Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 103—116

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.977

О разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений с запаздыванием *

В. Ф. Чистяков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В работе рассматриваются линейные и квазилинейные системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с запаздыванием. Обсуждаются связи индекса главной части ДАУ с запаздыванием и индекса ДАУ без запаздывания, поставленной в соответствие исходной задаче. Для квазилинейных ДАУ обсуждаются условия нелокальной разрешимости.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, запаздывание, индекс.

1. Введение

В работе изучаются начальные задачи для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздыванием

$$\mathcal{A}(t)\dot{y}(t) + \mathcal{F}(t, y(t), y(t-h)) = 0,\ t \in \mathcal{T} = (t_0,\ t_1), \tag{1.1}$$

$$y(t) = \phi(t),\ t \in [\alpha,\ \alpha + h] \subset \mathcal{T}, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{A}(t)$ – $(m \times m)$-матрица, $y(t)$–искомая, $\phi(t)$, $\mathcal{F}(t, u, v)$– заданные m-мерные вектор-функции соответственно, $u, v \in \mathbf{R}^m$, h–запаздывание (положительный параметр), $\dot{} = d/dt$. Предполагается, что

$$\det \mathcal{A}(t) \equiv 0,\ t \in \mathcal{T}, \tag{1.3}$$

причем допускается случай, когда матрица $\mathcal{A}(t)$ имеет на $\mathcal{T}$ переменный ранг.

Системы вида (1.1), удовлетворяющие условию (1.3), принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) [1]. В

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-08-00201-а и грантом заказного междисциплинарного проекта СО РАН №107.

ходу также термин: алгебро-дифференциальные системы (АДС) [2]. ДАУ с запаздыванием в последнее время привлекают большое внимание (см., например, [3, 4] и приводимую там библиографию). Большое внимание линейным системам вида (1.1) уделено в монографии [5]. Интерес к ДАУ стимулируется проблемами математического моделирования в прикладных областях: в теориях электронных схем и электрических цепей, механике и химической кинетике, гидродинамике и теплотехнике [6]-[8]. В частности, при изучении процессов, происходящих в сложных комплексах теплотехнического оборудования, теплообмен описывается системами дифференциальных уравнений, а балансовые соотношения в виде алгебраических уравнений описывают законы сохранения масс теплоносителей. Запаздывание h может соответствовать транспортному запаздыванию теплоносителей.

Несколько модифицируя методику из [9, с.15], поставим в соответствие задаче (1.1), (1.2) краевую задачу без запаздывания

$$A_i(z)\frac{dy_i(z)}{dz} + F_i(z, y_i(z), y_{i-1}(z)),\ z = [\alpha, \alpha + h], \tag{1.4}$$

$$y_i(\alpha) = y_{i-1}(\alpha + h),\ i = \overline{1, M-1}, \tag{1.5}$$

где $y_0(z) = \phi(z)$, $A_i(z) = \mathcal{A}(ih + z)$, $F_i(z, u, v) = \mathcal{F}(ih + z, u, v)$, $i = \overline{2, M-1}$, $[\alpha + h, \alpha + Mh] \subset \mathcal{T}$.

Необходимым условием разрешимости краевой задачи (1.4), (1.5) является выполнение условий Кронекера-Капелли

$$\text{rank } A_i(\alpha) = \text{rank } \{A_i(\alpha)| - F_i(\alpha, y_i(\alpha), y_{i-1}(\alpha))\}, \tag{1.6}$$

и это сильно затрудняет исследование ДАУ с запаздыванием.

2. Вспомогательные результаты

Приведем ряд необходимых для дальнейших рассуждений сведений.

В работе используются нормы n-мерного вектора $v = (v_1\ v_2 \cdots v_n)^\top$, и $(\mu{\times}n)$-матрицы $V = (v_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, \mu)$, вычисляемые по правилам

$$\|v\| = \max\{|v_i|,\ i = 1, 2, \cdots, n\},\ \|V\| = \max\{\sum_{j=1}^{n} |v_{ij}|,\ i = 1, 2, \cdots, \mu\}.$$

Под символами $\|v(w)\|$, $\|V(w)\|$ понимаются нормы вектор-функции $v(w)$ и матрицы $V(w)$ вычисленные в точке $w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$. Включения $v(w),\ V(w) \in \mathbf{C}^l(D)$ означают, что все частные производные элементов вектор-функции $v(w)$ или матрицы $V(w)$ имеют непрерывные частные производные порядка до l включительно по всем компонентам вектора

w в любой точке области D. Непрерывности соответствуют включения: $v(w),\ V(w) \in \mathbf{C}(D)$. Если $v(w),\ V(w) \in \mathbf{C}(D)$, то их нормы также непрерывны в D.

Определение 1. (*см., например* [9]) *Матрица, обозначаемая ниже как* S^-, *называется полуобратной к матрице* S, *если* $SS^-S = S$.

Лемма 1. [9] *Полуобратная матрица определена для произвольной матрицы* S. *Если выполнено условие Кронекера-Капелли:* $\operatorname{rank} S = \operatorname{rank}(S|u)$, *то система уравнений* $Sy = u$ *разрешима и все ее решения описываются формулой:*

$$y = S^- u + [E - S^- S]C,$$

где $E-$*единичная матрица подходящей размерности,* $C-$*произвольный вектор.*

Определение 2. *Говорят, что пучок квадратных матриц* $\lambda A(w) + B(w),\ w \in D \subseteq \mathbf{R}^q$, *где* $\lambda-$ *скалярный параметр (в общем случае комплексный), удовлетворяет критерию "ранг-степень" в области* D, *если выполнены условия*

1. $\max \operatorname{rank} A(w) = r,\ w \in D$;

2. $\det[\lambda A(w) + B(w)] = \lambda^r a_0(w) + \cdots$, *где* $a_0(w) \neq 0\ \forall w \in D$.

Лемма 2. *Пусть пучок постоянных матриц* $\mathbf{A}(\lambda) = \lambda \overline{A} + \overline{B}$ *регулярен:* $\det\ \mathbf{A}(\lambda) \not\equiv 0$.

Тогда справедливо неравенство: $\operatorname{rank}\overline{A} \geq \deg\det\ \mathbf{A}(\lambda)$, *где* $\deg-$*символ степени многочлена.*

Доказательство. Если пучок матриц $\mathbf{A}(\lambda)$ регулярен, то существуют постоянные неособенные матрицы $P,\ Q$, со свойством

$$P\mathbf{A}(\lambda)Q = \lambda \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \overline{N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{J} & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$\overline{J}-$некоторый $(d{\times}d)$-блок, $\overline{N}-$верхнетругольная матрица с нулевой диагональю, начиная с некоторого k, называемого индексом пучка, справедливо: $N^k = 0,\ 1 \leq k \leq n - d$ [10, с.354]. Отсюда

$$\deg\det\ \mathbf{A}(\lambda) = \deg[\det(\lambda E_d + \overline{J})\det(\lambda\overline{N} + E_{n-d})] = \deg\ \det(\lambda E_d + \overline{J}) \cdot 1 = d.$$

Следовательно, $d \leq \operatorname{rank}\overline{A}$. Равенство $d = \operatorname{rank}\overline{A}$ (эквивалентное критерию "ранг-степень") выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{N} = 0$. □

Следствие 1. *Для пучка матриц* $\lambda A(w) + B(w),\ w \in D$, *удовлетворяющего критерию "ранг-степень" справедливо равенство:* $\operatorname{rank} A(w) = \mathit{const} = r\ \forall w \in D$.

Лемма 3. [13] *Матричный пучок* $\mathcal{P}(\lambda;t)=\lambda\begin{pmatrix}A_1(w)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1(w)\\B_2(w)\end{pmatrix}$, $w\in D$, *где блок* $A_1(w)$ *имеет полный ранг для любого* $w\in D$, *удовлетворяет критерию "ранг-степень" тогда и только тогда, когда*

$$\det\mathcal{P}(\lambda;w)=\lambda^r a_0(w)+...,\ a_0(t)=\det\begin{pmatrix}A_1(w)\\B_2(w)\end{pmatrix}\neq 0\ \forall w\in D.$$

Определение 3. *Оператор* $\Lambda_l:=\sum\limits_{j=0}^{l}L_j(t)(d/dt)^j,\ t\in T_0=[\alpha_0,\ \beta_0]$, *где* $L_j(t)$*-матрицы из* $\mathbf{C}(T_0)$, *называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО) на* T_0 *для оператора* $\Lambda_1:=A(t)(d/dt)+B(t),\ t\in T_0$, *где* $A(t),\ B(t)$*-матрицы из* $\mathbf{C}^l(T_0)$, *если*

$$(\Lambda_l\circ\Lambda_1)y=\dot y+\Lambda_l[B(t)]y\ \forall y\in\mathbf{C}^{l+1}(T_0).$$

Минимальное возможное значение l *называется (левым) индексом оператора* Λ_1.

Если на T_0 определен ЛРО, то справедлива альтернатива: $\det A(t)=0\ \forall t\in T_0$ либо $\det\ A(t)\neq 0\ \forall t\in T_0$. Первое условие соответствует случаю $l\geq 1$, а второе случаю $l=0$.

Определение 4. *Система*

$$\Lambda_1 x=A(t)\dot x(t)+B(t)x(t)=\varphi(t),\ t\in T_0, \tag{2.2}$$

имеет решение типа Коши на T_0, *если: 1) она разрешима при любой вектор-функции* $\varphi(t)\in\mathbf{C}^{r+1}(T_0)$, *где* $r=\max\{\text{rank }A(t),\ t\in T_0\}$; *2) существуют матрица* $X_d(t)\in\mathbf{C}^1(T_0)$, $\text{rank }X_d(t)=d\ \forall t\in T_0$ *и вектор-функция* $h(t)\in\mathbf{C}^1(T_0)$, *такие, что линейная комбинация*

$$x(t,c)=X_d(t)c+h(t)$$

удовлетворяет условию $\Lambda_1 x(t,c)\equiv\varphi(t)\ \forall c\in\mathbf{R}^m,\ t\in T_0$; *3) на любом сужении* $[\alpha_1,\ \beta_1]\subset T_0$ *нет решений системы (2.2) отличных от* $x(t,c)$. *В случае* $d=0$ *предполагается, что* $X_d(t)$ *нулевая матрица.*

Теорема 1. *Если в системе (2.2)* $A(t),\ B(t)\in\mathbf{C}^{2r+3}(T_0),\ f(t)\in\mathbf{C}^l(T_0)$, *то решение типа Коши определено на* T_0 *тогда и только тогда когда на* T_0 *определен ЛРО для оператора* Λ_1.

Более того, существуют представления: $X_d(t)=\begin{pmatrix}X_{d,1}(t) & 0\end{pmatrix}$, *где нулевой блок имеет размерность* $(n\times[n-d])$,

$$h(t)=\int\limits_{\alpha_0}^{t}K_d(t,s)\varphi(s)ds+\sum_{j=0}^{l-1}C_j(t)(d/dt)^j\varphi(t),\ K_0(t,s)=0,$$

где $K(t,s),\ C_j(t) - (n\times n)$*-матрицы, гладкие в своих областях определения, и через точку* $(a,\gamma),\ a\in\mathbf{R}^n,\ \gamma\in T_0$ *проходит единственное решение ДАУ (2.2) тогда и только тогда, когда разрешима система* $X_{d,1}(\gamma)c_1 = a - h(\gamma)$ *относительно* c_1.

Теорема 1 является сводкой результатов из монографии [2]. Там же в терминах входных данных даны критерии существования ЛРО и указаны способы построения.

3. Линейные задачи

В этом разделе рассматривается линейный вариант задачи (1.1), (1.2)

$$\mathcal{A}(t)\dot{x}(t) + \mathcal{B}(t)x(t) + \mathcal{C}(t)x(t-h) = f(t),\ t\in\mathcal{T} = (t_0,\ t_1), \tag{3.1}$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t\in[\alpha,\ \alpha+h]\subset\mathcal{T}, \tag{3.2}$$

где $\mathcal{A}(t),\ \mathcal{B}(t),\ \mathcal{C}(t) - (m\times m)$-матрицы, $x(t)-$искомая, $f(t),\ \varphi(t)-$ заданные m-мерные вектор-функции соответственно.

Задача (1.4), (1.5) здесь выглядит так

$$A_i(z)\frac{dx_i(z)}{dz} + B_i(z)x_i(z) + C_i(z)x_{i-1}(z) = f_i(z),\ z = [\alpha,\alpha+h), \tag{3.3}$$

$$x_i(\alpha) = x_{i-1}(\alpha+h),\ i = \overline{1, M-1}, \tag{3.4}$$

где $x_0(z) = \varphi(z),\ A_i(z) = \mathcal{A}(ih+z),\ B_i(z) = \mathcal{B}(ih+z),\ C_i(z) = \mathcal{C}(ih+z),\ f_i(z) = f(ih+z),\ i = \overline{2, M-1},\ f_1(z) = C_1(z)\varphi(z) + f_1(z)$, $[\alpha+h,\alpha+Mh]\subset\mathcal{T}$, а затем (3.3) перепишем в одного ДАУ

$$\mathbf{A}(z)\frac{d\mathbf{y}(z)}{dz} + \mathbf{B}(z)\mathbf{y}(z) = F(z),\ z = [\alpha,\alpha+h), \tag{3.5}$$

где

$$\mathbf{y}(z) = (x_1^\top(z), x_2^\top(z), \cdots, x_{M-1}^\top(z))^\top,$$

$$F(z) = (f_1^\top(z), f_2^\top(z), \cdots, f_{M-1}^\top(z))^\top,$$

$$\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{M-1}(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) & 0 & \cdots & 0 \\ C_2(z) & B_2(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_{M-1}(z) & B_{M-1}(z) \end{pmatrix}.$$

Краевые условия (3.4) запишем в виде интеграла Стилтьеса

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h} [d\sigma(s)]\mathbf{y}(s) = a,\ \sigma(s) = \sigma_1(s)E_{m(M-1)} - \sigma_2(s)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{m(M-2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

где $a = (\varphi^\top(\alpha+h),\ 0, \cdots, 0)^\top$,

$$\sigma_1(s) = \begin{pmatrix} 0,\ s = \alpha, \\ 1,\ \alpha < s \le \alpha + h \end{pmatrix},\ \sigma_2(s) = \begin{pmatrix} 0,\ \alpha \le s < \alpha + h, \\ 1,\ s = \alpha + h \end{pmatrix},$$

Выясним соотношения между индексами и размерностями ядер операторов

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{A}(t)(d/dt) + \mathcal{B}(t),\ t \in [\alpha + h,\ \alpha + Mh],$$
$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}(z)(d/dz) + \mathbf{B}(z),\ z \in [\alpha,\ \alpha + h], \quad (3.6)$$

из (3.1) и (3.5), соответственно.

Теорема 2. *Если матрицы в (3.1) принадлежат* $\mathbf{C}^{\mu M}(\mathcal{T})$ *и для оператора* $\mathcal{L}_1$ *определен ЛРО* $\Lambda_\mu = \sum\limits_{j=0}^{\mu} L_j(t)(d/dt)^j$, *то для оператора* $\mathbf{L}_1$ *также определен ЛРО.*

Более того, если матрицы в (3.1) вещественно-аналитические, то

$$\dim\ker \mathbf{L}_1 = (M-1)\dim\ker \mathcal{L}_1. \quad (3.7)$$

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$\mathrm{diag}\{\Lambda_{\mu,1}, \Lambda_{\mu,2}, \cdots, \Lambda_{\mu,M-1}\} \circ \mathbf{L}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \Lambda_{\mu,2} \circ C_2(z) & \Lambda_{1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Lambda_{\mu,M-1} \circ C_{M-1}(z) & \Lambda_{1,M-1} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{L}_1$-оператор системы (3.5),

$$\Lambda_{\mu,i} = \sum_{j=0}^{\mu} L_{j,i}(z)(d/dz)^j,\ L_{j,i}(z) = L_j(ih + z),$$

$$\Lambda_{1,i} = (d/dz)E_m + \Lambda_{\mu,i}[B_i(z)],\ i = \overline{1, M-1}.$$

Нам потребуется такой факт. Пусть заданы некоторые операторы $\tilde{\Lambda}_1 = (d/dz)E_m + R(z),\ \tilde{\Lambda}_\nu = \sum\limits_{j=0}^{\nu} \tilde{L}_j(z)(d/dz)^j$ с матричными коэффициентами. Тогда найдется оператор $\tilde{\Lambda}_{\nu-1} = \sum\limits_{j=0}^{\nu-1} S_j(z)(d/dz)^j$ со свойством

$\tilde{\Lambda}_{\nu-1}\circ\tilde{\Lambda}_1-\tilde{\Lambda}_\nu=\tilde{\Lambda}_0$. Оператор $L_\nu(z)(d/dz)^{\nu-1}\tilde{\Lambda}_1-\tilde{\Lambda}_\nu$ имеет порядок $\nu-1$, и очевидно, что $S_{\nu-1}(z)=L_\nu(z)$. Из этого оператора можно вычесть оператор $(d/dz)^{\nu-2}\tilde{\Lambda}_1$, умноженный на соответствующий матричный коэффициент, и получить оператор порядка $\nu-2$ и так далее.

Используя этот факт, мы в операторной матрице

$$\mathrm{diag}\{\Lambda_{\mu,1},\Lambda_{\mu,2},\cdots,\Lambda_{\mu,M-1}\}\circ\mathbf{L}_1$$

сможем, вычитая диагональные элементы, умноженные на соответствующие операторы, свести операторы под диагональю к операторам нулевого порядка и получить оператор вида $(d/dz)E_{m(M-1)}+\mathbf{S}(z)$, где $\mathbf{S}(z)-$ некоторая блочно-двухдиагональная матрица.

Осталось доказать формулу (3.7). Из (3.3) мы видим, что

$$\dim\ker\mathbf{L}_1=\dim\ker\prod_{i=1}^{M-1}\Omega_i,\quad \Omega_i=A_i(z)\frac{d}{dz}+B_i(z).$$

В случае аналитических коэффициентов и существования ЛРО нетеров индекс операторов $\Omega_i:\mathbf{C}^\infty([\alpha,\ \alpha+h])\to\mathbf{C}^\infty([\alpha,\ \alpha+h])$ совпадает с размерностью ядра оператора Ω_i [11]. Индекс произведения нетеровых операторов равен сумме индексов сомножителей. □

Следствием этой теоремы и теоремы 1 является такое утверждение о разрешимости линейной задачи.

Теорема 3. *Система (3.1) имеет на отрезке $[\alpha+h,\ \alpha+Mh]\subset\mathcal{T}$ решение из $\mathbf{C}^p(\mathcal{T})$ тогда и только тогда когда разрешимы относительно* $\mathbf{c}$ *линейные алгебраические системы*

$$\Theta_j\mathbf{c}=b_j,\ j=0,1,\ \cdots,p,$$

$$\Theta_i=\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h}[d\sigma(s)]\mathbf{Y}^{(p)}(s),\ b_j=a_j-\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h}[d\sigma(s)]\mathbf{h}^{(p)}(s),$$

где $a_j=(\varphi_j^\top(\alpha+h),0,\cdots,0)^\top$, $\varphi_j(t)=\varphi^{(j)}(t)$, $\mathbf{Y}(z)\mathbf{c}+\mathbf{h}(z)-$общее решение типа Коши системы (3.5).

Теорема 4. *Если входные данные в (3.1), (3.2) принадлежат $\mathbf{C}^1(\mathcal{T})$ и оператор $\mathcal{A}(t)(d/dt)+\mathcal{B}(t)$, $t\in[\alpha+h,\ \alpha+Mh]$ имеет индекс 1, то оператор системы (3.5) на $[\alpha,\alpha+h]$ также имеет индекс 1 и*

$$\dim\ker\mathbf{L}_1=(M-1)\dim\ker\mathcal{L}_1=(M-1)\mathrm{rank}\,\mathcal{A}(t). \tag{3.8}$$

Более того, если матрицы в (3.1) постоянные и пучок $\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B}$ регулярен: $\det(\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B})\not\equiv 0$, где $\lambda-$параметр (в общем случае комплексный), то

$$\dim\ker\mathbf{L}_1=(M-1)\deg\,\det(\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B}), \tag{3.9}$$

где deg*−символ степени многочлена, и для равенства индексов операторов* $\mathbf{L}_1,\ \mathcal{L}_1$ *из (9) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\|[\tau C_{22}(N+\tau E_{n-d})^{-1}]^j\| \le \kappa/\tau^k,\ \tau>0,\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix} = P\mathcal{C}Q,$$

где $\kappa = const,\ \tau \to 0$, *матрицы* $P,\ Q$ *приводят пучок* $\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *к каноническому виду:* $\mathrm{diag}\{\lambda E_d + J,\ \lambda N + E_{n-d}\}$ *(см. формулу (2.1)),* $j=\overline{1, M-1}$.

Доказательство. Имеет место такой факт: оператор ДАУ (2.2) имеет индекс 1, тогда и только тогда, когда $\deg\ \det[\lambda A(t)+B(t)] = \mathrm{rank} A(t) = r = d = const\ \forall t \in T_0$. (выполнен критерий "ранг-степень") [2, c.168]. Из вида системы (3.5) следует, что

$$\deg\ \det[\lambda\mathbf{A}(z)+\mathbf{B}(z)] = \deg\left(\prod_{i=1}^{M-1}\det[\lambda A_i(z)+B_i(z)]\right) =$$

$$= \mathrm{rank}\mathbf{A}(z) = (M-1)\tilde{r},$$

где $z \in [\alpha,\ \alpha+h]$, $\tilde{r} = \mathrm{rank}\mathcal{A}(t) = const,\ \ t \in [\alpha+h,\ \alpha+Mh]$. Равенство (3.8) доказано.

Равенство (3.9) следует из [12], где показано, что

$$\dim\ \ker\left(\sum_{j=0}^{q} M_j (d/dt)^j\right) = \deg\ \det S(\lambda),\ S(\lambda) = \sum_{j=0}^{q}\lambda^j M_j,$$

если матрицы коэффициентов M_j постоянны, $\det\ S(\lambda) \not\equiv 0$.

ЛРО для оператора $\mathcal{L}_1$ с постоянными матрицами коэффициентов существует тогда и только тогда, когда пучок $\lambda\mathcal{A}+\mathcal{B}$ регулярен. В качестве ЛРО можно принять оператор

$$Q\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{k}(d/dt)^j(-N)^{j-1}\end{pmatrix}P,\ N^0 = E_{n-d}.$$

Таким образом, индекс оператора l совпадает с индексом пучка k. Из (2.1) следует оценка

$$\kappa_0/\tau^k \le \theta(\tau) \le \kappa_1/\tau^k,\ \ \theta(\tau) = \|(A+\tau B)^{-1}\|,\ \tau < 1/\|J\|,$$

где $\kappa_j = const, j = 0,1$, так как. $(N+\tau E_{n-d})^{-1} = \sum\limits_{j=1}^{k}\tau^{-j}(-N)^{j-1}$.

Рассмотрим произведение

$$\Gamma(\tau) = \mathrm{diag}\{P,P,\cdots,P\}[\mathbf{A}+\tau\mathbf{B}]\mathrm{diag}\{Q,Q,\cdots,Q\}.$$

В результате элементарных преобразований и перестановок блочных строк и столбцов матрица $\Gamma(\tau)$ преобразуется к виду $\mathrm{diag}\{\Gamma_1(\tau), \Gamma_2(\tau)\}$, где $\Gamma_1(\tau) = \mathrm{diag}\{E_d + \tau J, E_d + \tau J, \cdots, E_d + \tau J\}$,

$$\Gamma_2(\tau) = \begin{pmatrix} N + \tau E_{n-d} & 0 & \cdots & 0 \\ \tau C_{22} & N + \tau E_{n-d} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tau C_{22} & N + \tau E_{n-d} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\|\Gamma(\tau)\| \geq \kappa_2/\tau^k$, где $\kappa_2 = const$, и индекс пучка $\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}$ не меньше k. С другой стороны $\|\Gamma_1(\tau)\| = \|[\tau C_{22}(\tau)(N + \tau E_{n-d})^{-1}]^j\|$, где $j = \overline{1, M-1}$. Если $\|[\tau C_{22}(N + \tau E_{n-d})^{-1}]^j\| \leq \kappa/\tau^k$, то пучок $\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}$ имеет индекс k. □

Замечание 1. Условие равенства индексов операторов $\mathcal{L}_1$, $\mathbf{L}_1$ из (3.6) в случае постоянных матриц коэффициентов выполнено, например, когда блок C_{22} перестановочен с N или является верхнетреугольным. В терминах входных данных достаточным условием является перестановочность матриц $(\mathcal{A} + \tau_0\mathcal{B})^{-1}\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, где τ_0 фиксированное число.

Пример 1. Рассмотрим систему (3.3) вида

$$[N(d/dz) + E_2]x_i(z) = C_{22}x_{i-1}(z) + f_i(z),\ N^2 = 0.$$

Здесь $[N(d/dz)+E_2]^{-1} = E_2 - N(d/dz)$ и $[E_2 - N(d/dz)]^j = E_2 - jN(d/dz)$. Далее, если $C_{22} = E_2$, то

$$x_i(z) = [E_2 - iN(d/dz)]\varphi(z) + \sum_{j=1}^{i-1}[E_2 - jN(d/dz)]f_j(z),\ i = \overline{1, M-1}.$$

Таким образом индекс соответствующей системы (7) равен 2, так как обратный оператор содержит оператор дифференцирования первой степени при любом M.

Нетрудно проверить, что при выборе $C_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, в выражении

$$x_i(z) = D^i\varphi(z) + \sum_{j=1}^{i-1} D^j\tilde{f}_j(z),\ D = \{[E_2 - N(d/dz)]C_{22}^{-1}\},\ \tilde{f}_j(z) = C_{22}^{-1}f_j(z),$$

с ростом M растет степень оператора дифференцирования d/dz.

4. Теоремы о разрешимости квазилинейных систем

Сделаем некоторые замечания относительно разрешимости задачи (1.1), (1.2). Ввиду нелинейного характера системы ограничимся рассмотрением задач в линейном случае соответствующим системам индекса 1.

Теорема 5. *Пусть для задачи (1.1), (1.2) выполнены условия:*
1. $\mathcal{A}(t) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{T}),\ \phi(t) = \mathbf{C}^1([\alpha, \tilde{\alpha}]),\ \tilde{\alpha} = \alpha + h,\ \mathcal{F}(t, v, u) \in \mathbf{C}^1(U),\ U = \mathcal{T} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$;
2. $\mathrm{rank}\mathcal{A}(t) = r = const$ *в окрестности точки* $\tilde{\alpha}$;
3. $\mathrm{rank}\ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}) = \mathrm{rank}\ \{A(\tilde{\alpha})|\ \tilde{b}\},\ \tilde{b} = -\mathcal{F}(\tilde{\alpha}, \phi(\tilde{\alpha}), \phi(\alpha))$;
4. *пучок* $\lambda A(\tilde{\alpha}) + \mathcal{G}(\tilde{\alpha}, \phi(\tilde{\alpha}), \phi(\alpha))$, *где* $\mathcal{G}(t, u, v) = \partial\mathcal{F}(t, v, u)/\partial u$, *удовлетворяет критерию "ранг-степень".*

Тогда, при достаточно малом h, *существует отрезок* $[\alpha, \alpha+2h]$, *на котором определено единственное решение* $y^*(t) = \begin{pmatrix} \phi(t),\ t \in [\alpha, \tilde{\alpha}] \\ y(t),\ t \in [\tilde{\alpha}, \alpha + 2h] \end{pmatrix}$ *задачи (1.1),(1.2).*

Доказательство базируется на том, что задача

$$\mathcal{A}(t)\dot{y}(t) + \mathcal{F}(t, y(t), \phi(t)) = 0,\ y(\tilde{\alpha}) = \phi(\tilde{\alpha}),$$

в условиях теоремы имеет гладкое решение $y(t)$ на некотором отрезке $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} + \varepsilon],\ \varepsilon > 0$ [2, с. 212].

Теорема 6. *Пусть для задачи (1.1), (1.2) выполнены условия:*
1. $\mathcal{A}(t) \in \mathbf{C}^2(\mathcal{T}),\ \phi(t) \in \mathbf{C}^2([\alpha, \tilde{\alpha}]),\ \mathcal{F}(t, u, v) \in \mathbf{C}^2(U)$;
2. $\mathrm{rank}\ \mathcal{A}(\tilde{\alpha}) = \mathrm{rank}\ \{A(\tilde{\alpha})|\ \tilde{b}\},\ \tilde{b} = -\mathcal{F}(\tilde{\alpha}, \phi(\tilde{\alpha}), \phi(\alpha))$;
3. *многочлен*

$$\det[\lambda A(t) + \mathcal{F}_u(t, u, v)] = a_r(t, u, v)\lambda^r + \cdots,$$

где $\mathcal{F}_u(t, u, v) = \partial\mathcal{F}(t, u, v)/\partial u$, *и* $|a_r(t, u, v)| \geq \kappa > 0\ \forall (t, u, v) \in U$;

4.
$$\|\mathcal{F}_u(t, u, v)\| + \|\mathcal{F}_v(t, u, v)\| \leq L_1,$$
$$\|\mathcal{F}_t(t, u, v)\| \leq L_2 + L_3(\|u\| + \|u\|),\ \forall (t, u, v) \in U.$$

где $\mathcal{F}_t(t, x) = \partial\mathcal{F}(t, u, v)/\partial t,\ L_1,\ L_2,\ L_3-$*некоторые положительные константы.*

Тогда система (1.1) имеет индекс 1 и на $T_M = [\alpha, \alpha + Mh]$ *определено непрерывное кусочно дифференцируемое решение задачи (1.1), (1.2).*

Доказательство. Согласно лемме 2, следствию 1 и условию 3 теоремы $\mathrm{rank}\mathcal{A} = const = r$ для любого $t \in T_M = [\alpha, \alpha + Mh]$. Тогда найдутся матрицы $P(t),\ Q(t) \in \mathbf{C}^2(T_M]),\ \det[P(t)Q(t)] \neq 0$ для любого $t \in T_M$ со свойством $P(t)\mathcal{A}(t)Q(t) = \mathrm{diag}\{E_r, 0\}$, существуют матрицы $\mathcal{A}^-(t) \in \mathbf{C}^2(T_M])$. В частности, существует и единственна псевдообратная матрица $\mathcal{A}^+(t) \in \mathbf{C}^2(T_M)$ [13, с. 38]. Подействуем на систему ДАУ (1.1) дифференциальным оператором из [14]

$$\Omega_0 = E_n + S(t)\frac{d}{dt},\ S(t) = E_n - \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^-(t). \tag{4.1}$$

Получим систему вида

$$A(t, y(t), y(t-h))\dot{y}(t) + F(t, y(t), y(t-h), \dot{y}(t-h)) = 0, \qquad (4.2)$$

где

$$A(t, u, v) = \mathcal{A}(t) + S(t)\dot{\mathcal{A}}(t) + S(t)\mathcal{F}_u(t, u, v),$$

$$F(t, u, v, w) = \mathcal{F}(t, u.v) + S(t)[\mathcal{F}_v(t, u, v)w + \mathcal{F}_t(t, u, v)], \;\; w = \dot{v},$$

так как по определению 1 имеем: $[E_m - \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^-(t)]\mathcal{A}(t) \equiv 0$. Покажем, что в условиях теоремы $\det A(t, u, v) \neq 0$ для любых $(t, u, v) \in \tilde{U} = T_M \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$. Рассмотрим произведение

$$\det P(t)[\lambda\mathcal{A}(t) + \mathcal{F}_u(t, u, v)]Q(t) = \det\left[\lambda\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}\right], \quad (4.3)$$

где $(G_{ij}, i, j = \overline{1,2}) = P(t)\mathcal{F}_u(t, u, v)Q(t)$. Умножая систему (4.2) на $P(t)$ и полагая $y(t) = Q(t)x(t)$, получим

$$P(t)A(t, u, v)Q(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(t)S(t)P^{-1}(t)P(t)\left[\dot{\mathcal{A}}(t) + \mathcal{F}_u(t, u, v)\right]Q(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_{11} + Z_{11} & G_{12} + Z_{12} \\ G_{21} + Z_{21} & G_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ G_{21} + Z_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \qquad (4.4)$$

где $(Z_{ij}, i, j = \overline{1,2}) = P(t)\dot{\mathcal{A}}(t)Q(t)$. Здесь учтено, что $Z_{22} = 0$ на T. Это вытекает из равенства $P\dot{\mathcal{A}}Q = d(P\mathcal{A}Q)/dt - \dot{P}\mathcal{A}Q - P\mathcal{A}\dot{Q}$. Далее, с учетом определения полуобратной матрицы: $S^2(t) = S(t)$ для любого $t \in T$ и все собственные числа матрицы $S(t)$ равны нулю или единице. Отсюда

$$P(t)[E_m - \mathcal{A}(t)Q(t)Q^{-1}(t)\mathcal{A}^-(t)]P^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & R_{12}(t) \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix}, \qquad (4.5)$$

где $(R_{ij}, i, j = \overline{1,2}) = Q^{-1}\mathcal{A}^- P^{-1}$. Матрицу $P(t)$ можно выбрать сразу так, что $R_{12} = 0$ на T_M, а именно, принять $P = \begin{pmatrix} E_r & -R_{12} \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix} P(t)$ в (4.5). Сравнивая (4.3) и (4.4) с учетом леммы 3 и условия 3 теоремы видим, что $|\det\; A(t, x)| \geq \kappa$. Следовательно,

$$\|A^{-1}(t, u, v)\| \leq \nu =$$

$$= \max\{\tilde{L}_3(\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2) + 1, \;\tilde{L}_3\} \cdot \max\left\{\|P^{-1}(t)\|\|Q^{-1}(t)\|, \; t \in T_M\right\}, \quad (4.6)$$

где $\tilde{L}_3 = \|G_{22}^{-1}(t,x)\| \le (n-r-1)!\tilde{L}_1^{n-r-1}/\varkappa$, $\tilde{L}_1 = \max\{\|P(t)\|\|Q(t)\|,\ t \in T_M\} \times L_1$, $\tilde{L}_2 = \max\{\|Z_{21}\|,\ t \in T_M\}$. Из условия 4 имеем

$$\|F(t,u,v,w)\| = \|S(t)[F_t(t,u,v)+F_v(t,u,v)w]\| \le L_4+L_5(\|u\|+\|v\|+\|w\|),$$

$L_4 = L_0+L_2$, $L_5 = L_1+\max\{\|S(t)\|,\ t \in T_M\}\times L_3$, $L_0 = \max\{\|F(t,0)\|,\ t \in T_M\}$. Таким образом, из условий теоремы и неравенства (4.6) следует оценка роста

$$\|A^{-1}(t,u,v)F(t,u,v,z)\| \le L_6 + L_7(\|u\|+\|v\|+\|w\|) =$$

$$= \nu L_4 + \nu L_5(\|u\|+\|v\|+\|w\|)\ \forall (t,u,v,w) \in \tilde{U} \times \mathbf{R}^m. \qquad (4.7)$$

Из условия 1 теоремы следует, что $A^{-1}(t,u,v)F(t,u,v,z) \in \mathbf{C}^1(\tilde{U}\times\mathbf{R}^m)$. Правая часть приведенной к нормальной форме системы (4.2) удовлетворяет условию роста (4.7) (не быстрее линейного) и согласно [15, с.277] решение системы

$$\dot{y}_1(t) = -A^{-1}(t,y_1(t),\phi(t))F(t,y_1(t),\phi(t),\dot{\phi}(t)),\ y_1(\tilde{\alpha}) = \phi(\tilde{\alpha}),$$

продолжимо на отрезок $t \in [\tilde{\alpha}, \alpha+2h] = T_h$.

Покажем, что $y_1(t)$ удовлетворяет исходной задаче (1.1), (1.2). Подставим эту вектор-функцию в исходную задачу

$$\mathcal{A}(t)\dot{y}_1(t) + \mathcal{F}(t,y_1(t),\phi(t)) = \mu(t),\ t \in T_h,$$

где $y_1(\tilde{\alpha}) = \phi(\tilde{\alpha})$. Предположим, что $\mu(t) \ne 0$ на T_h. В силу условия 2 теоремы $y_1(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в точке $t = \tilde{\alpha}$ и $\mu(\tilde{\alpha}) = 0$. Итак, имеем

$$\Omega_0[\mathcal{A}(t)\dot{y}_1(t) + \mathcal{F}(t,y_1(t),\phi(t))] = \Omega_0\mu(t) = 0,\ \mu(\tilde{\alpha}) = 0,\ t \in T_h,$$

Пучок матриц $\lambda S(t) + E_m$ удовлетворяет критерию "ранг-степень" на T_M. Это следует из (4.5). Согласно [13, с.246], задача $\Omega_0\mu(t) = 0,\ \mu(\tilde{\alpha}) = 0,\ t \in T_h$ имеет на T_h только нулевое решение.

Осталось показать, что можно сделать следующий шаг: найти решение на отрезке $[\alpha+2h, \alpha+3h]$. Так как $y_1(t)$ является решением задачи (1.1), (1.2), то условие (1.6) выполнено и снова попадаем в условия теоремы. □

5. Заключение

При доказательстве последней теоремы существенно использовалась схема доказательства из работы [16]. Попытки использовать ее при исследовании ДАУ индекса выше единицы на существование нелокальных решений сталкиваются с большими трудностями. В настоящее время у автора сложилось убеждение, что нужно искать другие подходы не использующие сведение исходной системы к системе в нормальной форме.

Список литературы

1. Brenan, K.E. Numerical Solution of Initial - Value Problems in Differential - Algebraic Equations (Classics in applied mathematics; 14) / Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. – Philadelphia: SIAM, 1996.
2. Бояринцев, Ю.Е. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю.Е.Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
3. Метельский, А.В. Полная управляемость и полная конструктивная идентифицируемость вполне регулярных алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием / А.В. Метельский, С.А. Минюк // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т.43. – №3. – С.303-317.
4. Марченко, В.М. Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных импульсных систем / В.М. Марченко, З. Заркевич // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т.45. –№12. – С.1775-1786.
5. Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальные систем / В.Ф. Чистяков, А.А.Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003. – 319 с.
6. Демиденко, Г.В. О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений / Г.В. Демиденко, В.А. Лихошвай, А.В. Мудров // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т.45. – №1. – С.34-46.
7. Влах, И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / И. Влах, К. Сингхал. – М.: Радио и связь, 1988. – 560.
8. Muller, P.C. Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: A survey / P.C. Muller // Appl. Math. and Comp. Sci. - 1998. - V.8. -№ 2. - P.269-286.
9. Бояринцев, Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1980. –222 с.
10. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
11. Чистяков, В.Ф. О нетеровом индексе линейных алгебро - дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков // Сиб.мат.журн. - 1993. - Т.34. –№ 3. - С.209-221.
12. Лузин, Н.Н. К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений / Н.Н. Лузин // Автоматика и телемеханика. – 1940. – № 5. – С.4-66.
13. Чистяков, В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1996. – 279 с.
14. Булатов, М.В. Редукция вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра к невырожденным / М.В. Булатов // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 11. – С. 14-21.
15. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 659 с.
16. Чистякова, Е.В. О нелокальных теоремах существования решений у дифференциально-алгебраических уравне-ний индекса 1 / Е.В. Чистякова, В.Ф. Чистяков // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 1. – С. 76-81.

V. F. Chistyakov

On solvability of delay differential-algebraic equations

Abstract. In this paper, linear and quasi-linear systems of delay differential-algebraic equations (DAEs) are considered, connections between the index of the leading part of the delay DAE and the index of the corresponding DAE without delay are found. For quasi-linear DAE, conditions of non-local solvability are discussed.

Keywords: differential-algebraic equations, delay, index

Чистяков Виктор Филимонович, доктор физико-математических наук, главный главный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453029 (chist@icc.ru)

Victor Filimonovich Chistyakov, professor, Institute for System Dynamycs and Control Theory (IDSTU) SB RAS, 134, Lermontova St., Irkutsk, 664033 Phone: (3952)453029 (chist@icc.ru)