Серия «Математика»
2009. Т. 2, № 2, С. 136—157

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.7

Сложность проверяющих тестов для бесповторных булевых функций *

Л. В. Рябец
Восточно-сибирская государственная академия образования

Аннотация. В работе рассматривается вопрос сложности проверяющих тестов относительно бесповторной альтернативы для бесповторных булевых функций, существенно зависящих от своих переменных. Известно, что большинство неисправностей в схемах функциональных элементов, реализующих бесповторные булевы функции, приводит к новой схеме, реализующей также бесповторную функцию. Построение проверяющих тестов относительно бесповторной альтернативы для бесповторных булевых функций осуществляется на основе квадратов существенности. В работе получено точное значение функции Шеннона для тестов относительно бесповторной альтернативы в базисе $\{\neg, \vee, \&, \oplus\}$. Также представлен алгоритм получения проверяющего теста для любой бесповторной булевой функции, имеющий сложность $O(n^3)$.

Ключевые слова: бесповторные булевы функции, тестирование схем, проверяющие тесты, тесты относительно бесповторной альтернативы.

Задача построения проверяющих тестов для бесповторных булевых функций рассмотрена А.А. Вороненко в [1]. В этой работе предложен метод построения тестов и получены оценки на длину проверяющего теста.

Теорема 1 ([1]). *Для функции Шеннона для тестов относительно бесповторной альтернативы при $n \geq 2$ выполняются соотношения*

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq T(n) \leq 2n(n-1).$$

В настоящей работе найдено точное значение функции Шеннона для указанных тестов. При изложении результатов мы будем придерживаться терминологии из [1] и [3].

В работе бесповторными называются булевы функции, выразимые бесповторными формулами в базисе $\{\neg, \vee, \&, \oplus\}$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00476–а.

Проверяющим тестом M для некоторой булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется такое множество входных наборов, что для любой функции неисправности $g(x_1,\ldots,x_n)$, не равной тождественно f, в M найдется хотя бы один набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $g(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma})$ [4].

Задача тестирования бесповторных булевых функций рассматривается в следующей постановке. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных. Требуется построить проверяющий тест для функции f на множестве всех бесповторных булевых функций, у которых среди переменных $x_1,\ldots,x_n$ допускаются фиктивные. Такой проверяющий тест называется тестом относительно бесповторной альтернативы. Данное уточнение задачи тестирования связано с тем, что для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ с фиктивными переменными проверяющий тест может содержать все наборы [1].

Пусть M — некоторый проверяющий тест относительно бесповторной альтернативы для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, существенно зависящей от всех своих переменных. Под сложностью проверяющего теста M для функции f понимается количество наборов в тесте.

Функция Шеннона $T(n)$ для класса бесповторных функций вводится обычным образом:

$$T(n) = \max_{f\in RF^n} \min_{M\in Test(f)} |M|\,,$$

где RF^n — множество всех бесповторных булевых функций размерности n, существенно зависящих от всех своих переменных, $Test(f)$ — множество всех тестов относительно бесповторной альтернативы для функции f.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных, и для некоторого набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)$ остаточная функция

$$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},x_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{j-1},x_j,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)$$

является существенной. Тогда множество наборов

$$\begin{array}{l}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{j-1},0,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)\\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{j-1},1,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)\\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{j-1},0,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)\\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{j-1},1,\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_n)\end{array}$$

называется квадратом существенности переменных x_i и x_j для функции f и обозначается $S(x_i,x_j)$. Множеством квадратов существенности функции f называется произвольное множество наборов, которое содержит квадрат существенности для любой пары переменных функции f. Это множество обладает следующим важным для построения проверяющих тестов свойством, сформулированном А.А. Вороненко в следующей теореме.

Теорема 2 ([1]). *Множество квадратов существенности произвольной бесповторной булевой функции является проверяющим тестом относительно бесповторной альтернативы.*

Очевидно, что в базисе $\{\neg, \vee, \&, \oplus\}$ любая булева функция может быть представлена в виде формулы, в которой использованы только тесные отрицания. Такое формульное представление бесповторной булевой функции удобно рассматривать в виде корневого бинарного дерева, вершины которого помечены символами бинарных операций, а листья — символами переменных или их отрицаний. У каждой вершины, не являющейся листом, имеется две нижних вершины: левая и правая. Ребра, соединяющие эту вершину с левой и правой вершинами будут называться левым и правым ребрами соответственно. У каждой вершины, не являющейся корнем, имеется единственная верхняя вершина.

Поддеревом T' с корнем v бинарного дерева T будет называться часть дерева T, содержащая все листья T, путь из которых до корня T проходит через вершину v.

Будем говорить, что в бинарном дереве некоторый лист является правым, если путь от корня до этого листа проходит только по правым ребрам вершин дерева.

Остальные определения будут введены в тексте по мере необходимости. Дальнейшее изложение будет проходить по следующему плану:

а) построение теста относительно бесповторной альтернативы;

б) нахождение сложности построенного теста.

Согласно результатам из [1], тест относительно бесповторной альтернативы может представлять из себя множество квадратов существенности. Однако, в общем случае квадрат существенности не является единственным. Наша дальнейшая задача — построить квадраты существенности регулярным способом [5]. Квадраты существенности будут строиться по бинарному дереву. Для регулярности их построения необходимо сделать разметку ребер дерева, представляющего бесповторную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Разметка ребер осуществляется для каждой пары переменных x_i, x_j. Каждое ребро помечается символом из множества $\{-1, 0, 1, 2\}$.

В начале алгоритма разметки дерева для каждой из двух выбранных переменных от соответствующего ей листа до корня дерева строится путь, все ребра которого помечаются символом 2; все остальные ребра дерева помечаются символом -1.

Для каждой вершины будем рассматривать упорядоченную тройку $(L; R; U)$, где L — пометка левого ребра, R — пометка правого ребра и U — верхнего. Считается, что корневая вершина бинарного дерева функции всегда имеет верхнее ребро с пометкой -1. На каждом шаге алгоритма выполняется один из пяти пунктов, причем пункт с большим номером рассматривается только при условии невыполнения пункта с меньшим номером. Первой текущей вершиной алгоритма является вершина, лежащая над листом, соответствующим одной из двух выбранных переменных.

Рассмотрим i-й шаг разметки дерева. Пусть текущей является вершина w с символом $\circ$ и ей соответствует тройка (L_w, R_w, U_w). Для вершины w левой вершиной является w_1, правой — w_2 и верхней — w'.

1. Если $L_w = -1$, то значение L_w изменяется в соответствии с таблицей 1. Если w_1 является листом, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма остается вершина w. Если w_1 не является листом, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w_1.
2. Если $R_w = -1$, то значение R_w изменяется в соответствии с таблицей 2. Если w_2 является листом, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w'. Если w_2 не является листом, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w_2.
3. Если $L_w = 2$, $R_w = 2$ и $U_w = -1$, то производится анализ пометок $(L_{w_1}, R_{w_1}, U_{w_1})$ и $(L_{w_2}, R_{w_2}, U_{w_2})$ у вершин w_1 и w_2, соответственно.
   a) Если $L_{w_1} = -1$ или $R_{w_1} = -1$, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w_1.
   b) Если $L_{w_2} = -1$ или $R_{w_2} = -1$, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w_2.
4. Если $L_w = 2$ или $R_w = 2$, то производится анализ пометок $(L_{w_1}, R_{w_1}, U_{w_1})$ и $(L_{w_2}, R_{w_2}, U_{w_2})$ у вершин w_1 и w_2, соответственно.
   a) Если $L_{w_1} = -1$ или $R_{w_1} = -1$, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w_1.
   b) Если $L_{w_2} = -1$ или $R_{w_2} = -1$, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w_2.
   c) Если $L_{w_1} \neq -1$, $R_{w_1} \neq -1$, $L_{w_2} \neq -1$ и $R_{w_2} \neq -1$, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w'.
5. Если $L_w \neq -1$ и $R_w \neq -1$, то текущей вершиной для следующего шага алгоритма становится вершина w'.

Алгоритм заканчивает свою работу, когда ребра, инцидентные $n-2$ листьям дерева, будут помечены значениями из множества $\{0,1\}$, т.е. когда получен набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n$.

Несколько замечаний по алгоритму разметки дерева:

– в таблицах 1 и 2 символы $\{\vee, \&, \oplus\}$ обозначают символы соответствующих бинарных операций. Это сокращение корректно, поскольку в при реализации этих случаев пометки ребер (операнды) принадлежат множеству $\{0,1\}$;

– пометка $(2, 2, -1)$ соответствует только корневой вершине;
– ребра, соответствующие вершинам с символами $\vee$ и $\oplus$, помечаются одинаковым образом.

Таблица 1.

Правила изменения пометки левого ребра

<table>
<tr><th colspan="3">Пометка</th><th colspan="3">Символ</th></tr>
<tr><th>L</th><th>R</th><th>U</th><th>$\oplus$</th><th>$\vee$</th><th>&</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td><td rowspan="2">$L = 0$</td><td rowspan="2">$L = 0$</td><td rowspan="2">$L = 1$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>2</td><td>-1</td><td rowspan="2">$L = 0$</td><td rowspan="2">$L = 0$</td><td rowspan="2">$L = 1$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

Таблица 2.

Правила изменения пометки правого ребра

<table>
<tr><th colspan="3">Пометка</th><th colspan="3">Символ</th></tr>
<tr><th>L</th><th>R</th><th>U</th><th>$\oplus$</th><th>$\vee$</th><th>&</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td rowspan="4">$R = L \oplus U$</td><td rowspan="4">$R = L \vee U$</td><td rowspan="4">$R = L \,\&\, U$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td><td>-1</td><td rowspan="4">$R = 0$</td><td rowspan="4">$R = 0$</td><td rowspan="4">$R = 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-1</td><td>2</td></tr>
</table>

Для пары переменных x_i, x_j в конце работы алгоритма внутренние вершины дерева могут иметь следующие пометки (рис. 1).

Разметка дерева осуществляется таким образом, что после завершения работы алгоритма разметки остаточная функция

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$$

является существенной, что позволяет построить квадрат существенности

$$\begin{gathered}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)\\(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, 1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)\\(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)\\(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, 1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n).\end{gathered}$$

Полученные наборы добавляются в тест функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Этот алгоритм повторяется для каждой пары переменных f, и таким образом строится проверяющий тест относительно бесповторной альтернативы.

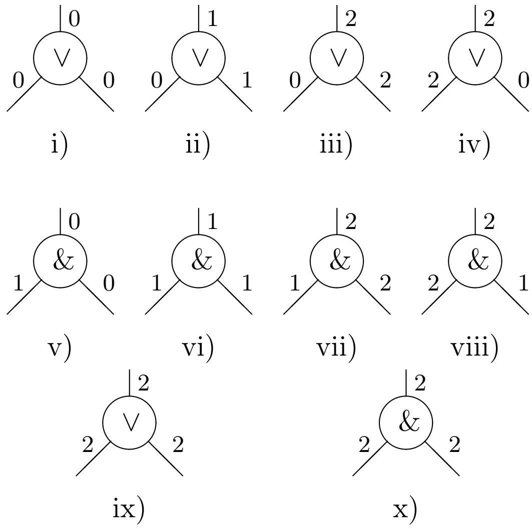

Рис. 1. Типы пометок вершин бинарного дерева

Пример построения проверяющего теста относительно бесповторной альтернативы для функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \oplus ((x_2 \vee x_3) \& x_4).$$

На рисунке 2 приведена разметка бинарного дерева для переменных x_1, x_3.

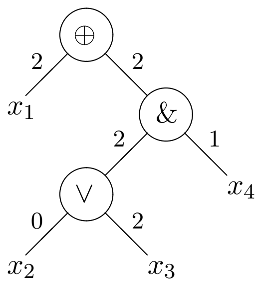

Рис. 2. Разметка бинарного дерева для переменных x_1, x_3

Квадрат существенности для этих переменных имеет вид

$$S(x_1, x_3) = \begin{array}{l} (0,0,0,1) \\ (0,0,1,1) \\ (1,0,0,1) \\ (1,0,1,1). \end{array}$$

Проверяющий тест V_f для функции f равен объединению всех квадратов существенности:

$$V_f = \{(0001), (0101), (1001), (1101), (0011),\\ (1011), (0010), (1010), (0111), (0000), (0100)\}.$$

Будем говорить, что некоторому листу бинарного дерева x_i соответствует пометка α, если ребро, инцидентное этому листу, имеет пометку $\alpha \in \{0, 1\}$. Поддерево бинарного дерева будем называть полностью помеченным, если всем его ребрам и листьям соответствуют пометки из множества $\{0, 1\}$. Полностью помеченные поддереревья обладают следующим свойством.

Лемма 1. *Пусть некоторое поддерево T' бинарного дерева T является полностью помеченным и имеет корневую вершину w. Верхнее ребро корня w помечено константой α и листьям поддерева сопоставлен набор констант $\beta_1\beta_2\dots\beta_{s-1}\beta_s$.*

Тогда, если при некоторой другой пометке бинарного дерева T пометка верхнего ребра w изменится на $\overline{\alpha}$, то набор констант, соответствующий листьям T', примет вид $\beta_1\beta_2\dots\beta_{s-1}\overline{\beta}_s$.

Доказательство. Пусть поддерево T' состоит из одной вершины w — корня поддерева и двух листьев. В данном случае набор констант $\beta_1\beta_2$ для листьев совпадает с пометками левого и правого ребер вершины w. Пусть верхнее ребро корня помечено константой α. Так как T' является полностью помеченным, то w может иметь пометки следующих типов i), ii), v) или vi) (рисунок 1). В этом случае $\alpha = \beta_2$. Следовательно, при смене значения α изменится и значение константы правого листа поддерева.

Пусть у поддерева T' корневой вершиной является вершина w. Вершины w_1 и w_2 являются левой и правой вершинами для w. Вершина w_1 является корнем для поддерева T_1, и w_2 — корнем поддерева T_2. Пусть вершине w соответствует тройка $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha)$. В соответствии с индуктивным предположением для поддеревьев T_1 и T_2 выполняется утверждение леммы и их листьям сопоставлены наборы констант $\beta_1 \dots \beta_s$ и $\gamma_1 \dots \gamma_k$ соответственно.

Поскольку все внутренние вершины T' имеют пометки типов i), ii), v) или vi), то для w выполняется $\alpha = \alpha_2$. Это означает, что при смене значения α изменится и значение α_2. Таким образом, по предположению индукции следует, что листьям поддерева T' будет сопоставлен набор констант $\beta_1 \dots \beta_s\gamma_1 \dots \overline{\gamma}_k$.

Лемма доказана. □

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — бесповторная булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных. При $n > 2$ не ограничивая общности можно полагать, что любая бесповторная булева функция представима в виде

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_m) \circ h(x_{m+1},\ldots,x_n),$$

для некоторых m и $k = n-m$ и $\circ \in \{\vee, \&, \oplus\}$. Функция g бесповторна и существенно зависит от m переменных, функция h также бесповторна и существенно зависит от k переменных.

Дальнейшие рассуждения будут направлены на доказательство следующего неравенства:

$$T(n) \leq T(m) + T(k) - 1 + mk.$$

Воспользуемся описанным алгоритмом получения квадратов существенности и рассмотрим строение проверяющего теста V_f для функции f, полученного с помощью этого алгоритма. Поскольку переменные функции f разделены на два непересекающихся множества, то выделяются три группы пар переменных, по которым строятся квадраты существенности:

1. Обе выбранные переменные принадлежат множеству переменных функции g.
2. Обе выбранные переменные принадлежат множеству переменных функции h.
3. Одна из переменных принадлежит множеству переменных функции g, а другая — множеству переменных функции h.

Пусть V_g и V_h проверяющие тесты, построенные на основе квадратов существенности для функций g и h соответственно. Для функции f через V_1 обозначено объединение квадратов существенности $S(x_i, x_j)$, где переменные x_i, x_j принадлежат множеству переменных функции g, V_2 — объединение квадратов существенности $S(x_i, x_j)$, где переменные x_i, x_j принадлежат множеству переменных функции h и V_3 — объединение квадратов существенности $S(x_i, x_j)$, где переменная x_i принадлежит множеству переменных функции g, а переменная x_j — множеству переменных функции h. Тогда проверяющий тест для функции f можно представить в виде следующего объединения:

$$V_f = V_1 \cup V_2 \cup V_3.$$

Лемма 2. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — бесповторная булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных, и $f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_m) \circ h(x_{m+1},\ldots,x_{m+k})$, где $m,k > 1$. Тогда множество V_1 состоит из наборов вида $(*,\ldots,*,\beta_1,\ldots,\beta_k)$, и множество V_2 — из наборов вида $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,*,\ldots,*)$, где $*$ — любой символ из множества $\{0,1\}$, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_k$ — некоторый набор констант.*

Доказательство. Рассмотрим вид наборов, входящих в множество V_1. Согласно алгоритму разметки, листья, соответствующие переменным из множества $\{x_{m+1}, \dots, x_{m+k}\}$, не изменяют своих пометок для любой пары переменных из множества $\{x_1, \dots, x_m\}$. Это означает, что им соответствует некоторый набор констант $\beta_1, \dots, \beta_k$. Тогда все наборы из V_1 имеют вид $(*, \dots, *, \beta_1, \dots, \beta_k)$. Аналогично, наборы из V_2 имеют вид $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, *, \dots, *)$.

Лемма доказана. □

Зафиксируем значения постоянных частей наборов $\beta_1, \dots, \beta_k$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Лемма 3. *Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — бесповторная булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных, и $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_m) \circ h(x_{m+1}, \dots, x_{m+k})$, где $m, k > 1$. Тогда для множеств V_1 и V_2 выполняется равенство:*

$$|V_1 \cup V_2| = |V_1| + |V_2| - 1.$$

Доказательство. Для доказательства леммы покажем, что набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k)$ является единственным набором, принадлежащим одновременно множествам V_1 и V_2. Иначе говоря, покажем, что всегда можно выбрать такие x_i и x_j, где $1 \leq i, j \leq m$, что $S(x_i, x_j)$ содержит набор $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k$.

Пусть имеется бинарное дерево T, представляющее функцию f и полностью помеченное поддерево T_1, корень которого является левой вершиной для корня T. Листьям рассматриваемого поддерева сопоставлены значения $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Мы хотим изменить разметку поддерева T_1 так, чтобы для некоторых двух его листьев x_i, x_j функция $g(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m)$ была существенной.

Изменение разметки осуществляется от корня по следующему правилу. Пусть (L, R, U) — пометка корневой вершины T_1. Тогда новая пометка будет иметь вид $(L, 2, 2)$. Для каждой внутренней вершины, имеющей пометку $(L, R, 2)$, измененная пометка будет иметь вид $(L, 2, 2)$.

Согласно этому правилу изменение разметки осуществляется от корня к вершине таким образом, чтобы пометкой 2 были помечены только правые ребра поддерева T_1. Изменение производится до тех пор, пока не будет найдена некоторая вершина w, правой вершиной которой является лист. В этом случае пометка вершины w становится $(2, 2, 2)$.

Если вершина w такова, что для нее левой вершиной также является лист, то изменение разметки закончено. Если для нее левой вершиной является внутренняя вершина v, то изменение разметки продолжается в поддереве с корневой вершиной v по указанному выше правилу: пометка $(L, R, 2)$ заменяется на $(L, 2, 2)$. В этом случае изменение разметки заканчивается на вершине, правой вершиной которой является лист.

Легко видеть, что изменение разметки поддерева T_1 произведено таким образом, что только два его листа x_i, x_j имеют пометку 2, а пометка остальных листьев не изменилась. В самом деле, в полностью помеченном поддереве T_1 встречаются только вершины с пометками типа i), ii), v), vi) (рисунок 1.). Согласно правилу изменения разметки дерева новыми пометками вершин становятся пометки типа iii) или vii), и единственная вершина имеет пометку типа ix) или x).

Обратно, пусть необходимо построить квадрат существенности для выбранных переменных x_i, x_j. Согласно алгоритма разметки дерева для функции g оставшиеся $m-2$ листа будут помечены константами

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m.$$

Функция $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m)$ является существенной. Отсюда следует, что V_g содержит набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, а, значит, V_1 содержит набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_k)$. Аналогичные рассуждения показывают, что и V_2 содержит набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_k)$. Таким образом, для первых двух групп квадратов существенности выполняется равенство

$$|V_1 \cup V_2| = |V_1| + |V_2| - 1.$$

Лемма доказана. □

Для третьей группы квадратов существенности достаточно показать, что V_f содержит не более mk наборов этой группы, не входящих в первые две группы. Пусть $S(x_i, x_j)$ — квадрат существенности из V_3. Наборы из этого квадрата существенности имеют следующий вид:

$$\begin{array}{l}
1: (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \alpha_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_{j-1}, \beta_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_n);\\
2: (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \alpha_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_{j-1}, \overline{\beta}_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_n);\\
3: (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \overline{\alpha}_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_{j-1}, \beta_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_n);\\
4: (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \overline{\alpha}_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_{j-1}, \overline{\beta}_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_n).
\end{array}$$

Через V_4 обозначим множество наборов таких, что для любого квадрата существенности $S(x_i, x_j)$ из третьей группы множество V_4 содержит набор типа 4.

Лемма 4. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бесповторная булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных, и $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_m) \circ h(x_{m+1}, \ldots, x_{m+k})$, где $m, k > 1$. Тогда $V_4 = V_3 \backslash (V_1 \cup V_2)$ и $|V_4| \le mk$.*

Доказательство. Рассмотрим $\tilde{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_n$ — один из четырех наборов, составляющих квадрат существенности переменных x_i и x_j, где $1 \le i \le m < j \le n$. Дальнейшие рассуждения разбиваются на 4 пункта в зависимости от вида набора $\tilde{\tau}$.

Пункт I. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_m = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Покажем, что в этом случае $\tilde{\tau} \in V_2$. Для этого достаточно показать, что существует переменная x_l, $m < l \le n$, такая что $\tilde{\tau} \in S(x_j, x_l)$.

Пусть имеется бинарное дерево T, представляющее функцию f и поддерево T_2, корень которого является правой вершиной корня T. Лист, соответствующий переменной x_j принадлежит T_2, и в T_2 помечен путь от этого листа до корня дерева. Изменим разметку поддерева T_2. Пусть w — вершина, являющаяся верхней для листа x_j. Пометка w может быть $(L, 2, 2)$ или $(2, R, 2)$. Новая пометка w станет $(2, 2, 2)$.

Если вершина w такова, что для нее левой (правой) вершиной также является лист x_l, то изменение разметки закончено. Если для нее левой (правой) вершиной является внутренняя вершина v, то изменение разметки продолжается в поддереве с корневой вершиной v по следующему правилу: пометка $(L, R, 2)$ заменяется на $(L, 2, 2)$. В этом случае изменение разметки заканчивается на вершине, правой вершиной которой является лист.

Изменение разметки поддерева T_2 произведено таким образом, что только два его листа x_j, x_l имеют пометку 2, а пометка остальных $k-2$ листьев не изменилась. Это означает, что квадрат существенности $S(x_j, x_l)$ содержит набор $\tilde{\tau} = \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_n$. Следовательно, $\tilde{\tau} \in V_2$.

Пункт II. Пусть $\tau_{m+1}, \ldots, \tau_n = \beta_1, \ldots, \beta_k$. Тогда рассуждениями аналогичными пункту I нетрудно показать, что наборы вида $\tau_1, \ldots, \tau_m, \beta_1, \ldots, \beta_k$ из квадрата существенности $S(x_i, x_j)$ принадлежат V_1.

Пункт III. Пусть $\tilde{\tau}$ — некоторый набор типа 2 из квадрата существенности $S(x_i, x_j)$. Покажем, что такой набор содержится либо в V_2, либо в V_4. Первые m компонент $\tau_1, \ldots, \tau_m$ набора $\tilde{\tau}$ могут либо совпадать с $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, либо отличаться хотя бы в одной компоненте.

В первом случае в соответствии с пунктом I набор $\tilde{\tau}$ принадлежит V_2. Во втором случае найдется номер l такой, что $\tau_l = \overline{\alpha}_l$. Для этого случая покажем, что набор $\tilde{\tau}$ принадлежит V_4.

Будем говорить, что два листа x_i и x_j являются удаленно-смежными по вершине v, если выполняется 2 условия:

1) вершина v является первой общей вершиной, встречающейся на путях от листьев x_i и x_j до корня;
2) лист x_j является правым в поддереве с корнем в вершине v;

Рассмотрим возможные варианты пометок вершины w, являющейся верхней для листа $x_i, i \leq m$, и возможные варианты пометки α_i листа x_i. Пометки представлены в таблицах 3 и 4, где первый столбец содержит положение листа относительно верхней вершины w и значение α_i. Второй столбец содержит пометку верхнего ребра для вершины w, а третий — возможные варианты принадлежности множествам V_2 или V_4.

Покажем справедливость приведенных таблиц. Рассмотрим вариант, при котором смежная вершина w помечена символом $\vee(\oplus)$ (таблица 3). Пусть T_1 — полностью размеченное поддерево дерева T функции f с корнем, являющимся левой вершиной для корня T. Листья поддерева помечены константами из набора $\tilde{\alpha}$. Мы хотим изменить разметку поддерева T_1 так так, чтобы для некоторого листа x_i функция $g(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, x_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m)$ была существенной.

Таблица 3.

Возможные варианты принадлежности множествам V_2 или V_4 наборов для вершины $\vee(\oplus)$

Положение	Верх	Варианты
$L, 0$	0	1) $\tau_1, \ldots, \tau_m = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине $\vee(\oplus)$ с пометкой (0,1,1).
$L, 0$	1	$\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине w.
$R, 0$	0	1) $\tau_1, \ldots, \tau_m = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине $\vee(\oplus)$ с пометкой (0,1,1).
$R, 1$	1	$\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине & с пометкой (1,0,0).

Таблица 4.

Возможные варианты принадлежности множествам V_2 или V_4 наборов для вершины &

Положение	Верх	Описание
$L, 1$	0	$\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине w.
$L, 1$	1	1) $\tau_1, \ldots, \tau_m = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине & с пометкой (1,0,0).
$R, 0$	0	$\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине $\vee(\oplus)$ с пометкой (0,1,1).
$R, 1$	1	1) $\tau_1, \ldots, \tau_m = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j), \tau_l = \overline{\alpha}_l$, где x_i и x_l удаленно-смежные по вершине & с пометкой (1,0,0).

Согласно таблицы 3 пометка вершины w разбивается на следующие варианты:

Вариант 1. Выбранный лист располагается слева, имеет пометку 0 и вершина w помечена (0,0,0). Перед началом изменения разметки дерева рассмотрим возможные вершины, являющиеся верхними для вершины w (рис. 3).

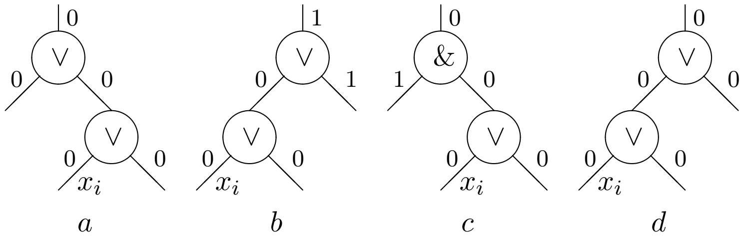

Рис. 3. Возможные пометки верхних вершин для варианта 1

Вершина w располагается либо на правом ребре вершины $\vee(\oplus)$ (случай a), либо на левом ребре вершины $\vee(\oplus)$ (случаи b, d), либо на правом ребре вершины & (случай c).

Следует отметить, что в случаях a, c и d верхние вершины имеют верхнее ребро с пометкой 0 и, следовательно, для каждой из них возможны все четыре варианта пометок верхних вершин.

Изменение разметки осуществляется от листа x_i до корня следующим образом. Пометка вершины w изменится на $(2, 0, 2)$. Далее для каждой внутренней вершины, у которой $L = 2$ или $R = 2$, изменение пометки вершин производится согласно таблице 5.

Таблица 5.

Правила изменения разметки поддерева для варианта 1

	Символ вершины	Старая пометка	Новая пометка
a	$\vee$	$(0, 2, 0)$	$(0, 2, 2)$
b	$\vee$	$(2, 1, 1)$	$(2, 0, 2)$
c	&	$(1, 2, 0)$	$(1, 2, 2)$
d	$\vee$	$(2, 0, 0)$	$(2, 0, 2)$

Изменение разметки производится до тех пор, пока не будет достигнут корень поддерева или пока не реализуется случай b таблицы 5.

Если было произведено изменение пометки корня поддерева, то в процессе построения новой разметки реализовались варианты a, c или d. Таким образом, только один лист в поддереве T_1 имеет пометку 2, а пометка остальных листьев не изменилась. Тогда $\tau_1, \ldots, \tau_m = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и, следовательно, $\tilde{\tau} \in V_2$.

Если в процессе построения новой разметки найдена вершина v с символом $\vee(\oplus)$ и пометкой $(2, 1, 1)$ (случай b), то ее пометка изменится на $(2, 0, 2)$ и, согласно лемме 1 о пометках листьев поддерева, изменится только пометка правого листа x_l в поддереве с корнем v. Пометка листа x_l станет $\overline{\alpha}_l$. Зафиксируем вершину v. Далее изменение разметки поддерева T_1 от вершины v до корня происходит следующим образом:

1. Если внутренняя вершина имеет пометку $(L, 2, U)$, то она изменится на $(L, 2, 2)$.

2. Если $(2, R, U)$ — пометка внутренней вершины, то ее новая пометка станет $(2, R', 2)$, где R' выбирается согласно типам пометки вершин (рисунок 1).

Таким образом,

$$\tau_1, \ldots, \tau_m = \tau_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \overline{\alpha}_l, \ldots, \tau_m.$$

Теперь осталось показать, что набор $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j)$. В самом деле, пусть T_1 — полностью размеченное поддерево, корень которого является левой вершиной для корня дерева функции f. Изменим его разметку от листа x_l до корня следующим образом. Пометка вершины, являющейся верхней для листа x_l, изменится на $(L, 2, 2)$. Для каждой внутренней вершины, имеющей пометку $(L, 2, U)$, измененная пометка будет иметь вид $(L, 2, 2)$. Такая разметка осуществляется до тех пор, пока не будет произведена пометка вершины v. Далее изменение разметки от вершины v до корня поддерева происходит по тем же правилам, что и изменение разметки поддерева для листа x_i. В итоге получили, что $\tau_1, \ldots, \tau_m = \tau_1, \ldots, \overline{\alpha}_l, \ldots, \tau_m$, где $\tau_i = \alpha_i$. Согласно приведенным правилам изменения разметки поддерева, новыми пометками вершин становятся пометки типов i)–viii) (рисунок 1). Тогда функция $f(\tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, x_l, \tau_{l+1}, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_{j-1}, x_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_n)$ является существенной, и, следовательно, $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j)$. Одновременно, $\tilde{\tau} \in V_4$, так как $\tau_l = \overline{\alpha}_l$ и $\tau_j = \overline{\beta}_j$.

Вариант 2. Выбранный лист располагается слева, имеет пометку 0 и вершина w помечена (0,1,1) (рис. 4). Перед началом изменения разметки дерева рассмотрим возможные пометки вершины, являющейся верхней для вершины w.

Изменим разметку поддерева T_1. Пометим w новой пометкой $(2, 0, 2)$. Вариант 2 является частным случаем варианта 1, так как при построении новой разметки поддерева T_1 в вершине w реализуется вариант b таблицы 5. Следовательно, к нему применяются проведенные ранее рассуждения для варианта 1. В таком случае получили, что $\tau_1, \ldots, \tau_m = \tau_1, \ldots, \overline{\alpha}_l, \ldots, \tau_m$, где $\tau_i = \alpha_i$, и $\tilde{\tau} \in V_4$

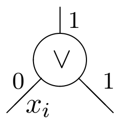

Рис. 4. Пометка вершины w для варианта 2

Вариант 3. Выбранный лист располагается справа, имеет пометку 0 и вершина w помечена (0,0,0). Рассмотрим возможные пометки вершины, являющейся верхней для вершины w (рис. 5).

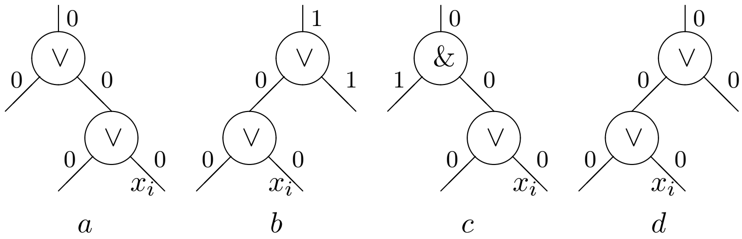

Рис. 5. Возможные пометки верхних вершин для варианта 3

Вершина w располагается либо на правом ребре вершины $\vee(\oplus)$ (случай a), либо на левом ребре вершины $\vee(\oplus)$ (случаи b, d), либо на правом ребре вершины & (случай c). Эти случаи почти полностью аналогичны случаям расположения вершин варианта 1 и все рассуждения проводятся аналогичным образом.

Вариант 4. Выбранный лист располагается справа, имеет пометку 1 и вершина w помечена (0,1,1). Перед началом изменения разметки дерева необходимо рассмотреть возможные пометки вершины, являющейся верхней для вершины w (рис. 6).

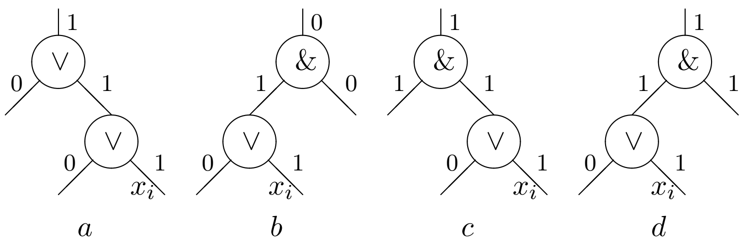

Рис. 6. Возможные пометки верхних вершин для варианта 4

Вершина w располагается либо на правом ребре вершины $\vee(\oplus)$ (случай a), либо на левом ребре вершины & (случаи b, d), либо на правом ребре вершины & (случай c).

В случаях a, c и d верхние вершины имеют верхнее ребро с пометкой 1 и, следовательно, для каждой из них возможны все четыре варианта пометок верхних вершин.

Изменение разметки осуществляется от листа x_i до корня следующим образом. Пометка вершины w изменится на $(0, 2, 2)$. Далее для каждой внутренней вершины, у которой $L = 2$ или $R = 2$, изменение пометки вершин производится согласно таблице 6.

Изменение разметки производится до тех пор, пока не реализуется случай b таблицы 6.

Когда в процессе построения новой разметки поддерева найдется вершина v с символом & и пометкой $(2, 0, 0)$ (случай b), то ее пометка изменится на $(2, 1, 2)$ и, согласно лемме 1, изменится пометка правого листа x_l в поддереве с корнем v. Пометка листа x_l станет $\overline{\alpha}_l$.

Таблица 6.

Правила изменения разметки поддерева для варианта 4

	Символ вершины	Старая пометка	Новая пометка
a	$\vee$	$(0, 2, 1)$	$(0, 2, 2)$
b	&	$(2, 0, 0)$	$(2, 1, 2)$
c	&	$(1, 2, 1)$	$(1, 2, 2)$
d	&	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 2)$

Зафиксируем вершину v. Далее изменение разметки поддерева T_1 от вершины v до корня происходит следующим образом:

1. Если внутренняя вершина имеет пометку $(L, 2, U)$, то она изменится на $(L, 2, 2)$.
2. Если $(2, R, U)$ — пометка внутренней вершины, то ее новая пометка станет $(2, R', 2)$, где R' выбирается согласно типам пометки вершин (рисунок 1).

Таким образом,

$$\tau_1, \ldots, \tau_m = \tau_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \overline{\alpha}_l, \ldots, \tau_m.$$

Теперь осталось показать, что набор $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j)$. Пусть T_1 — полностью помеченное поддерево, корень которого является левой вершиной для корня дерева функции f. Изменим его разметку от листа x_l до корня следующим образом. Пометка вершины, являющейся верхней для листа x_l, изменится на $(L, 2, 2)$. Для каждой внутренней вершины, имеющей пометку $(L, 2, U)$, измененная пометка будет иметь вид $(L, 2, 2)$. Такое правило разметки действует до тех пор, пока не будет изменена пометка вершины v. Далее изменение разметки от вершины v до корня поддерева происходит по тем же правилам, что и изменение разметки поддерева для листа x_i. В итоге получили, что $\tau_1, \ldots, \tau_m = \tau_1, \ldots, \overline{\alpha}_l, \ldots, \tau_m$, где $\tau_i = \alpha_i$. Согласно приведенным правилам изменения разметки поддерева, новыми пометками вершин становятся пометки типов i)–viii) (рисунок 1). Тогда функция $f(\tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, x_l, \tau_{l+1}, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_{j-1}, x_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_n)$ является существенной, и, следовательно, $\tilde{\tau} \in S(x_l, x_j)$. В то же самое время $\tilde{\tau} \in V_4$, так как $\tau_l = \overline{\alpha}_l$ и $\tau_j = \overline{\beta}_j$.

В итоге мы получили, что наборы типа 2 из квадратов существенности третьей группы пар переменных могут принадлежать либо множеству V_2, либо V_4.

Пункт IV. Пусть $\tilde{\tau}$ — некоторый набор типа 3, полученный из квадрата существенности $S(x_i, x_j)$. Для $\tilde{\tau}$ возможны следующие варианты:

1. $\tau_{m+1}, \ldots, \tau_n = \beta_1, \ldots, \beta_k$. Тогда в соответствии с пунктом II набор $\tilde{\tau}$ принадлежит множеству V_1.

2. $\tau_{m+1}, \ldots, \tau_n \neq \beta_1, \ldots, \beta_k$. В этом случае существует l, что $\tau_l = \overline{\beta}_l$, и рассуждения аналогичные пункту III показывают, что $\tilde{\tau}$ принадлежит множеству V_4.

Пункт V. Для полноты картины осталось рассмотреть набор типа 1. Пусть некоторый набор $\tilde{\tau}$ имеет вид

$$\tilde{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \alpha_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots, \tau_{j-1}, \beta_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_n.$$

Тогда в зависимости от строения дерева функции f имеют место следующие варианты строения набора:

1. $\tau_1, \ldots, \tau_m = \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. В этом случае согласно пункту I набор $\tilde{\tau}$ содержится в множестве V_2.
2. $\tau_{m+1}, \ldots, \tau_n = \beta_1, \ldots, \beta_k$. В этом случае согласно пункту II набор $\tilde{\tau}$ принадлежит множеству V_1.
3. $\tau_1, \ldots, \tau_m \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\tau_{m+1}, \ldots, \tau_n \neq \beta_1, \ldots, \beta_k$. Тогда существуют такие t и l, $1 \leq t \leq m < l \leq n$, что $\tau_t = \overline{\alpha}_t$ и $\tau_l = \overline{\beta}_l$. В этом случае из приведенных выше рассуждений пункта III следует, что $\tilde{\tau}$ содержится в V_4.

Это завершает доказательство равенства

$$V_4 = V_3 \backslash (V_1 \cup V_2).$$

Очевидно, что согласно правилу построения множества V_4 количество наборов в нем не превосходит mk.

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бесповторная булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных, и $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_m) \circ h(x_{m+1}, \ldots, x_{m+k})$, где $m, k > 1$. Тогда*

$$|V_f| = |V_1| + |V_2| - 1 + |V_4| \leq |V_1| + |V_2| - 1 + mk.$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения непосредственно следует из строения проверяющего теста V_f и лемм 3 и 4. □

Отдельного рассмотрения заслуживает случай $m = 1$. Тогда

$$f(x_1 \ldots x_n) = g(x_1) \circ h(x_2 \ldots x_n).$$

В этом случае пары переменных при переборе разбиваются на 2 группы:

1. Обе выбранные переменные принадлежат множеству переменных функции h.
2. Одна переменная x_1 фиксирована, а другая принадлежит множеству переменных функции h.

Так как в первой группе перебираются все пары переменных из множества переменных функции h, то на основе квадратов существенности получается проверяющий тест V_h для этой функции.

Пусть V_1 — множество квадратов существенности $S(x_i, x_j)$, где переменные x_i, x_j принадлежат множеству переменных функции h, V_2 — множество квадратов существенности $S(x_1, x_j)$, и переменная x_j принадлежит множеству переменных функции h. Тогда

$$V_f = V_1 \cup V_2.$$

Согласно лемме 2, все наборы из V_1 имеют вид $\alpha, *, \ldots, *$, где α — пометка листа x_1, который смежен по левому ребру с корнем бинарного дерева функции f.

Не умаляя общности рассуждений можно считать, что лист, соответствующий переменной x_n является правым в поддереве, корень которого смежен корню бинарного дерева функции f по правому ребру. Построим квадрат существенности $S(x_1, x_n)$. Зафиксируем два набора

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= (\overline{\alpha}, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0) \\ \tilde{\sigma}_2 &= (\overline{\alpha}, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 1). \end{aligned}$$

Очевидно, что наборы $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ не принадлежат множеству V_1. Зафиксируем значения $\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. Положим $V_3 = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$. Все дальнейшие рассуждения проводятся исходя из предположения, что $j \neq n$.

Пусть $S(x_1, x_j)$ — квадрат существенности из второй группы пар переменных:

$$\begin{aligned} 1:\ &(\alpha, \tau_2, \ldots, \tau_{j-1}, \beta_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n); \\ 2:\ &(\alpha, \tau_2, \ldots, \tau_{j-1}, \overline{\beta}_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n); \\ 3:\ &(\overline{\alpha}, \tau_2, \ldots, \tau_{j-1}, \beta_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n); \\ 4:\ &(\overline{\alpha}, \tau_2, \ldots, \tau_{j-1}, \overline{\beta}_j, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_n). \end{aligned}$$

Через V_4 обозначим множество наборов таких, что для любого квадрата существенности $S(x_1, x_j)$ из второй группы множество V_4 содержит набор типа 4.

Лемма 6. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бесповторная булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных, и $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1) \circ h(x_{m+1}, \ldots, x_{m+k})$, где $k > 1$. Тогда*

$$V_3 \cup V_4 = V_2 \backslash V_1$$

и мощность множества V_4 не превосходит $n - 2$.

Доказательство. Согласно рассмотренному ранее пункту I леммы 4 наборы типа 1 и 2 принадлежат множеству V_1.

Пусть $\tilde{\tau}$ — некоторый набор типа 3, полученный из квадрата существенности $S(x_1, x_j)$. Тогда для компонентов набора $\tilde{\tau}$ имеют место следующие случаи:

1) $\tau_2, \ldots, \tau_{n-1} = \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$; 2) $\tau_2, \ldots, \tau_{n-1} \neq \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

В первом случае набор $\tilde{\tau}$ принадлежит V_3, поскольку равен либо набору $\tilde{\sigma}_1$, либо набору $\tilde{\sigma}_2$. Во втором случае найдется такой номер l, что $\tau_l = \overline{\beta}_l$. Для этого случая мы покажем, что $\tilde{\tau}$ принадлежит V_4.

Рассмотрим возможные варианты пометок вершины w, являющейся верхней для листа $x_j, 1 < j < n$, и возможные варианты пометки β_j листа x_j. Пометки представлены в таблицах 7 и 8, где первый столбец содержит положение листа относительно верхней вершины w и значение β_j. Второй столбец содержит пометку верхнего ребра для вершины w, а третий — возможные варианты принадлежности множеству V_3 или V_4.

Таблица 7.

Возможные варианты принадлежности множествам V_3 или V_4 наборов для вершины $\vee(\oplus)$

Положение	Верх	Описание
$L, 0$	0	1) $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_1$ или $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_2$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежные по вершине $\vee(\oplus)$ с пометкой (0,1,1).
$L, 0$	1	$\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежны по вершине w.
$R, 0$	0	1) $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_1$ или $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_2$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежные по вершине $\vee(\oplus)$ с пометкой (0,1,1).
R,1	1	$\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежные по вершине & с пометкой (1,0,0).

Справедливость таблиц доказывается таким же образом, что и в случае разделения переменных на два множества (лемма 4) — рассматриваются различные пометки и символы вершины, являющейся верхней для вершины w и в соответствии с этими пометками выбираются правила изменения разметки бинарного дерева функции f. Следовательно, наборы типа 3 из квадратов существенности второй группы пар переменных могут принадлежать либо множеству V_3, либо V_4.

В результате рассмотрения принадлежности различным множествам всех типов наборов получаем равенство

$$V_3 \cup V_4 = V_2 \backslash V_1.$$

Для каждого квадрата существенности второй группы пар переменных в множестве V_4 содержится не более одного набора и, следовательно, $|V_4| \leq n - 2$.

Таблица 8.

Возможные варианты принадлежности множествам V_3 или V_4 наборов для вершины &

Положение	Верх	Описание
$L, 1$	0	$\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежные по вершине w.
$L, 1$	1	1) $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_1$ или $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_2$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежные по вершине & с пометкой (1,0,0).
$R, 0$	0	$\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежные по вершине $\vee(\oplus)$ с пометкой (0,1,1).
$R, 1$	1	1) $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_1$ или $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}_2$; 2) $\tilde{\tau} \in S(x_1, x_l)$, $\tau_l = \overline{\beta}_l$, где x_j и x_l удаленно-смежные по вершине & с пометкой (1,0,0).

Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — бесповторная булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных и $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1) \circ h(x_{m+1}, \ldots, x_{m+k})$, где $k > 1$. Тогда*

$$|V_f| = |V_1| + |V_3| + |V_4| \leq |V_1| + 2 + (n - 2).$$

Доказательство. Доказательство леммы непосредственно следует из леммы 6. □

Теорема 3. *Функция Шеннона $T(n)$ для тестов относительно бесповторной альтернативы удовлетворяет равенству*

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Доказательство. Из вышеприведенных результатов работы [1] достаточно доказать, что

$$T(n) \leq \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Покажем, что формула верна при $n = 2$. Пусть $f(x_1, x_2) = x_1^{\sigma_1} \circ x_2^{\sigma_2}$, где $\circ \in \{\vee, \&, \oplus\}$, $x^0 = \overline{x}, x^1 = x$. Очевидно, что проверяющим тестом для этой функции будет тест, состоящий из всех четырех наборов $(00), (01), (10), (11)$. Таким образом, $T(2) \leq 4$.

При $n > 2$ не ограничивая общности можно полагать, что любая бесповторная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_m) \circ h(x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

для некоторых m и $k = n - m$, $\circ \in \{\vee, \&, \oplus\}$.

В силу индуктивного предположения

$$T(m) \leq \frac{m(m+1)}{2} + 1, \quad T(k) \leq \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

Рассмотрим количество наборов в проверяющем тесте V_f для функции f. Пусть $m > 1$ и $k > 1$. Тогда согласно лемме 5 количество наборов в тесте удовлетворяет неравенству:

$$|V_f| \leq |V_1| + |V_2| - 1 + mk.$$

Тогда для функции Шеннона получается следующее соотношение

$$T(n) \leq T(m) + T(k) - 1 + mk \leq$$

$$\leq \frac{m(m+1)}{2} + 1 + \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} + 1 - 1 + m(n-m) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

В случае, если $m = 1$, то в соответствии с леммой 7 справедливо неравенство:

$$|V_f| \leq |V_1| + 2 + (n-2).$$

В итоге для функции Шеннона получили соотношение

$$T(n) \leq T(n-1) + 2 + (n-2) \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Учитывая нижнюю оценку для $T(n)$ из [1] окончательно получаем

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Теорема доказана. □

Интересно отметить, что для элементарного базиса $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ показано, что тест относительно бесповторной альтернативы имеет линейную сложность [2].

Список литературы

1. Вороненко А. А. О проверяющих тестах для бесповторных функций / А. А. Вороненко // Математические вопросы кибернетики. — 2002. — Вып 11. — С. 163–176.
2. Вороненко А. А. О длине проверяющего теста для бесповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ / А. А. Вороненко // Дискретная математика. — 2005. — Том 17. Выпуск 2. — С. 139–143.

3. Избранные вопросы теории булевых функций: Монография / А. С. Балюк, С. Ф. Винокуров, А. И. Гайдуков и др.; Под ред. С. Ф. Винокурова, Н. А. Перязева. — М.: Физматлит, 2001. — 192 с.
4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем / Н. П. Редькин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 192 с.
5. Рябец Л. В. Тестирование бесповторных булевых функций / А. С. Балюк, Л. В. Рябец // Вестник Томского государственного университета. Приложение. — 2006. — Вып 17. — С. 10–14.

L. V. Ryabets

The complexity of RF-tests for repetition-free boolean functions

Abstract. This paper contains the result of investigations in issues of testing of repetition-free Boolean functions (RF-test, for short). The target of this paper is obtaining the exact value of Shannon function for RF-tests. Our main results are: the exact value of Shannon function for RF-teststhe and the algorithm to construct fast RF-test for any repetition-free Boolean function.

Keywords: digital systems, logic gates, repetition-free Boolean functions,integrated circuit test

Рябец Леонид Владимирович, кандидат физико-математических наук, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, ул. Н. Набережная, 6 тел.: (3952) 240435
(`l.riabets@gmail.com`)

Ryabets Leonid, East Siberian Academy of Education, 6, Nizhnyaya Naberezhnaya St., Irkutsk, 664011 Phone: (3952) 240435
(`l.riabets@gmail.com`)