Серия «Математика»
2009. Т. 2, № 2, С. 4—19

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.54

Группы и упорядочения: проблема равенства слов, вложения и амальгамы (обзор последних достижений) *

В. В. Блудов
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Э. М. У. Гласс
Кембриджский университет, Куинз Колледж

Аннотация. Приведён обзор результатов, полученных авторами в последние годы в теории решеточно упорядоченных и правоупорядоченных групп.

Ключевые слова: решёточно упорядоченные группы, амальгамирование, свободные произведения с объединённой подгруппой, HNN-расширения, правоупорядочиваемые группы, проблема равенства слов, рекурсивно определимые множества.

1. Введение

В 2009 году мы отмечаем 80-летие со дня рождения А. И. Кокорина, одного из пионеров в исследованиях по теории упорядоченных групп. Большое влияние на развитие исследований в этой области в России оказала книга [3], написанная им в соавторстве с В. М. Копытовым в начале 1970-х годов. В то время теория упорядоченных групп проходила период своего становления. Сейчас уже можно отметить, что современная теория упорядоченных групп обладает хорошо развитой техникой исследований, имеет тесные связи с теорией алгебраических систем, с математической логикой, топологией и другими разделами математики.

* Эти исследования были поддержаны грантами Королевского общества, Лондонского математического общества (Схема IV, поездки) и Куинз Колледжа, Кембридж (Великобритания). Авторы благодарны всем, кто способствовал созданию благоприятных условий для нашей работы, а также Куинз Колледжу и отделу чистой математики и математической статистики Кембриджского университета за гостеприимство, оказанное первому соавтору, во время его визитов в Кембридж.

В настоящей работе представлен расширенный вариант докладов, сделанных авторами в Бате на конференции «Groups St. Andrews – 2009» и в Новосибирске на конференции «Мальцевские чтения», посвящённой 100-летию со дня рождения А. И. Мальцева. Английский вариант этой работы представлен к опубликованию в трудах конференции «Groups St. Andrews – 2009».

При изложении материала мы будем сопоставлять между собой результаты из общей теории групп, из теории решёточно упорядоченных групп и теории правоупорядоченных групп. Поэтому второй и пятый параграфы мы озаглавили «Группы против решёточно упорядоченных групп» и «Правые порядки против решёточных порядков», а не «Группы и решёточно упорядоченные группы» и «Правые порядки и решёточные порядки». Основные результаты работы, интересные также и специалистам по общей теории групп, представлены в четвертом параграфе.

2. Группы против решёточно упорядоченных групп

Один из способов получения результатов в теории бесконечных групп это представление элементов в каноническом виде и связанные с этим конструкции такие, как свободные группы, свободные произведения, свободные произведения с объединённой подгруппой и HNN-расширения [6]. Первые две конструкции существуют в любых многообразиях алгебр, но в группах они наиболее востребованы. На это есть две причины. Во-первых, канонический вид элементов свободных групп легко получается в виде редуцированного слова от порождающих элементов группы (и им обратных). Похожим образом получается канонический вид и для элементов свободных произведений групп. Во-вторых, амальгама существует для любых заданных групп G_1 и G_2 с изоморфными подгруппами H_1 и H_2 соответственно. Это значит, что для любого изоморфизма $\varphi : H_1 \cong H_2$ существует группа L и вложения $G_1 \xrightarrow{\tau_1} L \xleftarrow{\tau_2} G_2$ такие, что $h_1\tau_1 = h_1\varphi\tau_2$ для всех $h_1 \in H_1$. Среди всех таких групп L находится и их свободное произведение с объединённой подгруппой $G_1 {*} G_2\,(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ — фактор-группа свободного произведения G_1 и G_2 по нормальной подгруппе, порождённой элементами $\{(h_1\varphi)h_1^{-1} \mid h_1 \in H_1\}$. И здесь каждый элемент имеет канонический вид, а ключевой факт состоит в том, что естественные отображения G_1 и G_2 в $G_1 {*} G_2\,(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ являются *вложениями*, которые согласованы только на образах H_1 и H_2. (Мы ограничились случаем двух групп только из удобства изложения, на самом деле все эти результаты справедливы для любого семейства групп.)

Другая конструкция, тесно связанная со свободными произведениями с объединённой подгруппой, это HNN-расширения. Если группа G имеет изоморфные подгруппы H_1, H_2 (скажем, $\varphi : H_1 \cong H_2$), то мы можем образовать HNN-расширение $K := \langle G, t \mid h_1^t = h_1\varphi \ (h_1 \in H_1)\rangle$; группа K порождается порождающими элементами группы G и дополнительным элементом t, а определяющие соотношения группы K состоят из определяющих соотношений группы G и дополнительных соотношений $h_1^t = h_1\varphi$ $(h_1 \in H_1)$, где $x^y := y^{-1}xy$. И снова элементы из K представляются в каноническом виде. Более того, естественное отображение G в K снова *вложение*.

Эти две конструкции приводят к нескольким важным результатам, которые перечислим ниже в пунктах (п1) – (п6). Предварительно напомним определения.

Всякая группа G изоморфна фактор-группе свободной группы по её нормальной подгруппе. Если свободная группа конечно порождена, мы говорим, что G конечно порождена. Если дополнительно нормальная подгруппа имеет вычислимый список порождающих (как нормальная подгруппа), мы говорим, что G *рекурсивно определима*, а если нормальная подгруппа конечно порождена (как нормальная подгруппа), то мы говорим, что G *конечно определима*.

(п1) Всякая группа G вкладывается в делимую группу $\bar{G}$ (для каждого положительного целого числа n всякого $g \in \bar{G}$ существует $x \in \bar{G}$ такой, что $x^n = g$).

(п2) Всякая счётная группа G вкладывается в двух порождённую группу (которая может быть эффективно получена из представления группы G).

(п3) Всякая группа вкладывается в группу, в которой любые два элемента одинакового порядка сопряжены.

(п4) Существует конечно определённая группа с неразрешимой проблемой равенства слов.

(п5) (Теорема Хигмана о вложении) Конечно порождённая группа вкладывается в конечно определённую группу тогда и только тогда, когда она рекурсивно определима [20].

(п6) (Теорема Буна–Хигмана) Проблема равенства слов разрешима в конечно порождённой группе G тогда и только тогда, когда G вкладывается в простую группу, которая в свою очередь вкладывается в конечно определённую группу [14].

Результаты (п5) и (п6) особенно привлекательны, поскольку они указывают на двойственный характер между алгебраическими и логическими (из теории рекурсивных функций) понятиями.

Теперь расширим язык теории групп, добавив решёточные операции $\vee$ и $\wedge$. Полученный язык исключительно богат, что мы сейчас и продемонстрируем. Необходимые базовые понятия можно найти, например, в книгах [3], [4] и [16]. Здесь определим только те понятия, которые нужны для связного изложения текста.

Решёточно упорядоченная группа (сокращенно *ℓ-группа*) это алгебраическая система G сигнатуры $\{\cdot, ^{-1}, 1, \vee, \wedge\}$ такая, что $\langle G; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ имеет структуру группы, $\langle G; \vee, \wedge\rangle$ имеет структуру решётки и при этом

$$x(a \vee b)y = xay \vee xby \quad \text{и} \quad x(a \wedge b)y = xay \wedge xby.$$

Это значит, что решёточный порядок сохраняется при умножении и слева, и справа.

Группа в ℓ-группе не имеет кручения, а решетка в ℓ-группе дистрибутивна.

Поскольку в сигнатуре $\{\cdot, ^{-1}, 1, \vee, \wedge\}$ класс ℓ-групп образует многообразие, то мы можем говорить о свободных ℓ-группах и свободных произведениях ℓ-групп в этой сигнатуре. Если ℓ-группа порождается (как ℓ-группа) множеством X, то в силу дистрибутивности каждый элемент ℓ-группы записывается в виде

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} w_{i,j},$$

где I и J конечные множества, а каждое $w_{i,j}$ — групповое слово в символах множества X. К сожалению, такая форма представления элементов неоднозначна даже в свободной ℓ-группе, поскольку

$$(w \wedge 1) \vee (w^{-1} \wedge 1) = 1 \qquad \text{для всех } w. \tag{2.1}$$

Ситуация со свободными произведениями в классе ℓ-групп не лучше. Если G_1 и G_2 — ℓ-группы, то их свободное произведение в многообразии ℓ-групп, рассматриваемое как группа не совпадает со свободным произведением групп G_1 и G_2 в многообразии групп. Например, пусть ℓ-группы G, H имеют нетривиальные ортогональные элементы ($g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ и $g_1 \wedge g_2 = 1$, $h_1 \wedge h_2 = 1$). Тогда, как показано в работе [22], в любой ℓ-группе, содержащей ℓ-гомоморфные образы G и H, выполнено соотношение

$$[h_1, g_2^{-1} h_2 g_1 h_2^{-1} g_2 h_2 g_1^{-1}] = 1. \tag{2.2}$$

Нетрудно заметить, что в свободном произведении групп G и H соотношение (2.2) не выполняется. Более того, что ещё хуже, не для всяких ℓ-групп существуют амальгамы. Точнее, если G_1, G_2 ℓ-группы с изоморфными ℓ-подгруппами H_1, H_2 соответственно и φ — изоморфизм из

H_1 на H_2, то <u>не</u> всегда существуют ℓ-группа L и ℓ-вложения $\tau_i : G_i \to L$ $(i = 1, 2)$ такие, что $h_1\tau_1 = h_1\varphi\tau_2$ для всех $h_1 \in H_1$ ([25] и [13]).

Таким образом, конструкции свободного произведения с объединённой подгруппой и HNN-расширения не могут использоваться в теории ℓ-групп в полном объеме. Тем не менее, полные аналоги утверждений (п1) – (п6) имеют место.

(I) Всякая ℓ-группа ℓ-вкладывается в делимую ℓ-группу [21].

(II) Всякая счётная ℓ-группа ℓ-вкладывается в двух порождённую ℓ-группу (которая может быть эффективно получена из представления группы G). (Б. Нейман; см. [16], теорема 10.A).

(III) Всякая ℓ-группа ℓ-вкладывается в ℓ-группу, в которой любые два строго положительных элемента сопряжены [25].

(IV) Существует конечно определённая ℓ-группа с неразрешимой проблемой равенства слов [19].

(V) (Аналог теоремы Хигмана о вложении) Конечно порождённая ℓ-группа ℓ-вкладывается в конечно определённую ℓ-группу тогда и только тогда, когда она рекурсивно определима (как ℓ-группа) [17].

(VI) (Аналог теоремы Буна–Хигмана) Проблема равенства слов разрешима в конечно порождённой ℓ-группе G тогда и только тогда, когда G ℓ-вкладывается в простую ℓ-группу ℓ-вложимую в конечно определённую ℓ-группу [18].

Как доказываются утверждения (I) – (VI)? Ключом служит теорема Холланда о представлении ℓ-групп. Пусть $(\Omega, \le)$ — линейно упорядоченное множество и $A(\Omega) := Aut(\Omega, \le)$. Тогда $A(\Omega)$ — ℓ-группа относительно операции композиции и поточечного упорядочения

$$f \le g \iff \alpha f \le \alpha g \quad \text{для всех } \alpha \in \Omega. \tag{2.3}$$

Теорема 1. (Холланд [21]) *Всякая ℓ-группа G ℓ-вкладывается в $A(\Omega_G)$ для подходящего линейно упорядоченно множества $(\Omega_G, \le)$. Если G счётна, то в качестве $(\Omega_G, \le)$ может быть взято множество рациональных или действительных чисел с естественным порядком.*

Используя этот результат и технику работы с подстановками (часто специально разработанную), можно доказать (I) – (VI). И хотя формулировки (I) – (VI) чрезвычайно похожи на формулировки (п1) – (п6), некоторые комментарии и отличия стоит отметить.

Во-первых, поскольку язык теории ℓ-групп включает в себя как групповые, так и решёточные операции, то конечная порождённость и конечная определённость для ℓ-групп <u>не</u> влекут эти же свойства *для групп.*

Также непохоже на ситуацию в теории групп то, что любое конечное множество соотношений в ℓ-группах эквивалентно одному соотношению

$$(w_1 = 1 \ \& \ \ldots \ \& \ w_n = 1) \Longleftrightarrow |w_1| \vee \cdots \vee |w_n| = 1,$$

где $|x| := x \vee x^{-1}$. Это вытекает из того, что $|x| \geq 1$ для всех x, а равенство достигается только при $x = 1$. Тождество (2.1) является переформулировкой этого факта. Таким образом (IV) вполне отличается от (п4); всякая конечно порождённая группа с одним соотношением имеет разрешимую проблему равенства слов (см. [6]).

Пусть ξ — некоторое вычислимое действительное число и пусть $D(\xi)$ обозначает аддитивную группу $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, упорядоченную по правилу

$$(m, n) > (0, 0) \quad \Longleftrightarrow \quad m + n\xi > 0 \text{ (в } \mathbb{R}).$$

В этом случае $D(\xi)$ рекурсивно определённая ℓ-группа. [Например, если $\xi = \sqrt{2}$, то определяющими соотношениями (от коммутирующих переменных x и y) для $D(\sqrt{2})$ будут соотношения: $x < y < 2x$, $14x < 10y < 15x$, $141x < 100y < 142x$, $\ldots$]. В силу (V), $D(\xi)$ вкладывается в конечно определённую ℓ-группу $G(\xi)$. Если $w_\xi = 1$ — определяющее соотношение для $G(\xi)$, то

$$(w_\xi = 1) \vdash (x^m y^n > 1) \quad \Longleftrightarrow \quad m + n\xi > 0 \text{ (в } \mathbb{R}).$$

Таким образом, слово w_ξ "определяет" ξ. И значит, на языке ℓ-групп, множество вычислимых действительных чисел (которое включает e и π) в точности совпадает с множеством (ℓ-)алгебраических действительных чисел (sic!).

Все нетривиальные элементы ℓ-групп имеют бесконечный порядок и, следовательно, сопряжены в некоторой надгруппе в силу (п3). Однако, в любой ℓ-группе G, $g^f > 1$ эквивалентно $g > 1$. Следовательно множество элементов, которые могут быть сопряжены с данным положительным элементом являются подмножеством множества строго положительных элементов $G_+ := \{g \in G \mid g > 1\}$. Таким образом (III) означает, что всякая ℓ-группа ℓ-вкладывается в такую ℓ-группу, в которой G_+ образует полный класс сопряжённых элементов, что в свою очередь влечет то же самое и для множества строго отрицательных элементов $G_- := \{g \in G \mid g < 1\} = \{g \in G \mid g^{-1} \in G_+\}$. Единица группы всегда составляет полный класс сопряжённых элементов. Пока ничего не сказано про число классов сопряжённых элементов несравнимых с единицей. В работе [10] мы использовали специально подобранную технику работы с монотонными преобразованиями и получили, что все несравнимые с единицей элементы можно сделать одним классом сопряжённых элементов. Таким образом, получается следующее усиление факта (III).

Теорема 2. ([10]) *Всякая ℓ-группа ℓ-вкладывается в ℓ-группу с 4-мя классами сопряжённых элементов.*

В формулировке факта (VI) присутствует неопределённость, которая касается слова “простая”. Следует ли понимать “простая ℓ-группа” как ℓ-группа простая в многообразии групп или как ℓ-группа простая в многообразии ℓ-групп? В первом случае группа не имеет собственных нетривиальных нормальных подгрупп, а во втором случае группа не имеет собственных нетривиальных нормальных выпуклых ℓ-подгрупп. Первоначально в работе [18] использовался результат Пирса и “простая ℓ-группа” понималась как простая в многообразии групп, однако, как отмечено в [10], факт (VI) остаётся верным, если “простая ℓ-группа” понимается как простая группа в многообразии ℓ-групп.

3. Правоупорядочиваемые группы

Напомним один из способов установления правого порядка на группе порядковых автоморфизмов $A(\Omega)$ линейно упорядоченного множества $(\Omega, \leq)$. Вполне упорядочим *множество* Ω отношением полного порядка. Определим *носитель* элемента $g \in A(\Omega)$: $\mathrm{supp}(g) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha g \neq \alpha\}$. Если $g \neq 1$, то пусть α_g обозначает наименьший (относительно полного порядка на Ω) элемент непустого множества $\mathrm{supp}(g)$. Определим линейный порядок $\preceq$ на $A(\Omega)$, полагая $1 \prec g$, если и только если $\alpha_g < \alpha_g g$ (относительно исходного линейного порядка $\leq$). Нетрудно проверить, что порядок $\preceq$ сохраняется при умножении справа

$$f \prec g \quad \Longrightarrow \quad fh \prec gh \quad (h \in A(\Omega)).$$

(Умножение слева не обязательно сохраняет этот порядок). Порядок $\preceq$ зависит от того, как мы вполне упорядочиваем множество Ω. И действительно, поточечный решёточный порядок, определённый в (2.3) является пересечением всех правых порядков, полученных указанным способом при всех различных полных упорядочениях множества Ω. Это позволяет переходить от ℓ-группы к правоупорядоченной группе и обратно. В частности можно показать полный аналог факта (п3).

Теорема 3. ([10]; см. также теорему 2) *Всякая правоупорядоченная группа вкладывается* (*с сохранением порядка*) *в правоупорядоченную группу, в которой сопряжены любые два нетривиальных элемента* (*не имеет значения, какие это элементы, строго положительные или строго отрицательные*).

Теперь обратимся к теоретико-модельным вопросам. Вполне естественно спросить:

Любая ли теория первого порядка T, имеющая бесконечную модель, имеет модель $\mathcal{M}$, у которой группа $Aut(\mathcal{M})$ имеет неразрешимую теорию?

Если теория T стабильна, то легко получить утвердительный ответ, используя факт (п4): существует конечно определённая группа с неразрешимой проблемой равенства слов. В общем случае утвердительный ответ получится, если доказать существование конечно определённой правоупорядочиваемой группы с неразрешимой проблемой равенства слов (см. [9]). Здесь идет речь о правоупорядочиваемой группе, поэтому конечная определённость и равенство слов рассматриваются в групповой структуре. Поскольку язык ℓ-групп существенно богаче языка теории групп, то существование такой правоупорядочиваемой группы не следует из факта (IV). Тем не менее, в работе [9] мы доказали

Теорема 4. *Существуют конечно определённые правоупорядочиваемые группы с неразрешимой проблемой равенства слов.*

и таким образом получили

Следствие 1. *У любой теории первого порядка T, имеющей бесконечную модель, имеется модель $\mathcal{M}$, у которой группа $Aut(\mathcal{M})$ имеет неразрешимую теорию.*

Замечание: В отличие от класса групп, в классе правоупорядочиваемых групп нарушается свойство амальгамируемости [1]: существуют правоупорядоченные группы G_1, G_2 с изоморфными подгруппами H_1 и H_2 соответственно (скажем $\varphi : H_1 \cong H_2$, где φ сохраняет порядок) и такие, что не существует правоупорядочиваемой группы L с групповыми вложениями $G_1 \xrightarrow{\tau_1} L \xleftarrow{\tau_2} G_2$, удовлетворяющими условию $h_1\tau_1 = h_1\varphi\tau_2$ для всех $h_1 \in H_1$.

4. Амальгамы в правоупорядочиваемых и правоупорядоченных группах

При каких условиях существуют амальгамы правоупорядочиваемых и правоупорядоченных групп? Иначе говоря, для каких правоупорядочиваемых (правоупорядоченных) групп G_1, G_2 с изоморфными подгруппами H_1 и H_2 соответственно, и для каких изоморфизмов $\varphi : H_1 \cong H_2$ существует правоупорядочиваемая (правоупорядоченная) группа L, в которую вкладываются группы G_1 и G_2 и вложение согласовано на h_1 и $h_1\varphi$ для всех $h_1 \in H_1$ (в случае правоупорядоченных групп вложения сохраняют порядок)?

Дж. М. Бергман очень красиво связал этот вопрос с (групповым) свободным произведением групп с объединённой подгруппой.

Теорема 5. (Бергман, [8]) *Пусть G_1, G_2 — правоупорядочиваемые (правоупорядоченные) группы с подгруппами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$. Если H_1 и H_2 изоморфны относительно φ (и φ сохраняет порядок в случае правоупорядоченных групп), то амальгама этих групп существует в классе правоупорядочиваемых (правоупорядоченных) групп тогда и только тогда, когда группа $G_1 * G_2\,(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ правоупорядочиваема (правоупорядочена).*

Отсюда немедленно следует (см. [4], Следствие 6.1.3), что свободное произведение правоупорядочиваемых групп правоупорядочиваемо. Аналогичный результат для двусторонне упорядоченных групп был получен А. А. Виноградовым [2].

Таким образом, для изучения группы $G_1 * G_2\,(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ и установления её правой упорядочиваемости, достаточно найти любую амальгаму этих групп. А для этой цели очень полезным инструментом оказались группы монотонных преобразований. Например, если G_i правоупорядоченная группа с циклической подгруппой $H_i = \langle h_i \rangle$ $(i = 1, 2)$, то мы можем вложить (с помощью подхододящего вложения ψ) группу $G_1 \times G_2$ (упорядоченную лексикографически) в правоупорядоченную группу L, в которой любые два нетривиальных элемента сопряжены. Пусть $f \in L$ такой, что $(h_1\psi)^f = h_2\psi$. Теперь вложим G_1 в L с помощью $\tau_1 := \psi\hat{f}$ и G_2 в L с помощью $\tau_2 := \psi$, где $\hat{f}$ — сопряжение с помощью f (внутренний автоморфизм группы L). Теперь $h_1^m\tau_1 = h_1^m\varphi\tau_2$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, теорема 3 влечет

Следствие 2. ([10]) *Если G_1, G_2 — правоупорядоченные группы с циклическими подгруппами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$, то на $L := G_1 * G_2\,(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ можно задать правый порядок. При этом порядок группы L продолжает исходные порядки групп G_1 и G_2, если изоморфизм φ сохраняет порядок на подгруппах H_1, H_2.*

Следовательно, всегда возможно амальгамировать циклические подгруппы в классе правоупорядочиваемых (правоупорядоченных) групп, что решает проблему 6.4 из [24].

А что можно сказать в случае двусторонне упорядоченных групп? Рассмотрим группы $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}$ и подгруппы $H_1 = H_2 = 2\mathbb{Z}$ с тождественным изоморфизмом. В этом случае G_1 и G_2 упорядочиваемые группы с нормальными циклическими подгруппами H_1 и H_2. И уже в этом наипростейшем случае группа $G_1 * G_2\ (H_1 = H_2)$ не упорядочиваема, поскольку $1_1 \neq 1_2$, а $1_1 + 1_1 = 1_2 + 1_2$ (в любой л.у. группе $x^2 = y^2$ влечет $x = y$). Тем не менее, $G_1 * G_2\ (H_1 = H_2)$ правоупорядочиваема (см. следствие 3).

Напомним, что если на группе G задан правый порядок $<$, то $P := G_+$ — подполугруппа группы G и P, P^{-1}, $\{1\}$ задаёт разбиение G. Верно и обратное, всякая подполугруппа P, образующая разбиение P, P^{-1}, $\{1\}$ на группе G определяет правый порядок группы с множеством положительных элементов P. Для любого $f \in G$, P^f также подполугруппа, определяющая сопряжённый правый порядок на G: $g \in G$ строго положителен относительно нового порядка, если и только если $fgf^{-1} > 1$ при старом порядке. Таким образом, если правоупорядочиваемая группа G допускает задание правого порядка $\leq$, то G допускает задание и всех правых порядков, сопряжённых с порядком $\leq$. Важным моментом в наших исследованиях является рассмотрение на правоупорядочиваемой группе семейства (множества) возможных правых порядков. Это, в свою очередь приводит к понятию алгебраической системы $\langle G; \cdot, ^{-1}, 1, \leq_i \ (i \in I)\rangle$, сигнатура которой включает не одно отношение правого порядка, а целое семейство таких порядков.

Непустое семейство $\mathcal{R}$ правых порядков группы G называется *нормальным* или *G-инвариантным*, если всякий правый порядок, сопряжённый с правым порядком из $\mathcal{R}$ также принадлежит $\mathcal{R}$. Отметим, что множество всех правых порядков на правоупорядочиваемой группе является нормальным. Также нормальным является и семейство всех конрадовых порядков на правоупорядочиваемой группе.

Пусть G_1, G_2 — правоупорядочиваемые группы с подгруппами H_1, H_2 соответственно и пусть $\varphi : H_1 \cong H_2$ — изоморфизм. Пусть заданы семейства правых порядков $\mathcal{R}_1$ на группе G_1 и $\mathcal{R}_2$ на группе G_2. Говорим, что пара $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *совместима* с φ, если для любого порядка $\leq_1$ из $\mathcal{R}_1$ найдётся порядок $\leq_2$ в $\mathcal{R}_2$ такой, что

$$1 \leq_1 h_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq_2 h_1\varphi \quad (\text{для всех } h_1 \in H_1),$$

и для любого $\leq_2$ из $\mathcal{R}_2$ найдётся порядок $\leq_1$ в $\mathcal{R}_1$ такой, что

$$1 \leq_2 h_2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq_1 h_2\varphi^{-1} \quad (\text{для всех } h_2 \in H_2).$$

Во всех известных нам случаях при построении примеров не правоупорядочиваемых свободных произведений с объединённой подгруппой $L := G_1 * G_2 \ (\varphi : H_1 \cong H_2)$ находились правые порядки на группах G_1, G_2 совместимые с φ, но такие, что некоторые сопряжённые с ними порядки не были совместимы с φ. И, действительно, если бы группа L была правоупорядочиваемой, то любой порядок на L, сопряжённый элементом из G_1, индуцировал на G_2 порядок совместимый с φ. На наше счастье, это оказалось единственным препятствием для правой упорядочиваемости свободных произведений с объединённой подгруппой. Используя технику работы с монотонными преобразованиями, мы доказали

Теорема 6. ([12]) *Пусть G_1, G_2 — правоупорядоченные группы с изоморфными подгруппами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$ и пусть $\varphi : H_1 \cong H_2$ — изоморфизм. Группа $L := G_1 * G_2$ $(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ правоупорядочиваема тогда и только тогда, когда существуют нормальные семейства правых порядков $\mathcal{R}_1$ на группе G_1 и $\mathcal{R}_2$ на группе G_2 такие, что пара $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ совместима с φ. При этом исходный правый порядок группы G_i $(i = 1, 2)$ продолжается до правого порядка группы L тогда и только тогда, когда он содержится в нормальном семействе $\mathcal{R}_i$ правых порядков этой группы и пара $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ совместима с φ.*

Поскольку сопряжение в *o*-группах сохраняет порядок, мы получаем

Следствие 3. ([11]) *Пусть G_1, G_2 — o-группы с изоморфными подгруппами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$ и пусть изоморфизм $\varphi : H_1 \cong H_2$ сохраняет порядок на подгруппах. Тогда $L := G_1 * G_2$ $(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ правоупорядочиваема и исходные порядки групп G_1, G_2 продолжаются до правого порядка группы L.*

А это приводит к следствию для ℓ-групп (сравни с (п3):

Следствие 4. ([11],) *Пусть G_1, G_2 — o-группы с изоморфными подгруппами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$ и пусть изоморфизм $\varphi : H_1 \cong H_2$ сохраняет порядок на подгруппах. Тогда существует ℓ-группа L и ℓ-вложения $\tau_i : G_i \to L$ $(i = 1, 2)$ такие, что $h_1\tau_1 = h_1\varphi\tau_2$ для всех $h_1 \in H_1$.*

Аналог теоремы 6 справедлив для HNN-расширений.

Теорема 7. ([12]) *Пусть G_1, G_2 — правоупорядоченные группы с изоморфными подгруппами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$ и пусть $\varphi : H_1 \cong H_2$ — изоморфизм. HNN-расширение $K := \langle G, t : h_1^t = h_1\varphi \ (h_1 \in H_1)\rangle$ группы G правоупорядочиваемо в тогда и только тогда, когда существует нормальное семейство $\mathcal{R}$ правых порядков группы G такое, что пара $(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ совместима с φ.*

Используя эти теоремы и их следствия, доказываем аналоги фактов (п4) - (п6), где понятие конечной определимости рассматривается в многообразии групп.

Теорема 8. ([12]) (iv) *Группа Буна–Бриттона* [15] *является правоупорядочиваемой конечно определённой группой с неразрешимой проблемой равенства слов.*

(v) *Конечно порождённая правоупорядочиваемая (правоупорядоченная) группа вкладывается в конечно определённую правоупорядочиваемую (правоупорядоченную) группу тогда и только тогда, когда она рекурсивно определима.*

(vi) *Проблема равенства слов разрешима в конечно порождённой правоупорядочиваемой группе G тогда и только тогда, когда G вкладывается в простую группу вложимую в конечно определённую правоупорядочиваемую группу.*

В доказательстве (v) используется результат (iv) и вариант доказательства теоремы Хигмана о вложении из работы Андреаа [7].

С. Лемьё (см. [23])доказал правую упорядочиваемость группы Новикова (в которой проблема равенства слов разрешима, а проблема сопряжённости нет). Так, что ряд алгоритмических результатов из теории групп перенесён на правоупорядочиваемые группы.

5. Правые порядки против решёточных порядков

Предыдущие параграфы могли составить впечатление, что между решёточно упорядоченными и правоупорядоченными группами нет существенной разницы. Следующая теорема ещё более усиливает это впечатление (сравни также со следствиями 3 и 4).

Теорема 9. ([13]) *Пусть H_1, H_2 — ℓ-подгруппы ℓ-групп G_1, G_2 соответственно. Если $\varphi : H_1 \cong H_2$ — ℓ-изоморфизм, то группа $G_1 * G_2$ $(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ правоупорядочиваема.*

По теореме 1 всякая ℓ-группа ℓ-вкладывается в $A(\Lambda)$, поэтому можно считать, что $G_i = A(\Lambda_i)$ $(i = 1, 2)$. Рассматривая множество всех ультрафильтров на Λ_i и множество всех полных упорядочений этого множества, строим нормальные семейства правых порядков на $A(\Lambda_i)$ $(i = 1, 2)$. Проверяем, что эти семейства совместимы с φ и получаем доказательство теоремы. Реальная конструкция доказательства и её детали менее очевидны, чем ожидалось (см. [13]).

Теперь из теоремы 1 выводим необходимые и достаточные условия правой упорядочиваемости группы $G_1 * G_2\, (\varphi : H_1 \cong H_2)$ в терминах решёточно упорядоченных групп.

Теорема 10. ([13]) *Пусть G_1, G_2 — правоупорядочиваемые группы с изоморфными подгруппами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$ и пусть $\varphi : H_1 \cong H_2$ — изоморфизм. Группа $G_1 * G_2$ $(H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ правоупорядочиваема тогда и только тогда, когда существуют ℓ-группа $\hat{G}_i$, групповое вложение $\varepsilon_i : G_i \to \hat{G}_i$ $(i = 1, 2)$ и ℓ-изоморфизм $\hat{\varphi}$ между ℓ-подгруппами, порождёнными $H_1^{\varepsilon_1}$ и $H_2^{\varepsilon_2}$ такие, что*

$$h_1^{\varphi\varepsilon_2} = h_1^{\varepsilon_1\hat{\varphi}}$$

для всех $h_1 \in H_1$.

Поскольку всякая правоупорядочиваемая группа вкладывается в ℓ-группу, то мы получаем

Следствие 5. ([13]) *Пусть H_1, H_2 — ℓ-подгруппы ℓ-групп G_1, G_2 соответственно. Если $\varphi : H_1 \cong H_2$ — ℓ-изоморфизм, то существуют ℓ-группа L и групповые вложения $\varepsilon_i : G_i \to L$ $(i = 1, 2)$ такие, что $g_1^{\varepsilon_1} = g_1^{\varphi\varepsilon_2}$ для всех $g_1 \in H_1$. При этом L и ε_1, ε_2 можно выбрать так, чтобы подгруппа в L, порождённая $G_1^{\varepsilon_1}$ и $G_2^{\varepsilon_2}$ была изоморфной $G_1 * G_2\,(\varphi : H_1 \cong H_2)$.*

С этого момента начинает проявляться резкий контраст между решёточно упорядоч<u>иваемыми</u> и решёточно упорядоч<u>енными</u> группами. В следствии 5 вложения ε_i не являются ℓ-вложениями и, значит, решёточный порядок ℓ-группы L не обязательно индуцирует на группах G_i их исходный решёточный порядок. Поскольку мы рассматриваем ℓ-группы в многообразии алгебр с групповыми и решёточными операциями, то для амальгам ℓ-групп мы требуем, чтобы вложения $\varepsilon_i : G_i \to L$ были ℓ-вложениями. Такую амальгаму мы называем *ℓ-амальгамой.* При этом мы различаем два варианта амальгам для решёточно упорядочиваемых групп. Любая решёточно упорядочиваемая амальгама L решёточно упорядочиваемых групп G_1 и G_2 называется *g-амальгамой* этих групп G_1 и G_2. Если при этом на группах L, G_1 и G_2 существуют решёточные порядки, при которых L становится ℓ-амальгамой групп G_1 и G_2, то такую g-амальгаму L называем *$\mathcal{L}$-амальгамой.* Поскольку на решёточно упорядоченную группу можно смотреть как на решёточно упорядочиваемую, то понятия g-амальгамы и $\mathcal{L}$-амальгамы применяются и для решёточно упорядоченных групп.

Отметим, что следствие 5 не может быть усилено до ℓ-вложений ε_i, даже если отказаться от требования, чтобы группы $G_1^{\varepsilon_1}$ и $G_2^{\varepsilon_2}$ порождали подгруппу, изоморфную $G_1 * G_2\,(\varphi : H_1 \cong H_2)$. Соответствующий пример ℓ-групп был построен К. Пирсом в работе [25] (см. также [16], теорема 7.С). В примере К. Пирса были построены ℓ-группы G_1 и G_2 с ℓ-изоморфными ℓ-подгруппами, для которых не существовало ℓ-амальгамы, но (как нетрудно заметить) у этих групп существовали $\mathcal{L}$-амальгамы. Другие примеры ℓ-групп, усиливающие пример К. Пирса, построены в работе [13]:

Предложение 1. ([13], пример 5.1) *Существуют решёточно упорядоченные группы G_1, G_2 со спрямляющими ℓ-изоморфными идеалами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$, для которых не существует ℓ-амальгамы.*

Предложение 2. ([13], пример 5.2) ([13], пример 5.2) *Существуют решёточно упорядоченные группы G_1, G_2 с ℓ-изоморфными идеалами $H_1 \leq G_1$, $H_2 \leq G_2$, для которых не существует $\mathcal{L}$-амальгамы.*

Идеал в ℓ-группе G это ядро любого ℓ-гомоморфизма из G в ℓ-группу H, если при этом порядок на H линейный, то идеал называется спрямляющим. То, что в предложении 2 идеалы неспрямляющие существенно, поскольку справедливо

Предложение 3. ([13]) *Пусть G_1, G_i — решёточно упорядоченные группы со спрямляющими идеалами $H_1 \le G_1$, $H_2 \le G_2$ и пусть $\varphi : H_1 \to H_2$ — ℓ-изоморфизм, тогда $L = G_1 {*} G_2\, (H_1 \overset{\varphi}{\cong} H_2)$ решёточно упорядочиваемая $\mathcal{L}$-амальгама групп G_1, G_2 с объединёнными подгруппами H_1, H_2.*

Таким образом, для групп из предложения 1 всегда существуют $\mathcal{L}$-амальгамы. Ввиду этого, в примере 5.2 из работы [13] один из объединямых идеалов неспрямляющий (а второй идеал спрямляющий). В доказательстве предложения 2 используется соотношение (2.2).

В заключение параграфа приведем ещё один результат, усиливающий контраст между классами правоупорядочиваемых групп и решёточно упорядочиваемых групп. Этот результат даёт отрицательный ответ на вопрос 1.42 из обзора [5] и был получен после анализа примеров групп имеющих $\mathcal{L}$-амальгамы, но не имеющих ℓ-амальгам.

Предложение 4. ([13], пример 6.1) *Существует частично упорядоченная группа, частичный порядок которой является пересечением её правых порядков и которая не допускает порядкового вложения ни в какую решёточно упорядоченную группу с сохранением существующих точных верхних и точных нижних граней.*

6. Заключение

Алгоритмически, класс конечно определённых правоупорядочиваемых групп не менее богат, чем класс всех конечно определённых групп. То же самое наблюдается и в классе решёточно упорядочиваемых групп. Тем не менее, существует разительный контраст между этими двумя классами.

Нам мало что известно о классе конечно определённых линейно упорядочиваемых групп с алгоритмической точки зрения, также мы не имеем никаких аналогов теорем 6 и 7 для линейно упорядочиваемых групп. Исследования в этой области ставят перед нами новые задачи. Так, например, нам неизвестно

Существуют ли конечно определённые линейно упорядочиваемые группы с неразрешимой проблемой равенства слов?

Список литературы

1. Блудов В. В. О свободном произведении правоупорядоченных групп с объединённой подгруппой / В. В. Блудов // Проблемы современной математики, Т. II : сб. тр. — Новосибирск : НИИ МИОО НГУ, 1966. — С. 30–35.
2. Виноградов А. А. О свободном произведении упорядоченных групп / А. А. Виноградов // Мат. Сб. — 1949. — Т. 25. — С. 163–168.
3. Кокорин А. И. Линейно упорядоченные группы / А. И. Кокорин, В. М. Копытов — М. : Наука, 1972. — 200 с.
4. Копытов В. М. Правоупорядоченные группы / В. М. Копытов, Н. Я. Медведев — Новосибирск : Научная книга, 1996. — 256 с.
5. Копытов В. М. Упорядоченные группы / В. М. Копытов, Н. Я. Медведев // Избранные вопросы алгебры. Сборник научных трудов памяти Н. Я. Медведева — Барнаул : Алтайский гос. университет, 2007. — С. 15–112.
6. Линдон Р. Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп — М. : Мир, 1980. — 448 с.
7. Aanderaa S. A proof of Higman's Embedding Theorem using Britton extensions of groups / S. Aanderaa // Word Problems, Decision Problems, and the Burnside Problem (ed. W. W. Boone *et al*) — Amsterdam : North Holland, 1973. — P. 1–18.
8. Bergman G. M. Ordering coproducts of groups and semigroups / G. M. Bergman // J. Algebra — 1990. V. 133. — P. 313–339.
9. Bludov V.V. Automorphism groups of models of first order theories / V.V. Bludov, M. Giraudet, A. M. W. Glass and G. Sabbagh // Models, Modules and Abelian groups: In Memory of A. L. S. Corner (ed. R. Göbel and B. Goldsmith) — Berlin : W. de Gruyter, 2008. — P. 329–332.
10. V. V. Bludov V. V. Conjugacy in lattice-ordered and right orderable groups / V. V. Bludov and A. M. W. Glass // J. group Theory — 2008. V. 11. — P. 623–633.
11. Bludov V. V. Free products of right ordered groups with amalgamated subgroups / V. V. Bludov V. V. and A. M. W. Glass // Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc. — 2009. V. 146. — P. 591–601.
12. Bludov V. V. Word problems, embeddings, and free products of right-ordered groups with amalgamated subgroup / V. V. Bludov and A. M. W. Glass // Proc. London Math. Soc. — 2009. doi: 10.1112/plms/pdp008. — P. 1–24.
13. Bludov V. V. Right orders and amalgamation for lattice-ordered groups / V. V. Bludov and A. M. W. Glass // Math. Slovakia (to appear).
14. Boone W. W. An algebraic characterization of the solvability of the word problem / W. W. Boone and G. Higman // J. Australian Math. Soc. — 1974. V. 18 — P. 41–53.
15. Britton J. L. The word problem / J. L. Britton // Annals of Math. — 1963. V. 77. — P. 16–32.
16. Glass A. M. W. Partially Ordered groups / A. M. W. Glass — Singapore : World Scientific Pub. Co. : Series in Algebra, 1999. V. 7. — 308 p.
17. Glass A. M. W. Sublattice subgroups of finitely presented lattice-ordered groups / A. M. W. Glass // J. Algebra — 2006. V. 301. — P. 509–530.
18. Glass A. M. W. Finitely generated lattice-ordered groups with soluble word problem / A. M. W. Glass // J. group Theory — 2008. V. 11. — P. 1–21.
19. Glass A. M. W. The word problem for lattice-ordered groups / A. M. W. Glass and Y. Gurevich // Trans. American Math. Soc. — 1983. V. 280. — P. 127–138.
20. G. Higman G. Subgroups of finitely presented groups / G. Higman // Proc. Royal Soc. London : Ser. A — 1961. V. 262. — P. 455–475.
21. Holland W. C. The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set / W. C. Holland // Michigan Math. J. — 1963. V. 10. — P. 399–408.

22. Holland W. C. Free products of lattice-ordered groups / W. C. Holland and E. Scrimger // Algebra Universalis — 1972. V. 2. — P. 247–254.
23. Lemieux S. Conjugacy Problem: Open Questions and an Application / S. Lemieux // Ph.D. Thesis. — Edmonton : University of Alberta — 2004.
24. Linnell P. A. Left ordered groups with no non-abelian free subgroups / P. A. Linnell // J. group Theory — 2001. V. 4. — P. 153–168.
25. Pierce K. R. Amalgamations of lattice-ordered groups / K. R. Pierce // Trans. American Math. Soc. — 1972. V. 172. — P. 249–260.

V. V. Bludov, A. M. W. Glass

Groups and orderings: word problems, embeddings and amalgams (a survey of recent results).

Abstract. This paper contains the review of the results obtained by the authors in the last years in the theory of lattice-ordered and right-ordered groups.

Keywords: lattice-ordered group, amalgamation, free product with amalgamated subgroup, HNN-extension, right-orderable group, soluble word problem, recursively enumerable set.

Блудов Василий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Факультет математики, физики и информатики, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, Нижняя набережная, 6, тел.: (3952)243345 и

Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242226
(vasily-bludov@yandex.ru)

Гласс Эндрю Мартин Уильям, доктор философии, профессор, Куинз Колледж, Кембридж, CB3 9ET, Великобритания и

Отдел чистой математики и математической статистики. Центр математических исследований Кембриджского университета. Уилберфорс роад, Кембридж, CB3 0WB, Великобритания.
(amwg@dpmms.cam.ac.uk)

Bludov Vasily, Department of Mathematics, Physics, and Informatics, East Siberian State Academy of Education, 6, Nizhnyaya naberezhnaya, Irkutsk, 664011 and

Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003
professor, Phone: (3952)243345 (vasily-bludov@yandex.ru)

Glass Andrew Martin Wiliam Queens' College, Cambridge CB3 9ET, England and

Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, Centre for Mathematical Sciences of Cambridge University, Wilberforce Rd., Cambridge CB3 0WB, England

Phd, professor, (amwg@dpmms.cam.ac.uk)