Серия «Математика»
2009. Т. 2, № 2, С. 127—135

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК УДК 512.57

О семействах определимых (формульных) производных объектов на универсальных алгебрах

А. Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет

Аннотация. Приводится обзор результатов автора о совокупностях формульных (в различных смыслах) автоморфизмов, эндоморфизмов, конгруэнций, подалгебр произвольных универсальных алгебр.

Ключевые слова: Автоморфизм, эндоморфизм, конгруэнция, подалгебра, универсальная алгебра

Памяти Али Ивановича Кокорина

Производной структурой данной алгебры $\mathcal{A}$ называется универсальная алгебра $D(\mathcal{A})$, однозначно определяемая по $\mathcal{A}$ и несущая в себе ту либо иную информацию о строении алгебры $\mathcal{A}$. Как правило, в качестве $D(\mathcal{A})$ используются классические алгебры: группы, полугруппы, решетки и т.п., имеющие хорошо развитую теорию. В частности, в качестве производных структур как классических, так и универсальных алгебр $\mathcal{A}$ традиционно и всесторонне рассматривались группы автоморфизмов $Aut\mathcal{A}$, моноиды эндоморфизмов $End\mathcal{A}$, решетки подалгебр $Sub\mathcal{A}$, решетки конгруэнций $Con\mathcal{A}$, полугруппы внутренних изоморфизмов $Iso\mathcal{A}$ и другие. Элементы производных структур алгебры $\mathcal{A}$ будем называть *производными объектами* на $\mathcal{A}$.

Исследование производных структур и объектов алгебр $\mathcal{A}$ служит традиционным ключем к изучению строения и классификации алгебр $\mathcal{A}$. Подобным результатом, по отношению к классическим алгебрам, посвящен ряд известных монографий: для групп — М. Судзуки [1], Б.И. Плоткин [3], для полугрупп — Л.Н. Шеврин и А.Я. Овчинников [2]. Производным структурам универсальных алгебр посвящена монография автора [4].

При исследовании производных структур естественен интерес к элементам этих структур, которые могут быть определены средствами самих исходных алгебр, в частности могут быть определены на алгебре теми либо иными формулами, и к совокупностям подобных формульных производных объектов на алгебрах.

Подобные формульные автоморфизмы рассматривались, к примеру, в работе И. Гранта [6], IC — и I — автоморфизмы универсальных алгебр — в работе Б. Чаконя [16], формульные, в том или ином смысле, главные конгруэнции универсальных алгебр изучались в работах В. Блока, Д. Пигоци [5], Э. Фрида, Г. Грэтцера, Р. Квакенбуша [7], П. Колера, Д. Пигоци [8] и других. Примерами формульных проиводных объектов на классических алгебрах служат: внутренние автоморфизмы групп, конгруэнций Ершова-Тарского на булевых алгебрах, автоморфизмы вида $x \longrightarrow x^{p^k}$ на полях характеристики p и другие.

В настоящей работе приведен обзор результатов автора появященных совокупностям формульных (в различных смыслах) производных объектов на универсальных алгебрах: формульных автоморфизмов, эндоморфизмов, подалгебр, конгруэнций и представлен ряд открытых, естественных в этом контексте, вопросов.

Одним из первых, классических результатов по производным структурам универсальных алгебр были абстрактные описания решеток подалгебр, решеток конгруэнций, групп автоморфизмов, моноидов эндоморфизмов универсальных алгебр.

Напомним их:

ТЕОРЕМА Биркгофа-Фринка [9]. Для любой алгебраической решетки L существует универсальная алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $Sub\mathcal{A} \cong L$.

ТЕОРЕМА Гретцера-Шмидта [10]. Для любой алгебраической решетки L существует универсальная алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $Con\mathcal{A} \cong L$.

ТЕОРЕМА Биркгофа [11]. Для любой группы G существует универсальная алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $Aut\mathcal{A} \cong G$.

ТЕОРЕМА Армбруста-Шмидта [12]. Для любого моноида M существует универсальная алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $End\mathcal{A} \cong M$.

Формульные подалгебры. Подмножество L' решетки L назовем *0-1 — нижней подполурешекой*, если наибольший и наименьший элементы L входят в L' и $\langle L', \wedge \rangle$ есть подполурешетка полурешетки $\langle L, \wedge \rangle$.

Подалгебра $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$ *открыто определима (параметрически открыто определима)*, если существуют бескванторная формула логики первого порядка $\phi(x)$ сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$ (бескванторная формула $\phi(x, \overline{y})$ и элементы $\overline{a} \in \mathcal{A}$) такие, что

$$\mathcal{B} = \{b \in \mathcal{A} | \mathcal{A} \models \phi(b)\} \ \ (\mathcal{B} = \{b \in \mathcal{A} | \mathcal{A} \models \phi(b, \overline{a})\}).$$

Подалгебра $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$ *элементарна (параметрически элементарна*, если существуют формула $\phi(x)$ логики первого порядка (формула логики $\phi(x, \overline{y})$ первого порядка и элементы $\overline{a} \in \mathcal{A}$) такие, что

$$\mathcal{B} = \{b \in \mathcal{A} | \mathcal{A} \models \phi(b)\} \ \ (\mathcal{B} = \{b \in \mathcal{A} | \mathcal{A} \models \phi(b, \overline{a})\}).$$

Семейства всех открыто определимых (параметрически открыто определимых, элементарных, параметрически элементарных) подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ очевидным образом образуют 0-1-нижние подполурешетки решетки $Sub\mathcal{A}$. Обозначим эти 0-1-нижние подполурешетки как $OFSub\mathcal{A}(POFSub\mathcal{A}, ESub\mathcal{A}, PESub\mathcal{A})$ соответственно.

Имеют место следующие очевидные включения любой алгебры $\mathcal{A}$

$$OFSub\mathcal{A} \begin{matrix} \subseteq ESub\mathcal{A} \subseteq \\ \subseteq POFSub\mathcal{A} \subseteq \end{matrix} PESub\mathcal{A} \subseteq Sub\mathcal{A}$$

В работах [13], [14] доказано следующее обобщение теоремы Биркгофа-Фринка.

Теорема 1. *Для любой алгебраической решетки L, любых ее 0-1-нижних подполурешеток $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2$ существуют универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ решетки L на решетку $Sub\mathcal{A}$ такие, что $\varphi(L_0) = OFSub\mathcal{A}, \varphi(L_1) = POFSub\mathcal{A}, \varphi(L_2) = PESub\mathcal{A}$ и, при этом, $PESub\mathcal{A} = ESub\mathcal{A}$.*

Остается открытым

Вопрос 1. *Найти абстрактное описание алгебраических решеток L и их 0-1-нижних подполурешеток L_0, L_1, L_2, L_3 таких, что существуют универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ для которых*

$$\langle L_0, L_1, L_2, L_3, L\rangle \cong_{\varphi} \langle OFSub\mathcal{A}, ESub\mathcal{A}, POFSub\mathcal{A}, PESub\mathcal{A}, Sub\mathcal{A}\rangle.$$

Напомним что *внутренним изоморфизмом* алгебры $\mathcal{A}$ называется изоморфизм между любыми ее подалгебрами, в случае когда эти подалгебры совпадают между собой будем говорить о *внутреннем автоморфизме* алгебры $\mathcal{A}$.

Теорема 2. ([21]). *Все конечные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ открыто определимы тогда и только тогда, когда все внутренние изоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$ между подобными подалгебрами являются ее внутренними автоморфизмами.*

Следствие 1. *Все конечные подалгебры локально конечной алгебры $\mathcal{A}$ открыто определимы тогда и только тогда, когда все ее внутренние изоморфизмы являются ее внутренними автоморфизмами.*

Приведем некоторые результаты связанные с формульными подалгебрами классических алгебр.

Без труда замечается, что для любой булевой алгебры $\mathcal{A}, OFSub\mathcal{A} = \{\mathcal{A}, \{0,1\}\}, POSub\mathcal{A} = \{\mathcal{A} \restriction a \times \mathcal{A}'_a | a \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'_a$ — конечная подалгебра булевой алгебры $\mathcal{A} \upharpoonright \neg a\}$. здесь для $b \in \mathcal{A}, \mathcal{A} \upharpoonright b$ — булева алгебра естественным образом определенная на множестве $\{a \in \mathcal{A} | a \leq b\}$. Поля будем рассматривать в сигнатуре $\langle +, \cdot \rangle$. Для полей $\mathcal{A}$ характеристики нуль, $OFSub\mathcal{A} = POFSub\mathcal{A} = \{\mathcal{A}\}$. Для полей характеристики $p, OFSub\mathcal{A} = POFSub\mathcal{A} = \{\mathcal{A}$ и все конечные подполя поля $\mathcal{A}\}$. Для любой решетки $\mathcal{A}, OFSub\mathcal{A} = \{\mathcal{A}\}$. Для любой абелевой группы $\mathcal{A}, OFSub\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_m | m \in N\}$, где $\mathcal{A}_m = \{a \in \mathcal{A} | ma = 0\}$.

Формульные конгруэнции. Конгруэнция θ алгебры $\mathcal{A}$ *открыто определима (элементарна)* если существует бескванторная (элементарная) формула $\phi(x, y)$ сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$ такая, что

$$\theta = \{\langle a, b\rangle \in \mathcal{A}^2 | \mathcal{A} \models \phi(a, b)\}.$$

Пусть $OFCon\mathcal{A}(ECon\mathcal{A})$ — совокупность всех открыто определимых (элементарных) конгруэнций алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, что $OFCon\mathcal{A}$ и $ECon\mathcal{A}$ 0-1-нижние подполурешетки решетки $Con\mathcal{A}$ и имеют место включения

$$OFCon\mathcal{A} \subseteq ECon\mathcal{A} \subseteq Con\mathcal{A}.$$

Напомним, что $\triangle_{\mathcal{A}}$ и $\nabla_{\mathcal{A}}$ — наименьшая и, соответственно, наибольшая конгруэнции алгебры $\mathcal{A}$. Через L^0 обозначим расширение решетки L путем добавлением к L внешнего нуля.

В работе [15] доказаны следующие частичные результаты по абстрактному описанию совокупностей открыто определимых и элементарных конгруэнций универсальных алгебр

Теорема 3. *Для любой алгебрачеcкой решетки L существуют универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ решеток L^0 и $Con\mathcal{A}$ такие, что $ECon\mathcal{A} = \{\triangle_{\mathcal{A}}, \nabla_{\mathcal{A}}\}$.*

Теорема 4. *Для любой алгебраической решетки L и любой 0-1-нижней подполурешетки L_1 решетки L^0 существуют универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ решетки L^0 на решетку $Con\mathcal{A}$ такие, что $\varphi(L_1) = OFCon\mathcal{A}$.*

Остается открытым

Вопрос 2. *Найти абстрактное описание решеток L и их 0-1-нижних подполурешеток $L_0 \subseteq L_1$ для которых существуют универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ такие, что*

$$\langle L_0, L_1, L\rangle \cong_{\varphi} \langle OFCon\mathcal{A}, ECon\mathcal{A}, Con\mathcal{A}\rangle.$$

Собственные автоморфизмы. Для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ отображение φ множества A в себя называется *термальным (полиномиальным)* если существуют терм $t(x)$ (терм $t(x, \overline{y})$ и элементы $\overline{b} \in A$, соответственно), сигнатуры σ такие, что для любого $a \in A$

$$\varphi(a) = t(a) \quad (\varphi(a) = t(a, \bar{b})).$$

Автоморфизм алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем ее *собственным (чисто собственным) автоморфизмом*, если он представим в виде произведения полиномиальных (термальных) автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ и обратных к таковым. Через $PSAut\mathcal{A}(SAut\mathcal{A})$ обозначим группы всех чисто собственных (собственных) автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$. Через $Z(G)$ будем обозначать центр группы G. Без труда замечается, что $SAut\mathcal{A}$ является нормальной подгруппой группы $Aut\mathcal{A}$ и, что $PSAut\mathcal{A}$ подгруппа группы $Z(Aut\mathcal{A}) \cap SAut\mathcal{A}$.

В работе [18] доказано следующее обобщение теоремы Биркгофа

Теорема 5. *Для любых (конечной) группы G, ее нормальной подгруппы G_1 и и подгруппы G_2 группы $G_1 \cap Z(G)$ существуют (конечная) универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ группы G на группу $Aut\mathcal{A}$ такие, что $\varphi(G_1) = SAut\mathcal{A}$ и $\varphi(G_2) = PSAut\mathcal{A}$.*

Через $WAut\mathcal{A}$ обозначим группу слабых автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$. Напомним, что биекция φ множества A на себя называется *слабым автоморфизмом* алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$, если для любой сигнатурной функции $f(x_1, ..., x_n)$ алгебры $\mathcal{A}$ функции $\varphi^{-1}(f(\varphi(x_1), ..., \varphi(x_n))$ и $\varphi(f(\varphi^{-1}(x_1), ..., \varphi^{-1}(x_n))$ являются термальными функциями алгебры $\mathcal{A}$.

Как известно [17] группа $Aut\mathcal{A}$ является нормальной подгруппой группы $WAut\mathcal{A}$.

С другой стороны известна

ТЕОРЕМА Зихлера [19]. Для любых группы G и ее нормальной подгруппы G_1 существует универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ группы G на $WAut\mathcal{A}$ такие, что $\varphi(G_1) = Aut\mathcal{A}$.

Отметим следующий открытый

Вопрос 3. *Для каких групп G, G_1, G_2, G_3 таких, что G_1 нормальная подгруппа группы G, C_2 — нормальная подгруппа группы G_1 и $G_3 \subseteq G_2 \cap Z(G_1)$, существуют универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ группы G на группу $WAut\mathcal{A}$ такие, что $\varphi(G_1) = Aut\mathcal{A}, \varphi(G_2) = SAut\mathcal{A}$ и $\varphi(G_3) = PSAut\mathcal{A}$?*

Приведем ряд результатов о собственных и чисто собственных автоморфизмах классических алгебр. Очевидным образом, в силу идемпотентности сигнатурных операций, единственный чисто собственный автоморфизм решетки — тождественный. В работе [18] доказано, что решетки, у которых единица (если она есть) $\vee$ — неразложима, а нуль (если он есть) $\wedge$ — неразложим, не обладают нетривиальными собственными автоморфизмами.

Тем не менее, как заметил Габор Кун, решетки вида $M_n(n \geq 3)$ обладают нетривиальными собственными автоморфизмами. Остается открытым

Вопрос 4. *Описать собственные автоморфизмы произвольных решеток.*

Без особого труда доказывается, что 1) булевы алгебры не обладают нетождественными собственными автоморфизмами, 2) все собственные автоморфизмы полей являются чисто собственными, 3) поля характеристики нуль не имеют нетривиальных чисто собственных автоморфизмов, 4) поля характеристики p имеют нетривиальные чисто собственные автоморфизмы φ тогда и только тогда, когда они совершенны и при этом $\varphi(x) = x^{p^k}$, где k - любое натуральное число.

Напомним, что группа G называется *n-абелевой*, если на G истинно тождество $(xy)^n = x^n y^n$. Для любого целого n отображение φ_n группы G в себя определим как $\varphi_n(x) = x^n$. Тогда $\varphi_n \in AutG$ тогда и только тогда, когда G n-абелева группа с однозначным извлечением корня n-ой степени. В работе [16] доказано, что собственные автоморфизмы свободных групп суть их внутренние автоморфизмы. В целом же остается открытым

Вопрос 5. *Описать собственные автоморфизмы произвольных групп.*

<u>Термальные и полиномиальные эндоморфизмы.</u> Моноид всех термальных (полиномиальных) эндоморфизмов универсальной алгебры $\mathcal{A}$ обозначим как $TEnd\mathcal{A}(PEnd\mathcal{A})$. Имеют место включения

$$TEnd\mathcal{A} \subseteq PEnd\mathcal{A} \subseteq End\mathcal{A}.$$

Для любого моноида S через $Z(S)$ обозначим центр моноида.

Для моноида S и его подмоноида S_1 отображение $n : S_1 \times S \longrightarrow S_1$ назовем *нормальным*, если для любых $a \in S_1, b, c \in S$ имеют место равенства

$$n(a, cb) \cdot c = c \cdot n(a, b) \text{ и } n(a, e) = a,$$

здесь e — единица моноида S. Подмоноид S_1 моноида S назовем *нормальным подмоноидом*, если для S_1 и S существует нормальное отображение.

Для группы G и ее нормальной подгруппы G_1 отображение $n(a, b) = bab^{-1}$ — нормальное и других нормальных отображений для пары $\langle G, G_1\rangle$ нет. Если S моноид и S_1 — нормальный подмоноид такой, что S_1 содержится в $Z(S)$ с нормальным отображением $n(a, b) = a$. Пусть, к примеру, A произвольное множество и $F(A)$ — моноид всех отображений A в A. Пусть $C(A) = \{e, g_a | a \in A\}$, где e — тождественное отображение A на A и $g_a(A) = \{a\}$. Тогда $C(A)$ — нормальный подмоноид моноида $F(A)$ с нормальным отображением

$$n(g_a, k) = g_{k(a)}, \; n(e, k) = e$$

для $k \in F(A)$.

Эндоморфизм φ алгебры $\mathcal{A}$ *сильно полиномиален*, если существует полином $t(x,\bar{b})$ алгебры $\mathcal{A}$ определяющий φ и такой, что для любого $\eta \in End\mathcal{A}$ отображение $x \longrightarrow t(x,\eta(\bar{b}))$ является эндоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$. Пусть $P_sEnd\mathcal{A}$ — семейство всех сильно полиномиальных эндоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$. $P_sEnd\mathcal{A}$ — нормальный подмоноид моноида $End\mathcal{A}$ с нормальным отображением $n(x,y)$ определенным следующим образом: для $\eta \in End\mathcal{A}$ и $t(x,\bar{b}) \in PEnd\mathcal{A}$

$$n(t(x,\bar{b}),\eta) = t(x,\eta(\bar{b})).$$

Любой термальный эндоморфизм тривиальным образом является сильно полиномиальным, т.е. имеет место цепочка включений

$$TEnd\mathcal{A} \subseteq P_sEnd\mathcal{A} \subseteq PEnd\mathcal{A} \subseteq End\mathcal{A}$$

Остается открытым

Вопрос 6. *Найти абстрактное описание цепочек моноидов вида*

$$TEnd\mathcal{A} \subseteq P_sEnd\mathcal{A} \subseteq PEnd\mathcal{A} \subseteq End\mathcal{A}$$

для произвольных универсальных алгебр $\mathcal{A}$.

Частичный ответ на него дан в работе [20].

Теорема 6. *Для любых моноида S, его нормального подмоноида S_1 и его подмоноида S_2 такого, что $S_2 \subseteq Z(S) \cap S_1$ существуют универсальная алгебра $\mathcal{A}$ и изоморфизм φ моноида S на $End\mathcal{A}$ такие, что φ $\varphi(S_1) = P_sEnd\mathcal{A} = PEnd\mathcal{A}$ и $\varphi(S_2) = TEnd\mathcal{A}$.*

<u>Условно термальные и условно собственные преобразования алгебр.</u> Понятие *условного терма* и целая иерархия близких к нему понятий: *позитивно-условного, элементарно-условного, $\exists^+$-условного термов* были введены в работах автора. Более подробно о них см. работы [22], [23]. Отметим лишь, что условно термальные и позитивно-условно термальные функции на алгебре $\mathcal{A}$ определены на этой алгебре безкванторными формулами, а $\exists^+$-условно термальные и элементарно-условно термальные — элементарными формулами сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$.

Для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle A;\sigma\rangle$ любое отображение φ множества A в A называется *условно-(элементарно-условно)-термальным* если существует условный (элементарно-условный) терм $t(x)$ сигнатуры алгебры $\mathcal{A}$ такой, что для любого $a \in A$ $\varphi(a) = t(a)$. *Условно чисто собственным (элементарно-условно чисто собственным* будем называть любой автоморфизм алгебры $\mathcal{A}$, представимый в виде произведения условно (элементарно-условно) — термальных автоморфизмов и обратных к таковым. Группу всех условно чисто собсивенных (элементарно условно чисто собственных) автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ обозначим как $CPSAut\mathcal{A}$ $(ECPSAut\mathcal{A})$.

В работе [21] доказан следующий результат.

Теорема 7. *а) Пусть $\mathcal{A}$ — равномерно локально конечная алгебра конечной сигнатуры (конечная алгебра произвольной сигнатуры). Тогда для любого автоморфизма φ алгебры $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\varphi \in CPSAut\mathcal{A}$,

2) подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно φ и φ коммутирует со всеми внутренними изоморфизмами алгебры $\mathcal{A}$.

В частности, если $\mathcal{A}$ конечная алгебра без собственных подалгебр, то следующие условия эквивалентны:

1) $\varphi \in CPSAut\mathcal{A}$,

2) $\varphi \in Z(Aut\mathcal{A})$.

б) Для любой конечной алгебры $\mathcal{A}$ и любого ее автоморфизма φ следующие условия эквивалентны:

1) $\varphi \in ECPSAut\mathcal{A}$,

2) подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно φ и $\varphi \in Z(Aut\mathcal{A})$.

Ряд других результатов о связи формульности подалгебр и условной термальности различных преобразований конечных и локально конечных алгебр приведены в работе [21]. В качестве примера приведем следующий:

Теорема 8. *Для любой конечной алгебры $\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $Aut\mathcal{A} = ECPSAut\mathcal{A}$,

2) $Sub\mathcal{A} = ESub\mathcal{A}$ и группа $Aut\mathcal{A}$ абелева.

Список литературы

1. М. Судзуки. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М.: ИЛ, 1960.
2. Л.Н. Шеврин, А.Я. Овсянников. Полугруппы и их полугрупповые решетки. 4.1. Полугруппы с некоторыми типами решеток подполугрупп и решеточные характеристики классов полугрупп. Свердловск: Уральский гос. университет, 1990.
3. Б.И. Плоткин. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
4. А.Г.Пинус. Производные структуры универсальных алгебр. Новосибирск, изд-во НГТУ, 2007.
5. W.J. Blok, D. Pigozzi. On the structure of varieties with equational definable principal congruences I // Algebra univ. - v. 15, № 2, 1982, p. 195 — 227.
6. I.Grant. Automorphisms definable by formulas // Pacific J. Math. - v. 44, № 1, 1973, p. 107 — 115.
7. E. Fried, G. Gratzez, R. Quackenbuch. Uniform congruence schemes // Algebra univ. - v. 10, № 2, 1980, p. 176 — 189.
8. P. Kohler, D. Pigozzi. Varieties with equational definable principal congruences // Algebra univ. - v. 11, № 2, 1980, p. 213 — 219.

9. G. Birhoff, O. Frink. Representations of lattices by sets // Trans. Amer. Math. Soc, v. 64, 1948, p. 299 — 316.
10. G. Gratzer, E.T. Schmidt. Characterization of congruences lattices of abstract algebras // Acta Sci. Math. (Szeged), v. 24, 1963, p. 34 — 59.
11. G. Birkhoff. On groups of automorphisms // Rev. Un. Math. Argentina, v. 11, 1946, p. 155 — 157.
12. M. Armbrust, J. Schmidt. Zum Gayleyschen Darstellungs-Satz // Math. Ann., v. 154, № 2, 1964, s. 70 — 72.
13. А.Г.Пинус. О полурешетках формульных подалгебр // Алгебра и логика, т. 44, № 4, 2005, с. 474 — 482.
14. А.Г. Пинус. О поурешетках формульных подалгебр. II (в печати).
15. А.Г. Пинус. О Подполурешетках формульных и открыто формульных конгруэнций решетки всех конгруэнций универсальной алгебры // Сиб. матем. журнал, т. 47, № 4, 2006, с. 865 — 872.
16. B. Csakany. Inner automorphisms of universal algebras // Publ. Math. Debrecen, v. 12, 1965, p. 331 — 333.
17. K. Glazek. Weak automorphisms in general algebras //. Алгебра и теория моделей 3. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001, p. 26 — 31.
18. А.Г. Пинус. О собственных автоморфизмах универсальных алгебр // Сиб. матем. журнал, т. 45, № 6, 2004, с. 1329 — 1337.
19. J. Sichler. Weak automorphisms of universal algebras // Algebra univ., v. 3, № 1, 1973, p. 1 — 7.
20. А.Г. Пинус. О термальных и полиномиальных эндоморфизмах (в печати).
21. А.Г. Пинус. О формульности производных объектов на универсальных алгебрах // Изв. вузов. Математика, № 3, 2006, с. 36 — 40.
22. А.Г. Пинус. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений // Новосибирск, изд-во НГТУ, 2002.
23. А.Г. Пинус. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений // Успехи матем. наук, т. 56, № 4, 2001, с. 35 — 72.

A. G. Pinus

About families of definable (formula) derivative objects in universal algebras.

Abstract. This paper contains the author's results concerning formula families (in different meanings) of automorphisms, endomorphisms, congruences, subalgebras of arbitrary universal algebras.

Keywords: Automorphism, Endomorphism, congruence, subalgebra, universal algebra.

Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, 630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел.: (383) 346-11-66 (ag.pinus@gmail.com)

Pinus Alexandr, professor, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marks St., Novosibirsk, 630092, Phone: (383)3461166 (ag.pinus@gmail.com)