Серия «Математика»
2009. Т. 2, № 2, С. 158—169

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 510.67

Несущественные совмещения малых теорий *

С. В. Судоплатов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Исследуются характеристики числа попарно неизоморфных счетных моделей несущественных совмещений малых теорий. Приводятся оценки этих характеристик для согласованных несущественных совмещений, а также их точные значения при интерпретациях в виде дизъюнктных объединений. Описываются характеристические представления эренфойхтовых теорий, близких к о-минимальным.

Ключевые слова: малая теория, несущественное совмещение, предпорядок Рудина — Кейслера, предельная модель.

В книге [3] определено и изучено понятие несущественного совмещения теорий, а также различных его модификаций. Операции несущественных совмещений теорий использовались автором [3] для построения эренфойхтовых теорий (т.е. полных теорий с конечным, но большим единицы числом попарно неизоморфных счетных моделей) со всевозможными *основными характеристиками* (предпорядками Рудина — Кейслера и функциями распределения числа предельных моделей), а также для решения известной проблемы Лахлана о существовании стабильных эренфойхтовых теорий.

Целью настоящей работы является исследование взаимосвязи указанных основных характеристик для данных теорий и их несущественных совмещений.

В работе без пояснений используется терминология из книг [1]–[3]. Все рассматриваемые теории считаются полными, счетными, малыми и не имеющими конечных моделей.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а, а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-344.2008.1.

1. Несущественные совмещения счетно категоричных теорий

Напомним ([3], теорема 1.2.8), что свойства стабильности и малости теорий сохраняются при переходе к несущественным совмещениям. Таким же образом сохраняется и счетная категоричность теорий.

Действительно, пусть $f_1, f_2 \in \omega^\omega$ — функции Рыль-Нардзевского теорий T_1 и T_2 соответственно. Тогда для теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$, являющейся несущественным совмещением теорий T_1 и T_2, и любого натурального числа n число n-типов ограничивается сверху значением $f_1(n) \cdot f_2(n)$, поскольку каждый n-тип теории T_1 расширяется не более чем до $f_2(n)$ теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$. Таким образом, для функции Рыль-Нардзевского f теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ имеет место неравенство $f(n) \le f_1(n) \cdot f_2(n)$.

Нижняя оценка числа n-типов теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ равна максимальному из значений $f_1(n)$, $f_2(n)$.

Заметим, что верхние оценки $f_1(n) \cdot f_2(n)$ неулучшаемы лишь при $n = 1$: для любых $k, m_1, m_2 \in \omega \setminus \{0\}$ с условиями $\max\{m_1, m_2\} \le k \le m_1 \cdot m_2$ существуют теории T_1 и T_2 одноместных предикатов, для которых $f_1(1) = m_1$, $f_2(2) = m_2$ и $|S^1(\mathrm{IEC}(T_1, T_2))| = k$. Нижние оценки $\max\{f_1(n), f_2(n)\}$ неулучшаемы при любом n (счетно категоричные несущественные совмещения, утончающие множества типов одной из теорий имеют именно такое число n-типов), а точные верхние оценки представляются некоторой функцией $F_{f_1,f_2}(n)$, задаваемой рекуррентной формулой, в которой суммируется произведение числа n-типов $t(x_1, \ldots, x_n)$ теорий T_1 и T_2, реализуемых кортежами лишь с попарно различными координатами, с точной верхней оценкой числа $(n-1)$-типов $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}})$ теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$, координаты реализаций которых образуют реализации n-типов $t(x_1, \ldots, x_n)$.

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. *Несущественное совмещение* $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ *теорий* T_1 *и* T_2 *счетно категорично тогда и только тогда, когда счетно категоричны теории* T_1 *и* T_2. *Для функции Рыль-Нардзевского* f *теории* $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ *имеет место неравенство*

$$\max\{f_1(n), f_2(n)\} \le f(n) \le F_{f_1,f_2}(n),$$

где f_1 *и* f_2 *— функции Рыль-Нардзевского теорий* T_1 *и* T_2 *соответственно.*

Отметим, что приведенные рассуждения верны и для почти несущественного совмещения $\mathrm{AIEC}(T_1, T_2)$ теорий T_1 и T_2. При этом в формулировке предложения 1 меняется точная верхняя оценка $F_{f_1,f_2}(n)$, которая определяется не только произведениями $f_1(k) \cdot f_2(k)$, но и всевозможными вариантами проекций $\exists x_{i_1} \ldots \exists x_{i_k} \, (\varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x}))$ для главных формул $\varphi_1(\bar{x})$ и $\varphi_2(\bar{x})$ теорий T_1 и T_2 соответственно, задающих главные типы теории $\mathrm{AIEC}(T_1, T_2)$.

2. Несущественные совмещения теорий и предпорядки Рудина — Кейслера

Рассмотрим теперь взаимосвязь предпорядков Рудина — Кейслера в $\mathrm{RK}(T_1)$, $\mathrm{RK}(T_2)$ и в $\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1, T_2))$.

Напомним, что подчинение типа $p_i(\bar{x})$ теории T_i типу $p'_i(\bar{y})$ той же теории (пишется $p_i(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_i(\bar{y})$), $i = 1, 2$, задается наличием формулы $\varphi_i(\bar{x}, \bar{y})$, для которой совместно множество $p'_i(\bar{y}) \cup \{\varphi_i(\bar{x}, \bar{y})\}$ и справедливо

$$p'_i(\bar{y}) \cup \{\varphi_i(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash p_i(\bar{x}).$$

Тогда подчинение типа $p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{x})$ теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ типу $p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y})$ той же теории равносильно наличию формул $\varphi_1(\bar{x}, \bar{y})$ и $\varphi_2(\bar{x}, \bar{y})$ теорий T_1 и T_2 соответственно, для которых совместно множество

$$p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y}) \cup \{\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \varphi_2(\bar{x}, \bar{y})\} \tag{2.1}$$

и справедливо

$$p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y}) \cup \{\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \varphi_2(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{x}).$$

Нетрудно заметить, что условия $p_1(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_1(\bar{y})$ и $p_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_2(\bar{y})$ не могут гарантировать $p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y})$, поскольку совместность множеств $p'_1(\bar{y}) \cup \{\varphi_1(\bar{x}, \bar{y})\}$ и $p'_2(\bar{y}) \cup \{\varphi_2(\bar{x}, \bar{y})\}$ не влечет совместность множества 2.1. Тем самым, отношение $\leq_{\mathrm{RK}}$ не наследуется при переходе от теорий T_1 и T_2 к теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$.

Например, конечные системы $\mathrm{RK}(T_1)$, $\mathrm{RK}(T_2)$ могут соответствовать бесконечному предупорядоченному множеству $\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1, T_2))$. В частности, генерические конструкции (см. [3], параграфы 3.4 и 3.5) позволяют строить неэренфойхтовы несущественные совмещения эренфойхтовых теорий.

Теория $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ называется RK-*согласованным* совмещением теорий T_1 и T_2, если любые подчинения типов $p_i(\bar{x})$ теории T_i типам $p'_i(\bar{y})$ теории T_i, $i = 1, 2$, задается задаются некоторыми формулами $\varphi_i(\bar{x}, \bar{y})$, для которых совместно множество 2.1.

Заметим, что RK-согласованные совмещения $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ наследуют отношения $\leq_{\mathrm{RK}}$:

Предложение 2. *Если* $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ — RK-*согласованное совмещение теорий* T_1, T_2, $p_1(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_1(\bar{y})$ *в теории* T_1 *и* $p_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_2(\bar{y})$ *в теории* T_2, *то* $p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y})$ *в теории* $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$.

Вместе с тем RK-согласованность совмещения $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ не гарантирует сохранения изоморфизма простых моделей над реализациями типов при переходе от теорий T_1 и T_2 к теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$.

Действительно, в силу предложения 1.1.3 из [3] наличие изоморфизма простых моделей $\mathcal{M}_{p_1}$ и $\mathcal{M}_{p'_1}$ теории T_1 равносильно существованию (p_1, p'_1)-главной формулы $\varphi_{p_1,p'_1}(\bar{y}, \bar{x})$ и (p'_1, p_1)-главной формулы $\varphi_{p'_1,p_1}(\bar{x}, \bar{y})$ таких, что совместно множество

$$p_1(\bar{x}) \cup p'_1(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p_1,p'_1}(\bar{y}, \bar{x}) \wedge \varphi_{p'_1,p_1}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

Однако условия $p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y})$ и $p'_1(\bar{x}) \cup p'_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p_1(\bar{y}) \cup p_2(\bar{y})$, выполняющиеся в $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ для типов $p_2(\bar{x}), p'_2(\bar{y})$ теории T_2, где $p_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'_2(\bar{y})$ и $p'_2(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p_2(\bar{y})$, не влекут наличие изоморфизма простых моделей $\mathcal{M}_{p_1 \cup p_2}$ и $\mathcal{M}_{p'_1 \cup p'_2}$.

Следовательно, при ограничении числа $\sim_{\mathrm{RK}}$-классов теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ произведением числа $\sim_{\mathrm{RK}}$-классов теории T_1 и числа $\sim_{\mathrm{RK}}$-классов теории T_2 мощности самих $\sim_{\mathrm{RK}}$-классов теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ не ограничиваются характеристиками из $\mathrm{RK}(T_1)$ и $\mathrm{RK}(T_2)$. В частности, как и в общем случае конечным системам $\mathrm{RK}(T_1)$ и $\mathrm{RK}(T_2)$ могут соответствовать бесконечные системы $\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1, T_2))$ (примеры строятся применением генерической конструкции из [3], § 3.4, в которой цепи цветных дуг орграфов соответствуют цепям одноцветных дуг).

Теория $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ называется RK-*взаимосогласованным* совмещением теорий T_1 и T_2, если $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ RK-согласованно и для любых типов $p_1(\bar{x}), p'_1(\bar{y})$ теории T_1 и любых типов $p_2(\bar{x}), p'_2(\bar{y})$ теории T_2 из условий $\mathcal{M}_{p_1} \simeq \mathcal{M}_{p'_1}$, $\mathcal{M}_{p_2} \simeq \mathcal{M}_{p'_2}$ и совместности множеств $p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{x}), p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y})$ следует, что существование (p_1, p'_1)-главной формулы $\varphi_{p_1,p'_1}(\bar{y}, \bar{x})$, (p'_1, p_1)-главной формулы $\varphi_{p'_1,p_1}(\bar{x}, \bar{y})$, (p_2, p'_2)-главной формулы $\varphi_{p_2,p'_2}(\bar{y}, \bar{x})$ и (p'_2, p_2)-главной формулы $\varphi_{p'_2,p_2}(\bar{x}, \bar{y})$, для которых совместно множество

$$p_1(\bar{x}) \cup p_2(\bar{x}) \cup p'_1(\bar{y}) \cup p'_2(\bar{y}) \cup$$

$$\cup \{\varphi_{p_1,p'_1}(\bar{y}, \bar{x}) \wedge \varphi_{p'_1,p_1}(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \varphi_{p_2,p'_2}(\bar{y}, \bar{x}) \wedge \varphi_{p'_2,p_2}(\bar{x}, \bar{y})\}.$$

При этом в силу предложения 1.1.3 из [3] модели $\mathcal{M}_{p_1 \cup p'_1}$ и $\mathcal{M}_{p_2 \cup p'_2}$ теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ оказываются изоморфными.

По определению RK-взаимосогласованность совмещения $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$ теорий T_1 и T_2 влечет соотношение

$$|\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1, T_2))| \leq |\mathrm{RK}(T_1)| \cdot |\mathrm{RK}(T_2)|.$$

При этом верхняя оценка $|\mathrm{RK}(T_1)| \cdot |\mathrm{RK}(T_2)|$ неулучшаема. Построения, аналогичные конструкции из [3], § 3.4, позволяют для любых значений $m_1, m_2 \in \omega \setminus \{0\}$ находить генерические теории T_1 и T_2, для которых $|\mathrm{RK}(T_1)| = m_1$, $|\mathrm{RK}(T_2)| = m_2$ и $|\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1, T_2))| = m_1 \cdot m_2$.

Неулучшаемая нижняя оценка для мощности $|\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1,T_2))|$ не ω-категоричной теории $\mathrm{IEC}(T_1,T_2)$ равна константе 2. Это связано с тем, что при несущественных совмещениях конъюнкции формул сигнатур $\Sigma(T_1)$ и $\Sigma(T_2)$ могут обеспечивать независимое выполнение условий $p_1\cup p_1' \leq_{\mathrm{RK}} p_2\cup p_2'$ и $p_2\cup p_2' \leq_{\mathrm{RK}} p_1\cup p_1'$ вплоть до того, что после совмещения все неглавные типы теории $\mathrm{IEC}(T_1,T_2)$ становятся властными. Построение соответствующих примеров снова опираются на конструкцию из [3], § 3.4. Таким образом, справедливо

Предложение 3. 1. *Если* $\mathrm{IEC}(T_1,T_2)$ — RK-*согласованное, не* ω-*категоричное совмещение теорий* T_1 *и* T_2, *то*

$$2 \leq |\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1,T_2))/\sim_{\mathrm{RK}}| \leq |\mathrm{RK}(T_1)/\sim_{\mathrm{RK}}| \cdot |\mathrm{RK}(T_2)/\sim_{\mathrm{RK}}|.$$

2. *Если* $\mathrm{IEC}(T_1,T_2)$ — RK-*взаимосогласованное не* ω-*категоричное совмещение теорий* T_1 *и* T_2, *то*

$$2 \leq |\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1,T_2))| \leq |\mathrm{RK}(T_1)| \cdot |\mathrm{RK}(T_2)|.$$

В силу предложения 3 RK-взаимосогласованные совмещения теорий сохраняют свойство p-эренфойхтовости.

На основе конструкции из [3], § 3.4 генерические несущественные совмещения $\mathrm{IEC}(T,T')$ позволяют посредством конъюнкций формул сигнатур $\Sigma(T)$ и $\Sigma(T')$ сужать произвольные заданные неодноэлементные предпорядки Рудина — Кейслера до произвольных неодноэлементных частей, являющихся снова предпорядками Рудина — Кейслера, а затем расширять эти неодноэлементные части до произвольного допустимого предпорядка Рудина — Кейслера:

Теорема 1. *Для любых предупорядоченных множеств* $\langle X_i,\leq_i\rangle$, *изоморфных предупорядоченным множествам* $\mathrm{RK}(T_i)$ *некоторых не* ω-*категоричных малых теорий* T_i, $i=1,2,3$, *где* $\langle X_2,\leq_2\rangle$ — *часть* $\langle X_1,\leq_1\rangle$, $\langle X_2,\leq_2\rangle \subseteq \langle X_3,\leq_3\rangle$, *существуют малые теории* T_1', T_2', T_3', *для которых* $\mathrm{RK}(T_1') \simeq \langle X_1,\leq_1\rangle$, $\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T_1',T_2')) \simeq \langle X_2,\leq_2\rangle$ *и*

$$\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(\mathrm{IEC}(T_1',T_2'),T_3')) \simeq \langle X_3,\leq_3\rangle.$$

Пользуясь конструкцией из [3], § 4.9, устанавливается аналог теоремы 1 в классе стабильных теорий с заменой несущественных совмещений на почти несущественные совмещения теорий.

3. Несущественные совмещения теорий и предельные модели

В этом параграфе мы рассмотрим влияние операции $\mathrm{IEC}(T_1,T_2)$ на структуру и число предельных моделей. Как замечено в предыдущем параграфе, несущественные совмещения малых теорий могут, вообще говоря, произвольно преобразовывать неодноэлементные предпорядки Рудина — Кейслера. Тем самым, и число предельных моделей может меняться достаточно произвольно. Например, l-категоричным или l-эренфойхтовым теориям T_1 и T_2 может соответствовать бесконечное и даже континуальное число предельных моделей теории $\mathrm{IEC}(T_1, T_2)$.

Более точно, на основе построений из [3] (параграфы 3.4 и 3.5), а также замечаний предыдущего параграфа (согласно которым при переходе к несущественным совмещениям теорий главные дуги и ребра могут как разрушаться, так и возникать новые) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых предупорядоченных множеств $\langle X_i, \leq_i \rangle$, изоморфных предупорядоченным множествам $\mathrm{RK}(T_i)$ некоторых не ω-категоричных малых теорий T_i, $i = 1, 2$, а также для функций f_i распределения числа предельных моделей теорий T_i, удовлетворяющих условиям $\mathrm{rang}\, f_i \subset \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, $i = 1, 2$, существуют малые теории T'_1, T'_2, для которых выполняются следующие условия:*

а) $\mathrm{RK}(T'_1) \simeq \langle X_1, \leq_1 \rangle$;

б) $\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T'_1, T'_2)) \simeq \langle X_2, \leq_2 \rangle$;

в) *функция f_1 соответствует (т. е. принимает те же значения при переходе по изоморфизму от $\mathrm{RK}(T_1)$ к $\mathrm{RK}(T'_1)$) функции распределения числа предельных моделей теории T'_1;*

г) *функция f_2 соответствует (т. е. принимает те же значения при переходе по изоморфизму от $\mathrm{RK}(T_2)$ к $\mathrm{RK}(\mathrm{IEC}(T'_1, T'_2))$) функции распределения числа предельных моделей теории $\mathrm{IEC}(T'_1, T'_2)$.*

Генерические построения, обосновывающие теорему 2, позволяют утверждать, что даже при переходе к RK-взаимосогласованным совмещениям теорий функции распределения числа предельных моделей могут меняться достаточно произвольно. Контролировать число предельных моделей над последовательностью типов $\mathbf{q}$ можно лишь заданием ограничений на число попарно неэквивалентных элементарных цепей простых моделей над $\mathbf{q}$, которое может определяться как неэквивалентными цепями простых моделей теорий, составляющих несущественное совмещение, так и цепями, образующимися после несущественного совмещения теорий.

4. Дизъюнктные объединения теорий

Напомним [9], что *дизъюнктным объединением* $\mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2$ непересекающихся моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ непересекающихся предикатных сигнатур Σ_1 и Σ_2 соответственно называется модель сигнатуры $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \{P_1^{(1)}, P_2^{(1)}\}$ с носителем $M_1 \sqcup M_2$, $P_1 = M_1$, $P_2 = M_2$, и интерпретациями предикатных символов из $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, совпадающими с их интерпретациями в моделях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. *Дизъюнктным объединением теорий* T_1 и T_2 непересекающихся предикатных сигнатур Σ_1 и Σ_2 соответственно называется теория $T_1 \sqcup T_2 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2)$, где $\mathcal{M}_1 \models T_1$ и $\mathcal{M}_2 \models T_2$.

Очевидно, что теория $T_1 \sqcup T_2$ не зависит от выбора моделей $\mathcal{M}_1 \models T_1$ и $\mathcal{M}_2 \models T_2$. Кроме того, теория $T_1 \sqcup T_2$ может быть проинтерпретирована в виде несущественного совмещения теорий моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, расширенных одноместными предикатами P_1 и P_2 соответственно, где множество реализаций предиката P_i совпадает после совмещения расширений $\mathcal{M}'_1$ и $\mathcal{M}'_2$ моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ с носителем модели $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2$.

Проинтерпретированное таким образом несущественное совмещение малых теорий RK-взаимосогласовано, мощность системы $\mathrm{RK}(T_1 \sqcup T_2)$ совпадает с произведением мощностей систем $\mathrm{RK}(T_1)$ и $\mathrm{RK}(T_2)$, а отношение $\leq_{\mathrm{RK}}$ на $\mathrm{RK}(T_1 \sqcup T_2)$ — с отношением Парето [1], определенным предпорядками из $\mathrm{RK}(T_1)$ и $\mathrm{RK}(T_2)$. Действительно, каждый тип $p(\bar{x})$ теории $\mathrm{RK}(T_1 \sqcup T_2)$ изолируется множеством, состоящим из некоторых типов $p_1(\bar{x}^1)$ и $p_2(\bar{x}^2)$ теорий T_1 и T_2 соответственно, а также из формул $P^1(x^1_i)$ и $P^2(x^2_j)$ по всем координатам кортежей $\bar{x}^1$ и $\bar{x}^2$. Для типов $p(\bar{x})$ и $p'(\bar{y})$ теории $\mathrm{RK}(T_1 \sqcup T_2)$ условие $p(\bar{x}) \leq_{\mathrm{RK}} p'(\bar{y})$ равносильно условиям $p_1(\bar{x}^1) \leq_{\mathrm{RK}} p'_1(\bar{y}^1)$ (в теории T_1) и $p_2(\bar{x}^2) \leq_{\mathrm{RK}} p'_2(\bar{y}^2)$ (в теории T_2).

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 4. *Для любых малых теорий T_1 и T_2 непересекающихся предикатных сигнатур Σ_1 и Σ_2 соответственно теория $T_1 \sqcup T_2$ RK-взаимосогласована относительно своих обеднений на Σ_1 и Σ_2. Мощность системы $\mathrm{RK}(T_1 \sqcup T_2)$ совпадает с произведением мощностей систем $\mathrm{RK}(T_1)$ и $\mathrm{RK}(T_2)$, а отношение $\leq_{\mathrm{RK}}$ на $\mathrm{RK}(T_1 \sqcup T_2)$ — с отношением Парето, определенным предпорядками из $\mathrm{RK}(T_1)$ и $\mathrm{RK}(T_2)$.*

Изоморфизм предельных моделей теории $T_1 \sqcup T_2$ определяется изоморфизмами ограничений этих моделей на множества P_1 и P_2. При этом предельность модели равносильна предельности хотя бы одного из этих ограничений и справедливо равенство

$$I(T_1 \sqcup T_2, \omega) = I(T_1, \omega) \cdot I(T_2, \omega). \tag{4.1}$$

Тем самым, операция $\sqcup$ сохраняет не только свойство p-эренфойхтовости, но и l-эренфойхтовости (при условии p-эренфойхтовости составляющих), и при этом в силу равенства 4.1 справедливо равенство

$$I_l(T_1 \sqcup T_2) = I_l(T_1) \cdot I_p(T_2, \omega) + I_p(T_1, \omega) \cdot I_l(T_2) + I_l(T_1) \cdot I_l(T_2). \tag{4.2}$$

Из равенства 4.2 вытекает, что теория $T_1 \sqcup T_2$ l-категорична тогда и только тогда, когда одна из теорий T_1, T_2 l-категорична, а другая ω-категорична.

При определении дизъюнктных объединений моделей в общем случае допускается частичное пересечение и даже совпадение сигнатур исходных моделей. В частности, при элементарной эквивалентности моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ их дизъюнктное объединение $\mathcal{M}_1 \sqcup' \mathcal{M}_2$ является моделью теории той же сигнатуры, что и теории $T \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$.

Обозначим теорию $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_1 \sqcup' \mathcal{M}_2)$ (где $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$) через T' и найдем значения $I_p(T', \omega)$, $I_l(T')$, предполагая, что T — эренфойхтова теория с p простыми над кортежами моделями и l предельными моделями. Обозначим через n число $p+l$ попарно неизоморфных счетных моделей теории T. Тогда складывая варианты для изоморфных и неизоморфных моделей $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, получаем

$$I(T', \omega) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Аналогично

$$I_p(T', \omega) = p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$I_l(T') = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{p(p+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{(n-l)^2}{2} - \frac{n-l}{2} =$$
$$= l \cdot n - \frac{l^2}{2} + \frac{l}{2} = l \cdot n - \frac{l(l-1)}{2}.$$

5. Об эренфойхтовых теориях на плотных порядках

Напомним [7], что линейно упорядоченная структура $\mathcal{M}$ называется *о-минимальной*, если каждое формульно определимое подмножество M есть конечное объединение одноэлементных множеств и открытых интервалов (a, b), где $a \in M \cup \{-\infty\}$, $b \in M \cup \{+\infty\}$. Теория T называется *о-минимальной*, если о-минимальна каждая модель теории T.

Примерами эренфойхтовых о-минимальных теорий являются теории $T^1 \rightleftharpoons \mathrm{Th}((\mathbb{Q}; <, c_n)_{n\in\omega}$ и $T^2 \rightleftharpoons \mathrm{Th}((\mathbb{Q}; <, c_n, c'_n)_{n\in\omega}$, где $<$ — обычное отношение строгого порядка на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$, константы c_n образуют строго возрастающую последовательность, а константы c'_n — строго убывающую последовательность, $c_n < c'_n$, $n \in \omega$.

Теория T^1 является примером Эренфойхта и $I(T^1, \omega) = 3$, а теория T^2 имеет шесть попарно неизоморфных счетных моделей:

— простую модель с пустым множеством реализаций типа $p(x)$, изолируемого множеством формул $\{c_n < x \mid n \in \omega\} \cup \{x < c'_n \mid n \in \omega\}$;

— простую модель над реализацией типа $p(x)$ с единственной реализацией этого типа;

— простую модель над реализацией типа $q(x, y)$, изолируемого множеством формул $p(x) \cup p(y) \cup \{x < y\}$; при этом множество реализаций типа $q(x, y)$ образует замкнутый интервал $[a, b]$;

— три предельные модели над типом $q(x, y)$, в которых множества реализаций $q(x, y)$ соответственно образуют интервалы вида $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b).

На рис. 1, *а* и *б* представлены диаграммы Хассе предпорядков Рудина — Кейслера $\leq_{RK}$ и значений функций IL распределения числа предельных моделей на классах $\sim_{RK}$-эквивалентности для теорий T^1 и T^2.

а *б*

Рис. 1

Будем говорить, что малые теории T_1 и T_2 *характеристически эквивалентны* и писать $T_1 \sim_{\mathrm{ch}} T_2$, если система $\mathrm{RK}(T_1)$ изоморфна системе $\mathrm{RK}(T_2)$ и соответствующей заменой типов изоморфизма из $\mathrm{RK}(T_1)$ на типы изоморфизма из $\mathrm{RK}(T_2)$ функция распределения числа предельных моделей теории T_1 преобразуется в функцию распределения числа предельных моделей теории T_2.

Л. Майер в работе [6] доказала следующую теорему.

Теорема 3. *Любая о-минимальная эренфойхтова теория T имеет плотный линейный порядок, характеристически эквивалентна некоторому конечному числу дизъюнктных объединений теорий вида T^1 и T^2 ($T \sim_{\mathrm{ch}} \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} T_i^1 \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} T_j^2$, где теории T_i^1 подобны T^1, а теории T_j^2 подобны T^2) и имеет $3^k \cdot 6^l$ попарно неизоморфных счетных моделей.*

В силу теоремы 3 имеется структурное описание моделей эренфойхтовых теорий, образующихся при константных обогащениях плотно линейно упорядоченных множеств.

В силу определимости плотных линейных порядков на плотных циклически упорядоченных множествах [4], [5] условие о-минимальности для этих множеств влечет такое же структурное описание моделей эренфойхтовых теорий.

Как известно [8], теории с тремя счетными моделями, в которых определимые замыкания пустых множеств бесконечны, имеют структуру плотного линейного порядка или бесконечного плотного ветвящегося дерева $\mathcal{T}$, образующего нижнюю полурешетку. Константные обогащения структуры $\mathcal{T}$ расширяют возможности характеристических представлений эренфойхтовых теорий, имеющихся для о-минимальных эренфойхтовых теорий.

Например, при наличии трех последовательностей констант $(c_n)_{n\in\omega}$, $(c'_n)_{n\in\omega}$, $(c''_n)_{n\in\omega}$, первая из которых строго возрастает, а две другие строго убывают по отношению $<$ на дереве $\mathcal{T}$, $c_n < c'_n$, $c_n < c''_n$, $n \in \omega$, c'_i и c''_j несравнимы, $i, j \in \omega$ возникают следующие модели:

— простая модель с пустым множеством реализаций типа $p(x)$, изолируемого множеством формул $\{c_n < x \mid n \in \omega\} \cup \{x < c'_n \mid n \in \omega\} \cup \{x < c''_n \mid n \in \omega\}$;

— простая модель над реализацией типа $p(x)$ с единственной реализацией этого типа;

— простая модель над реализацией типа $q(x, y)$, изолируемого множеством формул $p(x) \cup p(y) \cup \{x < y\} \cup \{c_n < x \wedge y < c'_n \wedge y < c''_n \mid n \in \omega\}$; при этом множество реализаций типа $q(x, y)$ образует замкнутый интервал $[a, b]$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} c'_n = \lim\limits_{n\to\infty} c''_n$;

— три предельные модели над типом $q(x, y)$, в которых множества реализаций $q(x, y)$ соответственно образуют интервалы вида $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b);

— простая модель над реализацией типа $r_1(x, y, z)$, изолируемого множеством формул $p(x) \cup p(y) \cup \{x < y, y < z\} \cup \{c_n < x \wedge y < c'_n \wedge z < c''_n \wedge \neg z \leq c'_n \wedge \neg c'_n \leq z \mid n \in \omega\}$; при этом множество реализаций типа $r_1(x, y, z)$ образует замкнутый интервал $[a, b]$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} c''_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c'_n \in (a, b)$;

— семь предельных моделей над типом $r_1(x, y, z)$, в которых множества реализаций $r_1(x, y, z)$ удовлетворяют одному из следующих условий:

а) образуют интервал вида $(a, b]$, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} c''_n$ существует и принадлежит (a, b) или не существует,

б) образуют интервал вида $[a, b)$, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} c''_n$ существует и принадлежит (a, b) или не существует,

в) образуют интервал вида (a, b), а предел $\lim\limits_{n\to\infty} c''_n$ существует и принадлежит (a, b) или не существует,

г) образуют интервал вида $[a, b]$, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} c''_n$ не существует;

— простая модель над реализацией типа $r_2(x, y, z)$, изолируемого множеством формул $p(x) \cup p(y) \cup \{x < z, z < y\} \cup \{c_n < x \wedge y < c'_n \wedge z < c''_n \wedge \neg y \leq c''_n \wedge \neg c''_n \leq y \mid n \in \omega\}$; при этом множество реализаций типа $r_2(x, y, z)$ образует замкнутый интервал $[a, b]$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} c'_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c''_n \in (a, b)$;

— семь предельных моделей над типом $r_2(x,y,z)$, аналогичных предельным моделям над r_1 и получающихся транспозициями констант c'_n и c''_n, $n \in \omega$;

— простая модель над реализацией типа $r_3(x,y,z)$, изолируемого множеством формул $p(x) \cup p(y) \cup \{x < y, x < z, \neg(y \le z), \neg(z \le y), x = \inf\{y,z\}\} \cup \{c_n < x \wedge y < c'_n \wedge z < c''_n \mid n \in \omega\}$; при этом множество реализаций типа $r_3(x,y,z)$ образует два замкнутых интервала $[a,b]$ и $[a,d]$, $a = \inf\{b,d\}$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} c'_n$ и $d = \lim\limits_{n\to\infty} c''_n \in (a,b)$;

— три предельные модели над типом $r_3(x,y,z)$, в которых в которых множества реализаций $r_3(x,y,z)$ состоят из интервалов $[a,b]$ и $[a,d]$ с удаленным концом b, d или с удаленными концами $\{b,d\}$;

— простая модель над реализацией типа $s(x,y,z,u)$, изолируемого множеством формул $p(x) \cup p(y) \cup \{x < u, u < y, u < z, \neq y \le z, \neg z \le y, u = \inf\{y,z\}\} \cup \{c_n < x \wedge y < c'_n \wedge z < c''_n \mid n \in \omega\}$; при этом множество реализаций типа $s(x,y,z,u)$ образует три замкнутых интервала $[a,e]$, $[e,b]$ и $[e,d]$, $e = \inf\{b,d\}$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} c'_n$ и $d = \lim\limits_{n\to\infty} c''_n \in (a,b)$;

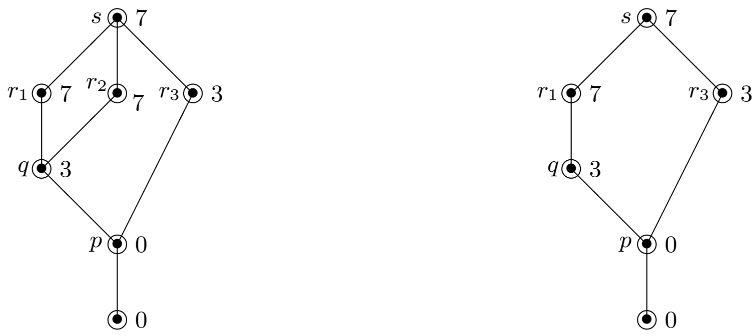
— семь предельных моделей над типом $s(x,y,z,u)$, в которых множества реализаций $s(x,y,z,u)$ состоят из интервалов $[a,e]$, $[e,b]$ и $[e,d]$ удаленным концом a, b или d, или с удаленными концами $\{a,b\}$, $\{a,d\}$, $\{b,d\}$ или $\{a,b,d\}$.

Итого, рассматриваемая теория T_3 имеет 7 простых над кортежами и 27 предельных моделей, $I(T_3,\omega) = 34$. На рис. 2, *а* представлены диаграммы Хассе предпорядков Рудина — Кейслера $\le_{RK}$ и значений функций IL распределения числа предельных моделей на классах $\sim_{RK}$-эквивалентности для теории T_3 с указанием типов, над которыми модели просты или предельны.

Если вместо констант c'_n, c''_n рассмотреть одноместные предикаты $P_n = \{c'_n, c''_n\}$, $n \in \omega$, то для соответствующей теории T_4 типы r_1 и r_2 становятся одинаковыми. Тем самым, на единицу снижается число простых над кортежами моделей, а число предельных моделей уменьшается на 7. Таким образом, $I(T_4,\omega) = 26$. Диаграмма для теории T_4, аналогичная диаграмме для теории T_3, представлена на рис. 2, *б*. $\square$

Заметим, что при дополнительных обогащениях строго убывающими последовательностями констант эренфойхтовость теории сохраняется При этом число вариантов счетных моделей как и в указанных выше примерах определяется взаимоотношениями пределов последовательностей.

Приведенные примеры демонстрируют возможности усложнения характеризационной пары (предпорядок Рудина — Кейслера, функция распределения числа предельных моделей) и достаточно быстрый рост числа предельных моделей при константных обогащениях в классе эренфойхтовых теорий.



а *б*

Рис. 2

Список литературы

1. *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Дискретная математика: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2007. — 256 с.
2. *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2008. — 224 с.
3. *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана. — Новосибирск: НГТУ, 2009. — 336 с.
4. *Fuchs L.* Partially ordered algebraic systems. — Oxford: Pergamon Press, 1963. — 229 p.
5. *Macpherson H. D., Steinhorn C.* On variants of *o*-minimality // Ann. Pure and Appl. Logic. 1996. V. 79, No. 2. P. 165–209.
6. *Mayer L.* Vaught's conjecture for *o*-minimal theories // J. Symbolic Logic. 1988. V.53, No. 1. P. 146–159.
7. *Pillay A., Steinhorn C.* Definable sets in ordered structures, I // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 295. P.565–592.
8. *Tanović P.* Theories with constants and three countable models // Archive for Math. Logic. 2007. V. 46, No. 5–6. P. 517–527.
9. *Woodrow R. E.* Theories with a finite number of countable models and a small language. Ph. D. Thesis. — Simon Fraser University, 1976.

S. V. Sudoplatov

Inessential combinations of small theories

Abstract. Characteristics of number of pairwise non-isomorphic countable models for inessential combinations of small theories are investigated. Estimations of that characteristics for coordinated inessential combinations, as well as exact values for their interpretations as disjunctive unions, are found. Characteristic representations are described for Ehrenfeucht theories being close to *o*-minimal.

Keywords: small theory, inessential combination, Rudin — Keisler preorder, limit model.

Судоплатов Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4, тел.: (383)3634674 (sudoplat@math.nsc.ru)

Sudoplatov Sergey, leading researcher, Sobolev Institute of Mathematics, 4, Academician Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Phone: (383)3634674 (sudoplat@math.nsc.ru)