Серия «Математика»
2016. Т. 17. С. 3—11

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.521.5
MSC 40B99

Об одном представлении числа π в виде двойного ряда *

Е. Н. Галушина

Сибирский федеральный университет
Красноярский государственный медицинский университет им. В.Ф. Войно-Ясенецкого

Аннотация. Предлагается новое представление числа π в виде двойного ряда, которое следует из связи $\wp$-функции Вейерштрасса и тэта-функции Якоби. Даются определения классических $\wp$-функции Вейерштрасса, тэта-функции Якоби. В начале 1980-х гг. итальянский математик П. Заппа попытался обобщить $\wp$-функцию на пространства большей размерности, пользуясь методами многомерного комплексного анализа. С помощью ядра Бохнера – Мартинелли им было найдено такое обобщение, что свойства обобщенной $\wp$-функции напоминают свойства классической одномерной $\wp$-функции, а также многомерный аналог тождества, связывающего $\wp$-функцию и тэта-функцию многих переменных.

Данное тождество содержит постоянную, для которой есть интегральное представление, верное и в одномерном случае. Вычисляя в одномерном случае данную константу разными способами: при помощи интегрального представления, и пользуясь известными рядами, суммы которых выражаются через дигамма функцию, нами было получено представление числа π в виде абсолютно сходящегося двойного ряда.

Были проведены компьютерные эксперименты для оценки скорости сходимости данного ряда. Хоть она оказалась и невысокой, возможно, данное представление будет полезно в фундаментальных исследованиях по математическому анализу и теории чисел.

Ключевые слова: $\wp$-функция Вейерштрасса, тэта-функция Якоби, число π.

* Работа поддержана грантом правительства Российской Федерации для научных исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете, договор №14.Y23.31.0006

1. Введение

Существует множество формул для вычисления цифр числа π с использованием бесконечных рядов и произведений. Среди них хорошо известны и исторически значимые формулы Виета, Валлиса, ряд Лейбница, формулы Дж. Мэчина, и современные, быстро сходящиеся ряды, например формулы Рамануджана или формула Чудновских.

В данной работе с использованием свойств $\wp$-функции Вейерштрасса и тэта-функций Якоби было получено новое представление для числа π в виде двойного ряда:

$$\pi = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} + \sum_{\gamma} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2} \right],$$

где γ пробегает решётку гауссовых чисел за исключением нуля.

Скорость сходимости данного ряда невысокая и зависит от выбора точки p: точность 5 знаков после запятой достигается после 108 слагаемых для $p = \frac{1}{1000}(1+i)$, 100000 слагаемых для $p = \frac{1}{2}(1+i)$.

Возможно, данное представление будет интересно в исследованиях по математическому анализу и теории чисел.

2. Основные определения

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и решётку Γ на ней:

$$\Gamma = \left\{ n\gamma_1 + m\gamma_2 | n, m \in \mathbb{Z}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \right\}.$$

Заметим, что линейным преобразованием любая решётка приводится к виду $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, где $\Im\tau > 0$. Зафиксируем решётку $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ и рассмотрим следующий ряд:

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right),$$

где Γ' — вся решетка за исключением элемента $\gamma = 0$. Данный ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах, не содержащих точек Γ [5, стр. 296]

Определение 1. *$\wp$-функцией Вейерштрасса называется сумма ряда*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right). \tag{2.1}$$

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 17. Серия «Математика». С. 3–11

$\wp$-функция Вейерштрасса является двоякопериодической функцией, не имеющей никаких особых точек, кроме полюсов в узлах решётки на плоскости, т. е. эллиптической функцией в $\mathbb{C}$.

С эллиптическими функциями тесно связаны *тэта-функции*:

Определение 2. *[1] Тэта-функцией называется сумма ряда*

$$\Theta_{\mu,\nu}(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\nu n} e^{\pi iz(2n+\mu)} e^{\pi i\tau\left(n+\frac{\mu}{2}\right)^2},$$

где μ, ν — комплексные числа, $\Im\tau > 0$.

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве в $\mathbb{C} \times H$ (H — верхняя полуплоскость) [1, стр. 197].

Тэта-функции являются квазипериодическими, т. е. сдвигу аргумента на любой элемент решётки периодов соответствует умножение функции на экспоненциальный множитель:

$$\Theta_{\mu,\nu}(z + a\tau + b, \tau) = \exp\left(\pi ib\mu - \pi ia^2\tau - \pi ia\nu - 2\pi iaz\right)\Theta_{\mu,\nu}(z,\tau).$$

Отношение двух тэта-функций, ассоциированных с одной и той же решёткой, представляет собой эллиптическую функцию. И обратно для любой эллиптической функции будут существовать выражения через тэта-функции [5, стр. 350].

Тэта-функция Якоби

$$\theta_1(z,\tau) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi iz(2n+1)} e^{\pi i\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

есть частный случай общей тэта-функции: $\theta_1(z,\tau) = -i\Theta_{1,1}(z,\tau)$.

θ_1-функция и $\wp$-функция Вейерштрасса связаны равенством:

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\ln\theta_1(z) + c, \tag{2.2}$$

где константа c выбирается так, чтобы ряд Лорана функции $\wp(z)$ при $z = 0$ не содержал членов нулевой степени [3].

3. Многомерный аналог $\wp$-функции Вейерштрасса

В начале 1980-х гг. итальянский математик П. Заппа предложил в работе [9] следующее обобщение $\wp$-функции Вейерштрасса на случай многих комплексных переменных, оказавшееся полезным в различных областях (см. [8], [9], [10]).

Пусть Γ — решётка в пространстве $\mathbb{C}^n$. Положим по аналогии с (2.1):

$$\wp^i(z) = \varphi_i(z,0) + \sum_{\gamma\in\Gamma'} \left(\varphi_i(z,\gamma) - \varphi_i(0,\gamma)\right), \tag{3.1}$$

где φ_i — производная смещённого ядра Бохнера — Мартинелли без dz:

$$\varphi_i(z,\gamma) = -\frac{\partial}{\partial z_i}\psi_{BM}(z-\gamma),$$

$$\psi_{BM}(z) = \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\bar{z}_k d\bar{z}[k]}{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)^n}. \tag{3.2}$$

Тогда определим

$$\wp^{ij}(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n-1}}(-1)^{j-1}\wp^i(z)\wedge dz_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dz_j}\wedge\ldots\wedge dz_n.$$

Ряд в (3.1) сходится равномерно на компактах, не содержащих точек из Γ ([10], стр. 25).

Для форм $\wp^{ij}$ существует многомерный аналог тождества (2.2). Если $M=\mathbb{C}^n/\Gamma$ — комплексный тор, то $\wp^{ij}$ можно рассматривать как мероморфную форму на M. Пусть Θ — дивизор нулей на M тэта-функции θ в $\mathbb{C}^n$, тогда верна

Теорема 1. *[9] Справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Theta}\wp^{ij}(z-p) = -\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_j}\log\theta\Big|_p + c^{ij},$$

для любой точки $p\in M$, $p\notin\Theta$, где c^{ij} не зависит от p.

Предложение 1. *[9, Предложение 2] Константы c^{ij} представляются интегралами*

$$c^{ij} = \frac{i}{\pi}\int\limits_{\partial Q}\partial\log h\wedge\wp^{ij}(z-\tilde{p}). \tag{3.3}$$

Здесь Q — фундаментальный параллелепипед в $\mathbb{C}^n$, а $\widetilde{p}$ — представитель класса $p\in M$ из внутренности этого параллелепипеда. Функция h — любая гладкая положительная функция такая, что $\omega = h|\theta|$ является Γ-инвариантной функцией. Согласно [2, стр. 344], такая функция h является экспонентой от квадратичного полинома от z и $\bar{z}$.

4. Представление числа π в виде двойного ряда

Можно показать, что константа в тождестве (2.2) равна

$$c = -\frac{\pi^2 E_2}{3},$$

где

$$E_2(\tau) = 1 + \frac{2}{\zeta(-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot q^n}{1 - q^n},$$

ζ — дзета-функция Римана, а $q = e^{2\pi i \tau}$. Пользуясь представлением ряда E_2 в случае гауссовой решётки $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ и известным тождеством [4, стр. 718, формула 4], получаем:

$$c = -\pi.$$

С другой стороны, эта же константа может быть вычислена при помощи интеграла (3.3)

$$c = \frac{i}{\pi} \int\limits_{\partial Q} \wp(z-p)\, \partial \log h.$$

В качестве тэта-функции, определяющий дивизор Θ, возьмём

$$\theta_1(z) = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{2\pi i z\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

по той причине, что её нули — в точности узлы решётки Γ. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найдем подходящую функцию h:

$$h(z) = e^{-\pi(\mathrm{Im} z)^2}.$$

Взяв производную от $\log h(z)$ по переменной z, окончательно получаем

$$c = \frac{i}{\pi} \int\limits_{\partial Q} \pi i y \wp(z-p)\, dz = -\int\limits_{\partial Q} y \wp(z-p)\, dz.$$

Выберем в качестве Q — единичный квадрат с вершинами в точках 0, 1, $1+i$, i, тогда

$$c = -\int\limits_{\partial Q} y\wp(z-p)\, dz = -\left(\int\limits_0^1 0 \cdot \wp(x-p)\, dx + \int\limits_0^1 y\wp(1+iy-p)\, i dy + \right.$$
$$\left. - \int\limits_0^1 \wp(x+i-p)\, dx - \int\limits_0^1 y\wp(iy-p)\, i dy\right)$$

Поскольку $\wp$-функция является двоякопериодической, то

$$\int_0^1 y\wp\left(1+iy-p\right)idy=\int_0^1 y\wp\left(iy-p\right)idy,$$

$$\int_0^1 \wp\left(x+i-p\right)dx=\int_0^1 \wp\left(x-p\right)dx.$$

Таким образом,

$$c=\int_0^1 \wp\left(x-p\right)dx,$$

(см. также доказательство леммы 1 в [7]).

Вычислим этот интеграл, интегрируя почленно ряд (2.1).

$$c=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-p\right)^2}+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\left[\frac{dx}{\left(x-\gamma-p\right)^2}-\frac{dx}{\gamma^2}\right]=$$
$$=-\left(\frac{1}{1-p}+\frac{1}{p}+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\left[\frac{1}{1-\gamma-p}+\frac{1}{\gamma+p}+\frac{1}{\gamma^2}\right]\right).$$

Таким образом,

$$\pi=\frac{1}{1-p}+\frac{1}{p}+\sum_{\gamma\in\Gamma'}\left[\frac{1}{1-\gamma-p}+\frac{1}{\gamma+p}+\frac{1}{\gamma^2}\right]. \tag{4.1}$$

С другой стороны, сумма этого ряда S может быть вычислена непосредственно, так как ряд (4.1) сходится равномерно, то есть при любом исчерпании множества суммирования. Представим его в виде предела частичных сумм по квадратам $Q_k=\left\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2:\max\left\{|n|,|m|\right\}\le k\right\}$ так, что

$$S=\lim_{k\to\infty}S_k,$$

где

$$S_k=S_{k-1}+\sum_{\max\{|n|,|m|\}=k}\left[\frac{1}{1-\gamma-p}+\frac{1}{\gamma+p}+\frac{1}{\gamma^2}\right], k\in\mathbb{N} \text{ и}$$

$$S_0=\frac{1}{1-p}+\frac{1}{p}.$$

Иначе говоря, S_k есть сумма членов ряда по всем точкам γ решётки Γ', лежащим внутри и на границе квадрата Q_k с вершинами в точках $ki+k$, $ki-k$, $-ki-k$, $-ki+k$.

Можно показать, что

$$S_k = \sum_{t=-k}^{k} \frac{1}{it+1+k-p} - \frac{1}{it-k-p}.$$

Воспользуемся теперь следующей формулой [4, стр. 601, формула 7]:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{1}{(t+a)(t+b)} = \frac{1}{b-a}\left[\psi(n+a+1) - \psi(a) - \psi(n+b+1) + \psi(b)\right],$$

где $\psi(z)$ — дигамма функция.

Имеем

$$\begin{aligned} S_k = i\,[\psi(1+k+i+ki-pi) - \psi(i+ki-pi) - \\ -\psi(1+k-ki-pi) + \psi(-ki-pi)] + i\,[-\psi(k+1-i-ki+pi) + \\ \psi(1-i-ki+pi) - \psi(1+ki+pi) + \psi(1+k+ki+pi)] \end{aligned}$$

Применив формулу дополнения [4, стр. 774], получим

$$\begin{aligned} S_k = i\,[\psi(1+k+i+ki-pi) - \\ -\psi(1+k-ki-pi) - \psi(1+k-i-ki+pi) + \\ +\psi(1+k+ki+pi) + \pi\mathrm{ctg}(\pi i(1+k-p)) + \pi\mathrm{ctg}(\pi i(k+p))]. \end{aligned}$$

Воспользуемся асимптотическим рядом для дигамма-функции [6]:

$$\begin{aligned} S_k \sim i\,[\ln(k+i(1+k-p)) - \ln(k-i(k+p)) + \\ +\ln(k+i(k+p)) - \ln(k-i(1+k-p)) - \\ +\pi\mathrm{ctg}(\pi i(1+k-p)) + \pi\mathrm{ctg}(\pi i(k+p))] + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

при $k \to \infty$.

Пользуясь свойствами пределов и логарифма, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_k = i\ln\lim_{k\to\infty} \frac{(k-1+i(1+k-p))(k+i(k+p))}{(k-i(k+p))(k-i(1+k-p))} + \\ + i\pi\lim_{k\to\infty}\mathrm{ctg}(\pi i(1+k-p)) + i\pi\lim_{k\to\infty}\mathrm{ctg}(\pi i(k+p)). \end{aligned}$$

Для вычисления $\lim \mathrm{ctg}(\pi i(1+k-p))$ при $k \to \infty$ воспользуемся формулой Эйлера:

$$\mathrm{ctg} iz = \frac{i(e^{-z}+e^{z})}{e^{-z}-e^{z}} = \frac{i\left(e^{-2z}+1\right)}{e^{-2z}-1}.$$

Тогда

$$i\pi \lim_{k\to\infty} \operatorname{ctg}\left(\pi i\left(1+k-p\right)\right) = -\pi \lim_{k\to\infty} \frac{e^{-2\pi(1+k-p)}+1}{e^{-2\pi(1+k-p)}-1} = \pi.$$

Аналогично

$$i\pi \lim_{k\to\infty} \operatorname{ctg}\left(\pi i\left(k+p\right)\right) = \pi.$$

Окончательно имеем

$$\lim_{k\to\infty} S_k = 2i\ln\frac{1+i}{1-i} + 2\pi = 2i\ln i + 2\pi = 2i\frac{\pi i}{2} + 2\pi = \pi.$$

Список литературы

1. Гурвиц А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. – М. : Наука, 1968. — 648 с.
2. Гриффитс Ф. Принципы алгебраической геометрии : пер. с англ. / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. – М. : Мир, 1982. – Т. 1. – 496 с.
3. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях : пер. с англ. / Д. Мамфорд. – М. : Мир, 1988. – 448 с.
4. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев. – М. : Наука, 1981. – 800 с.
5. Уиттекер Э. Т. Курс современного анализа. В 2 ч. Ч 2. Трансцендентные функции / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 516 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2009. – 800 с.
7. Diaz R. Pick's Formula via the Weierstrass $\wp$-function / R. Diaz, S. Robins // The American Mathematical Monthly. – 1995. – Vol. 102, N. 5. – P. 432–437.
8. Tereshonok E. N. McMullen's formula and a multidimensional analog of the Weierstrass ζ-function / E. N. Tereshonok // Complex variables and elliptic equations: an international journal. – 2015. – Vol. 60, N 11. – P. 1594–1601.
9. Zappa P. Su una generalizzazione della $\wp$ di Weierstrass / P. Zappa // Bollettino U. M. I. – 1983. – Vol. (6) 2-A. – P. 245–252.
10. Zappa P. Osservazioni sui nuclei di Bochner-Martinelli / P. Zappa // Acc. Naz. Lincei. – 1979. – Vol. VIII, N LXVII. — P. 21–26.

Галушина Елена Николаевна, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79; тел.: (391)2448625, преподаватель, Красноярский государственный медицинский университет им. В. Ф. Войно-Ясенецкого, 660022, Красноярск, ул. Партизана Железняка, 1; тел.: (391)2200316 (e-mail: `l.tereshonok@gmail.com`)

E. N. Galushina

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 17. Серия «Математика». С. 3–11

On a Double Series Representation of π

Abstract. This paper proposes a new representation of π as a double series. This representation follows from the relation between the Weierstrass $\wp$-function and the Jacobi theta-function. In the beginning of the paper we give definitions of the classical Weierstrass $\wp$-function and Jacobi theta-function. In the beginning of 1980s Italian mathematician P.Zappa attempted to generalize $\wp$-function to multidimensional spaces using methods of multidimensional complex analysis. Using the Bochner-Martinelli kernel he found a generalizationof the $\wp$-function with properties similar to the classical one-dimensional $\wp$-function, and and analog of the identity that connects the $\wp$-function and a certain theta-function of several variables.

This identity involves a constant given by an integral representation that also holds in the one-dimensional case. Computing this constant in one-dimensional case by two different methods, namely, using the integral representation and using known series whose sums involve the digamma function, we obtain a representation of π as an absolutely convergent double series. We have performed computational experiments to estimate the rate of convergence of this series. Although it is not fast, hopefully, the proposed representation will be useful in fundamental studies in the field of mathematical analysis and number theory.

Keywords: Weierstrass $\wp$-function, Jacobi theta-function, π.

References

1. Hurwitz A., Courant R. Theory of functions (in Russian). Moscow, Nauka, 1968. 648 p.
2. Griffiths Ph., Harris J. Principles of Algebraic Geometry, Vol. 1. Moscow, Mir, 1982. 496 p.
3. Mumford D. Lectures on theta-functions (in Russian). Moscow, Mir, 1988. 448 p.
4. Prudnikov A.P. Brychkov Y.A., Marychev O.I. Integrals and series (in Russian). Moscow, Nauka, 1981. 800 p.
5. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis: in 2 parts. Part 2. Transcendental functions (in Russian). Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1963. 516 p.
6. Fichtenholz G.M. A course of differential and integral calculus, Vol. 2 (in Russian). Sankt-Peterburg, Lan', 2009. 800 p.
7. Diaz R., Robins S. Pick's Formula via the Weierstrass $\wp$-function. *The American Mathematical Monthly*, 1995, vol. 102, no 5, pp. 432–437.
8. Tereshonok E.N. McMullen's formula and a multidimensional analog of the Weierstrass ζ-function. *Complex variables and elliptic equations: an international journal*, 2015, vol. 60, no 11, pp. 1594–1601.
9. Zappa P. Su una generalizzazione della $\wp$ di Weierstrass. *Bollettino U. M. I.*, 1983, vol. (6) 2-A, pp. 245–252.
10. Zappa P. Osservazioni sui nuclei di Bochner – Martinelli. *Acc. Naz. Lincei.*, 1979, vol. VIII, no LXVII, pp. 21-26.

Galushina Elena Nikolaevna, Siberian Federal University, 79, Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660041; tel.: (391)2448625; Krasnoyarsk State Medical University named after Prof. V. F. Voino-Yasenetsky, 1, Partizana Zheleznyaka st., Krasnoyarsk, 660022; tel.: (391)2200316
(e-mail: `l.tereshonok@gmail.com`)