Серия «Математика»
2015. Т. 12. С. 72—78

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.57

Ihm-квазипорядок и производные структуры универсальных алгебр; 1-алгебраически полные алгебры *

А. Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет

Аннотация. Исследуется взаимосвязь так называемого Ihm-квазипорядка (определяющего оператор алгебраического замыкания на подмножествах прямых степеней основных множеств универсальных алгебр) с такими производными структурами этих алгебр как решетки алгебраических множеств, решетки подалгебр и полугруппы внутренних гомоморфизмов. Вводится понятие 1-алгебраически полных алгебр и доказывается, что для любой не менее чем континуальной алгебры счетной сигнатуры существует ее 1-алгебраически полное расширение той же мощности, что и сама алгебра.

Ключевые слова: hm-квазипорядок, алгебраические множества, внутренние гомоморфизмы, 1-алгебраически полные алгебры.

В работе [1] для изучения строения алгебраических замыканий (см. [2]) подмножеств универсальной алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ предложено рассмотрение некоторого отношения квазипорядка $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}'}$, в терминах которого возможно описание этого замыкания, а роль алгебры $\mathfrak{A}'$ выполняет расширение $\mathfrak{A}^A$ алгебры $\mathfrak{A}$. При этом квазипорядок $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ представляет интерес и сам по себе (см. [3]), в частности в связи с теми или иными производными структурами алгебр, а роль алгебры $\mathfrak{A}'$ могут играть и иные, отличные от $\mathfrak{A}^A$, расширения алгебры $\mathfrak{A}$. Этому кругу вопросов и посвящена настоящая работа.

Прежде всего напомним, что *множество* $B \subseteq A$ называется *алгебраическим* для универсальной алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$, если оно является совокупностью решений в $\mathfrak{A}$ некоторой системы $\mathfrak{T}(x) = \{t_i^1(x) = t_i^2(x) | i \in I\}$ термальных уравнений сигнатуры σ:

Алгебраическим замыканием $\bar{B}_{\mathfrak{A}}$ подмножества B основного множества A универсальной алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ называется наимень-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052

шее (относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$) алгебраическое множество алгебры $\mathfrak{A}$ включающее в себя B.

Отношение Ihm-квазипорядка $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ на основном множестве A универсальной алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ введено в работе автора [1]: для $a, b \in A$ $a \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} b$ тогда и только тогда, когда существует φ внутренний гомоморфизм универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ (гомоморфизм между некоторыми ее подалгебрами) такой, что $\varphi(b) = a$, или иначе, если существует гомоморфизм ψ алгебры $< b >_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $< a >_{\mathfrak{A}}$ такой, что $\psi(b) = a$ Здесь и далее $< c >_{\mathfrak{A}}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ порожденная элементом c из A. Традиционно через $Ihm\mathfrak{A}$ будем обозначать полугруппу (совокупность) всех внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ (подробнее см. [4]), а через $Sub\mathfrak{A}$ — решетку (совокупность) всех подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$. В работе [1] в терминах квазипорядка $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ описан оператор $\{a\} \to \overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}}$ алгебраического замыкания на одноэлементных подмножествах основного множества A алгебры $\mathfrak{A}$: для $b \in A$ $b \in \overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow b \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} a$. В силу определения неравенства $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ отношение $a \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} b$ имеет место тогда и только тогда, когда для любых термов $t^1(x), t^2(x)$ сигнатуры σ отношение $\mathfrak{A} \vDash t^1(b) = t^2(b)$ влечет отношение $\mathfrak{A} \vDash t^1(a) = t^2(a)$. Таким образом для любых $a, b \in A$ $a \in \overline{\{b\}}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} b$. Как показано в работе [1] это описание оператора $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}}$ можно перенести с одноэлнментных подмножеств $\{b\}$ множества A на произвольные $B \subseteq A$ путем перехода от алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ к алгебре $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^A$. При этом для $a \in A$, $B \subseteq A$ $a \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}'} d_B$, где $\bar{a}, d_B \in \mathfrak{A}^A$ таковы, что $\bar{a}(c) = a$ для любого $c \in A$ и $\{d_B(c) | c \in A\} = B$. При этом элементы d_B игают роль супремума для элементов $\bar{b}(b \in B)$ относительно квазипорядка $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}'}$. $\overline{\{\bar{b} | b \in B\}}_{\mathfrak{A}'} = \overline{\{d_B\}}_{\mathfrak{A}'}$ и

$$(*) \qquad \overline{\{d_B\}}_{\mathfrak{A}'} \cap \{\bar{c} | c \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}\} = \overline{\{\bar{b} | b \in B\}}_{\mathfrak{A}'} \cap \{\bar{c} | c \in \bar{B}_{\mathfrak{A}}\}.$$

Возникает естественный вопрос: нельзя ли определить оператор $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}}$ (для $B \subseteq A$) в терминах квазипорядка $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ не выходя за пределы алгебры $\mathfrak{A}$ (не переходя к расширению $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^A$). Пример 1 данной работы доказывает, что это невозможно, т.е. что существуют алгебры $\mathfrak{A}_1 = < A; \sigma_1 >$, $\mathfrak{A}_2 = < A; \sigma_2 >$ такие, что отношение $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$ совпадает на множестве A с отношением $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_2}$, но операторы $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}_1}$ и $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}_2}$ на подмножествах B множества A различны.

Дальнейшие примеры 2, 3 данной работы связаны с естественно возникающими в данном контексте вопросами взаимосвязи квазипорядка $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ с производными структурами $Ihm\mathfrak{A}$ и $Sub\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Через $Alg_1\mathfrak{A}$ обозначим совокупность всех алгебраических подмножеств $B \subseteq A$ алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$.

В силу замеченного выше равенство $Alg_1\mathfrak{A}_1 = Alg_1\mathfrak{A}_2$ равно как и равенство $Ihm\mathfrak{A}_1 = Ihm\mathfrak{A}_2$ для алгебр $\mathfrak{A}_1 = < A; \sigma_1 >$ и $\mathfrak{A}_2 = < A; \sigma_2 >$

с общим основным множеством A влекут совпадение квазипорядков $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$ и $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_2}$. Обратное неверно.

Пример 1. Через $\mathfrak{L}_n = < C_n; f >$ для любого натурального n обозначим f-n-цикл сигнатуры $\sigma =< f >$. Пусть алгебра $\mathfrak{A}_1 = < A; \sigma >$ является дизъюнктным объединением f-циклов $\mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{L}_3$ и счетного числа циклов типа $\mathfrak{L}_6$. Аналогичным образом алгебра $\mathfrak{A}_2 = < A; \sigma >$ пусть будет дизъюнктным объединением циклов $\mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{L}_3$ и счетного числа циклов типа $\mathfrak{L}_{12}$. Тогда, очевидно, что $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$ совпадает с $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$ но множество $C_2 \cup C_3$ является алгебраическим в $\mathfrak{A}_2$ (суть решения уравнения $f^6(x) = x$), но не является таковым для $\mathfrak{A}_1$: $\overline{(C_1 \cup C_2)}_{\mathfrak{A}_1} = A$.

Напомним так же, что решетка подалгебр $Sub\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{A}$ однозначно определима полугруппой $Ihm\mathfrak{A}$ ее внутренних гомоморфизмов. Подалгебра B алгебры $\mathfrak{A}$ ассоциируется при этом с идемпотентом id_B (тождественным отображением B на себя) полугруппы $Ihm\mathfrak{A}$.

В связи с примером 1, равенством $\overline{\{c\}}_{\mathfrak{A}} = \{b \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} c | b \in A\}$ и определимостью идеала $\{b \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} c | b \in A\}$ с помощью отображений из $Ihm\mathfrak{A}$ естественно возникает вопрос об однозначной определимости полугруппы $Ihm\mathfrak{A}$ квазипорядком $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$. Следующий пример демонстрирует, что это не так. Более того, квазипоррядок $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$ не определяет даже решетку $Sub\mathfrak{A}$.

Пример 2. Пусть p некоторое простое натуральное число и моноунар $\mathfrak{A}_1 = < A; \sigma >$ $(\sigma =< f >)$ является дизъюнктным объединением f-p^n-циклов $(n \in \omega)$ $\mathfrak{L}_{p^n}$. Обогатим моноунар $\mathfrak{A}_1$ путем добавления в сигнатуру σ' еще одного унарного символа g и алгебру $\mathfrak{A}_2 = < A; \sigma' >$ определим как обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ следующим образом: для любого $a \in A$ $g(a) = e$, где $\mathfrak{L}_{p^0} = \mathfrak{L}_1$ и $C_1 = e$. Очевидным образом квазипорядки $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$ и $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_2}$ совпадают, в то время как для любого $n > 0$ $C_{p^n} \in Sub\mathfrak{A}_1$ но $C_{p^n} \notin Sub\mathfrak{A}_2$.

Наконец, в силу примера 2, возникает вопрос, не влекут ли совпадения квазипорядков $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$ и $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_2}$ и решеток $Sub\mathfrak{A}_1$ и $Sub\mathfrak{A}_2$ соответственно, совпадение полугрупп $Ihm\mathfrak{A}_1$ и $Ihm\mathfrak{A}_2$? Следующий пример демонстрирует, что это не так.

Пример 3. Рассмотрим восьмиэлементное множество

$$A = \{a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1\}$$

и двухместные функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ определенные на A следующим образом: $f(a_1, b_1) = c_1$, $f(b_1, a_1) = d_1$, $f(a_0, b_0) = c_0$, $f(b_0, a_0) = d_0$ во всех остальных случаях $f(x, y) = x$; $g(a_1, b_1) = c_1$, $g(b_1, a_1) = d_1$, $g(a_0, b_0) = c_0$, $g(b_0, a_0) = d_0$ и в иных ситуациях $g(x, y) = x$. Наконец, $h(a_1, b_1) = c_1$, $h(b_1, a_1) = d_1$, $h(a_0, b_0) = d_0$, $h(b_0, a_0) = c_0$ и в иных случаях $h(x, y) = x$.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = < A; f, g >$ и $\mathfrak{A}_2 = < A; f, h >$. Непосредственно замечается, так как все одноэлементные подмножества алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ суть их подалгебры, то $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$ совпадает с $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}_1}$. Столь же непосредственно замечается, что $Sub\mathfrak{A}_1 = Sub\mathfrak{A}_2$, а так как отображение φ: $\varphi(a_1) = a_0$, $\varphi(b_1) = b_0$, $\varphi(c_1) = c_0$, $\varphi(d_1) = d_0$ входит в $Ihm\mathfrak{A}_1$ и не входит в $Ihm\mathfrak{A}_2$, то $Ihm\mathfrak{A}_1 \neq Ihm\mathfrak{A}_2$. .

Помимо алгебры $\mathfrak{A}^A$ роль алгебры $\mathfrak{A}'$ для описания (см. равенство $(*)$) оператора алгебраического замыкания $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}}$ могут играть и иные расширения алгебры $\mathfrak{A}$. Необходимым условием при этом является существование в $\mathfrak{A}' = < A'; \sigma >$ некоторого элемента d_B такого, что $\bar{B}_{\mathfrak{A}'} = \overline{\{d_B\}}_{\mathfrak{A}'}$ для любого подмножества $B \subseteq A'$.

Квазиупорядоченное множество $< C; \leqslant >$ будем называть *квазирешеткой*, если решеткой является фактор-множество $< {}^{C}\!/_{\sim}; \leqslant >$ по отношению эквивалентности $\sim$ порожденному квазипорядком $\leqslant$. Соответственно $< C; \leqslant >$ будем называть *полной квазирешеткой*, если решетка $< {}^{C}\!/_{\sim}; \leqslant >$ является полной.

Описанная выше ситуация с расширением $\mathfrak{A}^A$ алгебры $\mathfrak{A}$ подсказывает следующее определение. Универсальную алгебру $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ назовем *1-алгебраически полной*, если для любого $B \subseteq A$ существует элемент m_B из A такой, что $\bar{B}_{\mathfrak{A}} = \overline{\{m_B\}}_{\mathfrak{A}}$. Таким образом, алгебры вида $\mathfrak{A}^A$ для любых алгебр $\mathfrak{A}$ являются 1-алгебраически полными, а вложение $\varphi(a) = \bar{a}$ является вложением любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ в 1-алгебраически полную алгебру $\mathfrak{A}^A$. В силу определения 1-алгебраически полных алгебр и замеченного выше, совокупность алгебраически замкнутых подмножеств 1-алгебраически полной алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ совпадает с совокупностью главных идеалов (подмножеств вида $\{a \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} b | a \in A$ где $b \in A\}$) квазиупорядоченного множества $< A; \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} >$. В качестве примеров 1-алгебраически полных алгебр укажем на произвольные решетки (вообще на любую идемпотентную алгебру). Так же нетрудно непосредственно заметить, что 1-алгебраически полной является любая булева алгебра. Непосредственно замечается, что абелева группа $\mathfrak{A}$ является 1-алгебраически полной тогда и только тогда, когда конечные порядки элементов из $\mathfrak{A}$ ограничены в совокупности, либо $\mathfrak{A}$ содержит элемент бесконечного порядка.

Отметим, что если $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ 1-алгебраически полная алгебра, то квазипорядок $< A; \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} >$ является полной квазирешеткой, где элемент ${}^{m_B}\!/_{\sim_{Iso\mathfrak{A}}}$ играет роль супремума для множества ${}^{B}\!/_{\sim_{Iso\mathfrak{A}}}$ в полной решетке $< {}^{A}\!/_{\sim_{Iso\mathfrak{A}}}; \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} >$, здесь $\sim_{Iso\mathfrak{A}}$ - эквивалентность порожденная квазипорядком $\leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}$.

Обратное неверно. Пусть, к примеру, $\mathfrak{A} = < A; f >$ алгебра, сигнатура которой состоит из одной унарной операции f, a, b, c, d, $e \in A$ и $< a >_{\mathfrak{A}}$-f-2-цикл, $< b >_{\mathfrak{A}}$-f-3-цикл, $< c >_{\mathfrak{A}}$-f-5-цикл, $< d >_{\mathfrak{A}}$-f-30-цикл и e идемпотент алгебры $\mathfrak{A}$. При этом $\mathfrak{A}$ - дизъюнктное объединение подалгебр $< a >_{\mathfrak{A}}$, $< b >_{\mathfrak{A}}$, $< c >_{\mathfrak{A}}$, $< d >_{\mathfrak{A}}$ и $< e >_{\mathfrak{A}}$. Очевидно, что $<{}^{A}/_{\sim_{Iso\mathfrak{A}}}; \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}}>$ пятиэлементная (полная) решетка M_3, но алгебра $\mathfrak{A}$ не является алгебраически полной, к примеру, $< a >_{\mathfrak{A}} \cup < b >_{\mathfrak{A}}$ является алгебраическим множеством отличным от любого множества вида $\overline{\{u\}}_{\mathfrak{A}}$ для какого-либо $u \in A$.

Отметим теперь, что класс 1-алгебраически полных алгебр любой не более чем счетной фиксированной сигнатуры σ является $L_{\omega_1,\omega}$-аксиоматизируемым классом. Действительно, пусть $\mathfrak{T}(x)$ произвольная фиксированная (не более чем счетная) система термальных уравнений

$$\{t_i^1(x) = t_i^2(x) | i \in I\}$$

сигнатуры σ от переменной x, а $T_\sigma(x)$ — совокупность всех подобных (сигнатуры σ от переменной x) термальных уравнений. Через $A_{\mathfrak{T}(x)}$ обозначим следующую $L_{\omega_1,\omega}$-формулу сигнатуры σ:

$$A_{\mathfrak{T}(x)} = \exists x \mathfrak{T}(x) \to \exists z \Big(\mathop{\&}_{t'(x)=t''(x) \in T_\sigma(x)} t'(z) = t''(z) \leftrightarrow \forall y (\& \, \mathfrak{T}(y) \to$$
$$\to t'(y) = t''(y)) \Big) .$$

Очевидно, что алгебра $\mathfrak{A}$ является 1-алгебраически полной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models A_{\mathfrak{T}(x)}$ для любой системы термальных уравнений $\mathfrak{T}(x)$.

Как хорошо известно из теоремы Левенгейма – Сколема, для счетных фрагментов языка $L_{\omega_1,\omega}$ (см., к примеру, [5]) вытекает следующий вариант этой теоремы для языка $L_{\omega,\omega}$ в целом.

Для любой модели $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ не более чем счетной сигнатуры σ и любого $B \subseteq A$ мощности $\aleph$ существует подмодель $\mathfrak{L} = < B'; \sigma >$ модели $\mathfrak{A}$ мощности не более чем $max(2^{\aleph_0}, \aleph)$ включающая в себя B и такая, что $L_{\omega_1,\omega}$-теории моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}$ совпадают.

Тем самым, в силу $L_{\omega_1,\omega}$-аксиоматизируемости класса 1-алгебраически полных алгебр, того, что, как отмечено выше, любая алгебра $\mathfrak{A}$ вложима в 1-алгебраически полную алгебру $\mathfrak{A}^A$ и приведенного выше $L_{\omega_1,\omega}$-варианта теоремы Левенгейма-Сколема, имеет место

Теорема 1. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ не более чем счетной сигнатуры имеющей мощность $\aleph \geqslant 2^{\aleph_0}$ существует 1-алгебраически полное расширение алгебры $\mathfrak{A}$ той же мощности $\aleph$.*

Выбирая кардинал $\aleph$ отличным от кардиналов вида λ^λ получаем утверждение

Следствие 1. *Любой элементарный класс K содержит 1-алгебраически полные алгебры не изоморфные алгебрам вида $\mathfrak{A}^A$ ни для каких универсальных алгебр $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$.*

Покажем теперь, что ограничение $\aleph \geqslant 2^{\aleph_0}$ в формулировке теоремы существенно. Пусть сигнатура σ состоит из счетного числа унарных функций $\sigma = < f_n(x) | n \in \omega >$. На множестве $A = \omega \times \{0,1\}$ определим алгебру $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ сигнатуры σ следующим образом: для любых $n, m \in \omega$ и $i \in \{0,1\}$ пусть

$$f_n(m,i) = \begin{cases} < m, 1-i >, \text{ если } m = n, \\ < m, i >, \text{ если } m \neq n. \end{cases}$$

Тогда для любого $B \subseteq \omega \quad B \times \{0,1\}$ алгебраическое множество в $\mathfrak{A}$, определяемое совокупностью термальных уравнений $\mathfrak{T}_B(x) = \{f_n(x) = x | n \notin B\}$. Если $\mathfrak{A}'$ 1-алгебраически полное расширение $\mathfrak{A}$ и m_B элементы из $\mathfrak{A}'$ такие, что $B \times \{0,1\} = \overline{\{m_B\}}_{\mathfrak{A}'}$, то для $B_1 \neq B_2 \subseteq \omega$ $m_{B_1} \neq m_{B_2}$ и значит $|\mathfrak{A}'| \geqslant \{m_B | B \subseteq \omega\} \geqslant 2^{\aleph_0}$, что и требовалось показать.

Список литературы

1. Пинус А. Г. О квазипорядке индуцированном внутренними гомоморфизмами универсальных алгебр и операторе алгебраического замыкания на алгебрах / А. Г. Пинус // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 3. – С. 629-636.
2. Плоткин Б. И. Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре / Б. И. Плоткин // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9, № 4. – С. 224–248.
3. Пинус А. Г. Об Ihm-дозволенных и Ihm-запрещенных квазипорядках на алгебрах (в печати).
4. Пинус А. Г. Производные структуры универсальных алгебр / А. Г. Пинус. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007.
5. Dickman M. A. Larger Infinitary Languages // Model-Theoretic Logics. – N. Y. : Springer-Verlag, 1985. – P. 317–363.

Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел.: 383-346-11-66,
e-mail: ag.pinus@gmail.com

A. G. Pinus

Ihm-Quasiorder and Derived Structures of Universal Algebras; 1-Algebraic Complete Algebras

Abstract. The relation of so-called Ihm-quasiorder (defining a closure operator on subsets of direct powers of basic sets of universal algebras) with the such derived structures of these algebras as a lattices its algebraic subsets, lattices of its subalgebras, semigroups of its innere homomorphisms. We introduce the notion of 1-algebraic complete algebras and prove that for any least countinual algebra of countable signature exists its 1-algebraic complete extebsion of the same power as the algebra.

References

1. Pinus A.G. On the Quasiorder which is induced by the Innere Homomorphisms of the Universal Algebras and on the Algebraic Closure Operator on the Subsets of these Algebras (O kvaziporyadke indutsirovannom vnutrennimi gomomorfizmami universalnich algebr i ob operatore algebraicheskogo zamikaniya na podmnogestvach etikh algebr). *Sib. math. Journal* (Sib. mat. zhurnal), 2015, vol.56, no 3. P. 629-636.
2. Plotkin B.I. Some Notions of Algebraic Geometry in Universal Algebra ((Nekotorye ponyatiya algebraicheskoy geometrii v universalnoi algebre)). *Algebra and Analisis* ((Algebra i analiz)), 1997, vol.9, no 4, pp.224-248.
3. Pinus A.G. On Ihm-permitted and Ihm-banned Quasiorders on Algebras ((O Ihm-dozvolennikh i Ihm-zapreshchennikh kvaziporyadkakh na algebrach)) (in appered).
4. Pinus A.G. Derived Structures of Universal Algebras ((Proizvodnie struktury universalnikh algebr)). Novosibirsk, NGTU-Publ., 2007 ((Novosibirsk, izd-vo NGTU, 2007)).
5. Dickman M.A. Larger Infinitary Languages. *Model-Theoretic Logiks.* Springer-Verlag, New-York, 1985, pp. 317-363.

Pinus Alexandr, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), professor, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx pr., Novosibirsk, 630073, tel.: 383-346-11-66, e-mail: ag.pinus@gmail.com