{n-1}(x))^2}{\sigma} \right] + \frac{2v'_{n-1}(x)}{1-x} + \eta \right) u^*(0, x) dx, \\ v_2^{(n)} - q_2^{(n)} L = -2 \int_0^L \left(\frac{1}{v_{n-1}(x)} \left[(1-x)v'_{n-1}(x) - \frac{(v'_{n-1}(x))^2}{\sigma} \right] + \frac{2v'_{n-1}(x)}{1-x} + \eta \right) u^*(L, x) dx \end{cases} \quad (5.5)$$

В качестве начального приближения принимается тривиальное решение. Итерационный процесс останавливается при достаточной близости значений $v_2^{(n-1)}$ и $v_2^{(n)}$. Решение исходной задачи (3.1), (3.3) в соответствии с (3.2) имеет вид $u(t, \rho) = \phi(t)v_n(z)$, $z = 1 - \rho/a(t)$.

Предложенный алгоритм был применен для решения задачи в случаях степенного и показательного тепловых фронтов, описанных в разделе 3. Для степенного фронта расчеты проводились для следующих значений параметров: $\sigma = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\omega = 0.25, 0.5, 1$; $\sigma = 3$,

$\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\omega = -1$. Для показательного фронта были приняты следующие значения: $\sigma = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. На рис. 1 приведены решения задачи (5.2), (5.3) при $L = 0.95$ для всех указанных случаев. Отметим, что поведение полученных решений для различных видов функции, задающей движение фронта тепловой волны, не отличается. При приближении правого конца области решения задачи (5.2), (5.3) ($z \in [0; L]$) к точке $z = 1$ значения $v(L)$ для полученных решений неограниченно возрастали, что объясняется вырождением уравнения в этой точке.

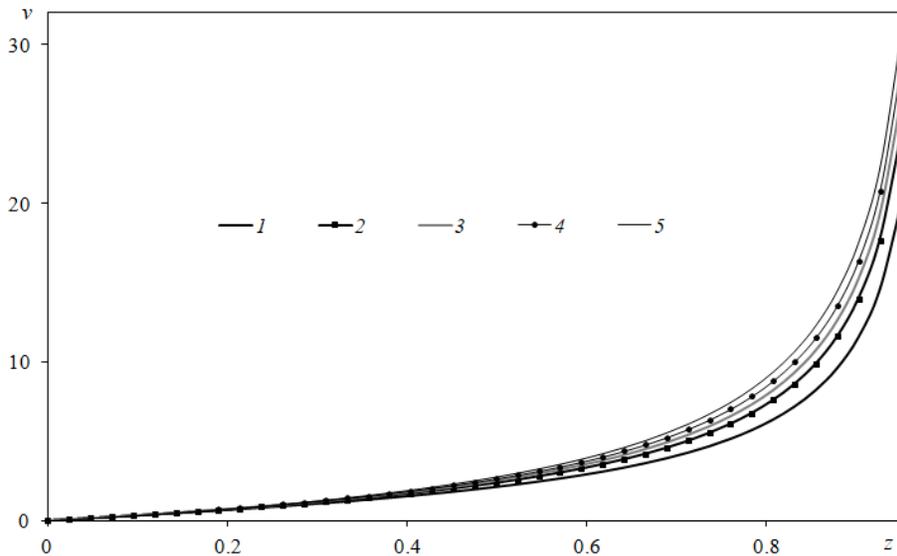


Рис. 1. Решения задачи (5.2), (5.3) при различных уравнениях теплового фронта: **1**) $a(t) = (t + 1)^{1/4}$, **2**) $a(t) = \sqrt{t + 1}$, **3**) $a(t) = t + 1$, **4**) $a(t) = e^t$, **5**) $a(t) = 1/(1 - t)$.

Сравнение решений для степенного фронта, полученных при различных значениях ω , показывает уменьшение значения второй производной по пространственной переменной при приближении ω к нулю.

На рис. 2 решения задачи (3.1), (3.3), соответствующие полученным решениям задачи (5.2), (5.3), сравниваются с пошаговым методом граничных элементов с помощью алгоритма, предложенного в [17]. Близость результатов, полученных двумя методами, свидетельствует о корректности вычислений. Еще одним выводом из проведенного сравнения является возможность использования глобальных решений, построенных с помощью уравнения (3.10) для тестирования расчетов.

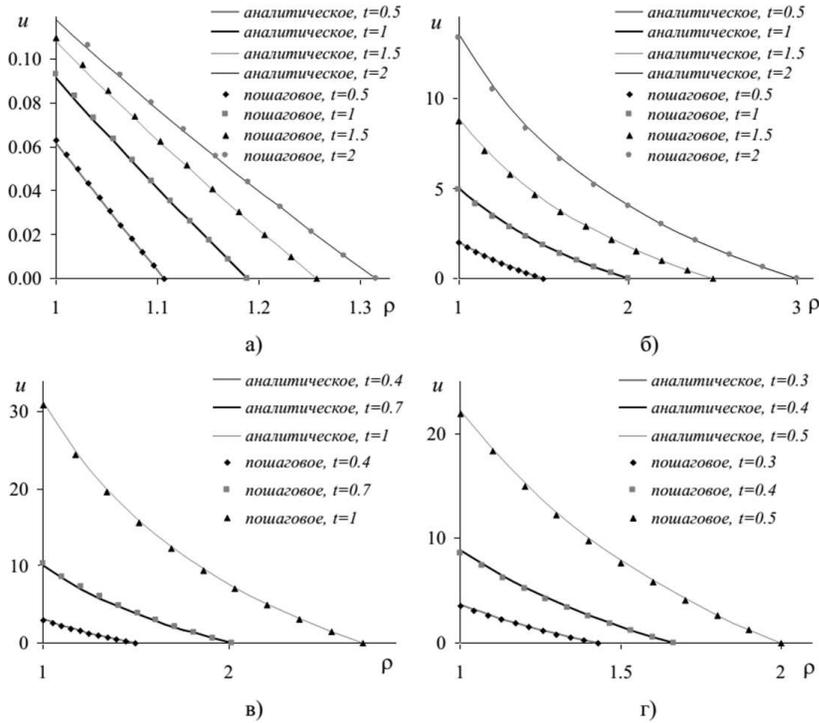


Рис. 2. Сравнение аналитического и пошагового численного решений:
 а) $a(t) = (t + 1)^{1/4}$, б) $a(t) = t + 1$, в) $a(t) = e^t$, г) $a(t) = 1/(1 - t)$.

6. Заключение

В работе исследована трехмерная задача об иницировании тепловой волны краевым режимом, заданным на подвижном многообразии. Доказана новая теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций (теорема 1). Само решение построено в виде кратного ряда с рекуррентно определяемыми коэффициентами. Локальная сходимость ряда доказана методом мажорант. Тем самым обобщены и усилены ранее полученные авторами результаты.

Исследованы содержательные частные случаи рассмотренной задачи, в которых построение решения может быть сведено к интегрированию задачи Коши с особенностью для нелинейного ОДУ второго порядка. Поскольку проинтегрировать в квадратурах ОДУ, по-видимому, невозможно, мы провели его качественное исследование и выполнили численные эксперименты с использованием частичных разложений в степенные ряды и граничноэлементного подхода, развиваемого в последние годы авторами. Представлена интерпретация полученных результатов с точки зрения исходной задачи о движении тепловой волны.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть следующими: интерес представляет получение оценок радиуса сходимости степенных рядов, в виде которых построено решение рассмотренной задачи. В общем случае подобное вряд ли возможно, однако в некоторых частных случаях это, вероятно, окажется доступным.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И., Вишик И. М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 411–417.
2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 490 с.
3. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
4. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
5. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2(74). С. 56–65. <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.205>
6. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.
7. Казаков А. Л., Лемперт А. А. О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
8. Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560. <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.306>
9. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 2. С. 2–17.
10. Кудряшов Н. А., Синельщиков Д. И. Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции-диффузии с нелинейными источниками // Моделирование и анализ информ. систем. 2016. Т. 23, № 3. С. 309–316. <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2016-3-309-316>
11. Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 1. С. 110–120.
12. Кузнецов П. А. О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 9. С. 61–74.

13. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. М. : Юрайт, 2017. 256 с.
14. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М. : Наука, 1987. 480 с.
15. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
16. Banerjee P. K., Butterheld R. Boundary element methods in engineering science. McGraw-Hill Book Company Limited, UK, 1981. 494 p.
17. Kazakov A. L., Spevak L. F. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry // Applied Mathematical Modelling. 2016. Vol. 40, is. 2. P. 1333–1343. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.038>
18. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford : Clarendon Press, 2007. 648 p.

Александр Леонидович Казаков, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Российская Федерация, тел.: (3952) 453033; Институт машиноведения УрО РАН, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, Российская Федерация, тел.: (343) 3753592 (e-mail: kazakov@icc.ru)

Павел Александрович Кузнецов, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Российская Федерация, тел.: (3952) 453107; старший преподаватель, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, Российская Федерация, тел.: (3952)242214 (e-mail: pav_ku@mail.ru)

Лев Фридрихович Спевак, кандидат технических наук, заведующий лабораторией прикладной механики, Институт машиноведения УрО РАН, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, Российская Федерация, тел.: (343) 3753592 (e-mail: lfs@imach.uran.ru)

Поступила в редакцию 24.10.18

On a Three-Dimensional Heat Wave Generated by Boundary Condition Specified on a Time-Dependent Manifold

A. L. Kazakov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russian Federation

Institute of Engineering Science of UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation

P. A. Kuznetsov

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS,
Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation*

L. F. Spevak

*Institute of Engineering Science of UB RAS, Ekaterinburg, Russian
Federation*

Abstract. The article is devoted to study the nonlinear heat equation (the porous medium equation) in the case of power nonlinearity. Three-dimensional problem of the initiation of a heat wave by boundary condition specified on a time-dependent manifold is considered. The wave has a finite velocity of propagation on the cold (zero) background. A new theorem of existence and uniqueness of the analytical solution (the main theorem) is proved. The solution is constructed in the form of a multiple power series with respect to independent variables. The coefficients of the series are computed recurrently by induction on the total order of differentiation: a system of algebraic equations of increasing dimension is solved at each step. The local convergence of the series is proved by majorant method using Cauchy–Kovalevskaya theorem. Thus, previously obtained results are generalize and reinforced which concern the solution of the problem of heat wave motion on the cold background. Besides, some particular cases are considered when the solution procedure can be reduced to the solution of a second order nonlinear ordinary differential equation unsolved with respect to the highest derivative. As the obtained ordinary differential equation can not be solved in quadratures, qualitative research is performed as well as the numerical experiments with the use of the boundary element method. The obtained results are interpreted with respect to the original problem of the heat wave motion.

Keywords: nonlinear heat equation; existence theorem; invariant solution; boundary element method; numerical experiment.

References

1. Barenblatt G.I., Vishik M.I. O konechnoy skorosti rasprostraneniya v zadachakh nestatsyonarnoy fil'tratsii zhidkosti i gaza [On finite velocity of propagation in problems of non-stationary filtration of a liquid or gas]. *Prikl. Matematika i Mekhanika*, 1956, vol. 20, is. 3, pp. 411-417. (in Russian)
2. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane]. Moscow, Nauka, 1990, 490 p. (in Russian)
3. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. K teorii rasprostraneniya tepla pri teploprovodnosti, zavisyashchey ot temperatury [Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature]. *In Collection of Papers Dedicated to 70th Anniversary of A.F. Ioffe*, Moscow, Akad. Nauk SSSR Publ., 1950, pp. 61-71. (in Russian)
4. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a Degenerate Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation in Spherical Coordinates. *Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119-129. (in Russian)

5. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the Analytic Solutions of a Special Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in Polar Coordinates. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, no. 2, pp. 1-11. <https://doi.org/10.1134%2FS1990478918020060>
6. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Investigation of a Nonlinear Filtration Boundary-Value Problem with Degeneration. *Vychislitel'nye tehnologii*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57-68. (in Russian)
7. Kazakov A.L., Lempert A.A. Existence and Uniqueness of the Solution of the Boundary-Value Problem for a Parabolic Equation of Unsteady Filtration. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 251-258. <https://doi.org/10.1134/S0021894413020107>
8. Kazakov A.L., Orlov Sv.S., Orlov S.S. Construction and Study of Exact Solutions to a Nonlinear Heat Equation. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 427-441. <https://doi.org/10.1134%2FS0037446618030060>
9. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary Elements Method and Power Series Method for One-Dimensional Nonlinear Filtration Problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 2-17. (in Russian)
10. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. Analytical Solutions for Nonlinear Convection-Diffusion Equations with Nonlinear Sources. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2017, vol. 51, is. 7, pp. 621-626. <https://doi.org/10.3103%2FS0146411617070148>
11. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A. Approximate Solutions to One-Dimensional Nonlinear Heat Conduction Problems with a Given Flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 1, pp. 107-117. <https://doi.org/10.1134/S0965542507010113>
12. Kuznetsov P.A. On Boundary Value Problem with Degeneration for Nonlinear Porous Medium Equation with Boundary Conditions on the Closed Surface. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2014, vol. 9, pp. 61-74. (in Russian)
13. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Nelineynye uravneniya matematicheskoy fiziki i mekhaniki. Metody resheniya* [Nonlinear equations of mathematical physics and mechanics. Methods of solution]. Moscow, Urait Publishing House, 2017, 256 p. (in Russian)
14. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations*. NY, Walter de Gruyter Berlin, 1995, 534 p.
15. Sidorov A.F. *Selected Works: Mathematics. Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (in Russian)
16. Banerjee P.K., Butterheld R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. UK, McGraw-Hill Book Company Limited, 1981, 494 p.
17. Kazakov A.L., Spevak L.F. An Analytical and Numerical Study of a Nonlinear Parabolic Equation with Degeneration for the Cases of Circular and Spherical Symmetry. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, vol. 40, iss. 2, pp. 1333-1343. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.038>
18. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford, Clarendon Press, 2007, 648 p.

Alexandr Kazakov, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), chief scientist, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel.: (3952)453033; Institute of Engineering Science of UB RAS, 34, Komsomol'skaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

(e-mail: kazakov@icc.ru)

Pavel Kuznetsov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Research Assistant Scientist, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel.: (3952)453107; Assistant Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: (3952)242214 (e-mail: pav_ku@mail.ru)

Lev Spevak, Candidate of Sciences (Engineering Sciences), Head of Laboratory of Applied Mechanics, Institute of Engineering Science of UB RAS, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation, tel.: (343)3753592 (e-mail: lfs@imach.uran.ru)

Received 24.10.18