Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 18—29

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.9

Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска-Лява на графе

А. А. Замышляева
Южно-Уральский государственный университет

А. В. Юзеева
Магнитогорский государственный университет

Аннотация. Рассматривается начально-конечная задача для уравнения Буссинеска-Лява на графе, моделирующего продольные колебания балки. Проводится редукция к абстрактной начально-конечной задаче для уравнения соболевского типа второго порядка. Получены теоремы об однозначной разрешимости исходной и абстрактной задач.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, фазовое пространство, M,N-функции, дифференциальные уравнения на графах, начально-конечная задача, дифференциальные уравнения на графах.

Введение

В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. За последние годы тематика теории графов стала еще более разнообразной. Краевые и начально-краевые задачи для уравнений на графах начали изучать в конце прошлого века практически одновременно в разных регионах нашей планеты. Здесь можно отметить работы S. Kosugu, C. Cattaneo, G. Medolla, A. G. Setti, F. Barra. Независимо от этих авторов и впервые в России краевыми и начально-краевыми задачами для уравнений на графах начал заниматься Ю. В. Покорный [5] со своими учениками. Здесь изучены качественные свойства дифференциальных уравнений на многообразиях типа сети, функция Грина, дифференциальные неравенства, излагается теория эллиптических уравнений на ветвящихся многообразиях.

Г. А. Свиридюк [6] рассмотрел начально-краевую задачу для полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка на графе, эти результаты были развиты в [7]. Мы будем использовать теорию и методы, разработанные в [9], хорошо проявившие себя в [1, 2, 3, 4].

Данная работа посвящена изучению уравнения Буссинеска-Лява [8]

$$(\lambda-\Delta)u_{tt}=\alpha(\Delta-\lambda')u_t+\beta(\Delta-\lambda'')u, \tag{0.1}$$

описывающего продольные колебания упругого стержня, где параметры $\lambda,\lambda',\lambda''\in\mathbb{R}$, $\alpha>0,\beta>0$ характеризуют среду, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу. Пусть $G=G(\mathcal{V};\mathcal{E})$ - конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V}=\{V_i\}$ - множество вершин, а $\mathcal{E}=\{E_j\}$ - множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j>0$ и толщину $d_j>0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jtt}-u_{jxxtt}=\alpha(u_{jxxt}-\lambda' u_{jt})+\beta(u_{jxx}-\lambda'' u_j) \text{ для всех } x\in(0,l_j),\ t\in\mathbb{R}. \tag{0.2}$$

Для уравнений (0.2) в каждой вершине V_i зададим краевые условия

$$\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t)-\sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t)=0; \tag{0.3}$$

$$u_s(0,t)=u_j(0,t)=u_k(l_k,t)=u_m(l_m,t),$$
$$\text{для всех } E_s,E_j\in E^{\alpha}(V_i),\ E_k,E_m\in E^{\omega}(V_i), \tag{0.4}$$

которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (0.3) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (0.4) – что решение в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф G состоит из единственной нециклической дуги, условие (0.4) исчезает, а условие (0.3) превращается в однородное условие Неймана.

Поток пропорционален ширине дуги и градиенту решения. Однако не это является главной причиной введения в рассмотрение ширины дуги. Оказывается, конечномерное уравнение (0.1), заданное в трубчатой области, можно свести одномерному (0.2), где x – натуральный параметр дуги E_j. Поэтому задачу (0.2) – (0.4) можно рассматривать как задачу Неймана для уравнения (0.1), заданного на области, являющейся объединением конечного множества трубчатых областей с диаметром d_j.

Термин «начально-конечная задача» появился совсем недавно, и отражает тот факт, что при постановке такой задачи для уравнения (0.1) часть данных задается в начале временно́го промежутка [0,T], а другая часть — в конце. Первоначально такая задача называлась «задачей сопряжения» или «задачей Веригина» и рассматривалась как обобщение задачи с данными на свободной поверхности. Именно в таком контексте была построена теория таких задач для линейных уравнений соболевского типа первого порядка и разработаны приложения этой теории [1].

В статье кроме Введения и Списка литературы содержится четыре параграфа. В п.1 приведены основные результаты теории операторных вырожденных M, N-функций [2]. В п.2, следуя [1], изучается абстрактная начально-конечная задача. П.3 посвящен постановке и исследованию задачи (0.2)–(0.4) с начально-конечными условиями.

1. Вырожденные M, N-функции

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$. Обозначим через $\vec{B}$ пучок операторов (B_1, B_0).

Определение 1. *Множества* $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} \ : \ (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{U})\}$ *и* $\sigma^A(\vec{B}) = \mathbb{C} \backslash \rho^A(\vec{B})$ *будем называть A-резольвентным множеством и A-спектром пучка $\vec{B}$.*

Заметим, что множество $\rho^A(\vec{B})$ всегда открыто, поэтому A-спектр $\sigma^A(\vec{B})$ пучка $(\vec{B})$ всегда замкнут.

Определение 2. *Оператор-функцию* $R^A_\mu(\vec{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ *с областью определения $\rho^A(\vec{B})$ будем называть A-резольвентой пучка $\vec{B}$.*

A-резольвента пучка $\vec{B}$ всегда аналитична в своей области определения.

Определение 3. *Пучок операторов $\vec{B}$ называется полиномиально ограниченным относительно оператора A (или просто полиномиально A-ограниченным), если*

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{U})).$$

Если существует оператор $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{U})$, то пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен. Если $\ker A \bigcap (\bigcap\limits_{k=0}^{1} \ker B_k) \neq \{0\}$, то пучок $\vec{B}$ не будет полиномиально A-ограниченным.

Зафиксируем $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ – контур, ограничивающий круг, содержащий $\sigma^A(\vec{B})$. Введем и обсудим одно важное в дальнейшем условие. Если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, то можно потребовать, что

$$\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \tag{A}$$

Это условие, впервые введенное в [2], оказалось ключевым при рассмотрении уравнений соболевского типа высокого порядка. Заметим, что если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{U})$, то условие (A) выполняется; а если оператор $A = \mathbb{O}$ и существует оператор $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G};\mathfrak{U})$, то нет.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено (A). Тогда имеют смысл следующие операторы как интегралы от аналитических оператор-функций:

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mu R_\mu^A(\vec{B}) A d\mu, \, Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mu A R_\mu^A(\vec{B}) d\mu.$$

Лемма 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие (A). Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ — проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{G}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{G}^1 = \operatorname{im} Q$. Из леммы следует, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \mathfrak{G}^1$. Через A^k (B_l^k) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathfrak{U}^k$, $k, l = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие (A). Тогда действия операторов расщепляются:*
(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{G}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{G}^k)$, $k, l = 0, 1$;
(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1;\mathfrak{U}^1)$;
(iv) существует оператор $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^0;\mathfrak{U}^0)$;

Теперь рассмотрим полное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0 u. \tag{1.1}$$

Вектор-функцию $u \in C^2(\mathbb{R};\mathfrak{U})$ назовем *решением* уравнения (1.1), если оно обращает (1.1) в тождество. Решение $u = u(t)$ уравнения (1.1) называется *решением задачи Коши*

$$\dot{u}(0) = u_1, u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

если оно удовлетворяет (1.2).

Определение 4. *Оператор-функцию $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{G}))$ будем называть пропагатором уравнения (1.1), если для любого $u \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u$ будет решением этого уравнения.*

Рассмотрим семейства операторов

$$U_1^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$U_0^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Как показано в [2], оба эти семейства являются пропагаторами уравнения (1.1). Причем если контур $\gamma \subset \rho^A(\vec{B})$ и ограничивает область Γ, такую, что $\sigma^A(B) \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$, то в силу теоремы Коши $U_1^t = U_0^t = \mathbb{O}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и утверждение очевидно.

Определение 5. *Семейства $M^\bullet, N^\bullet : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называются семейством вырожденных M, N-функций уравнения (1.1), если*
(i) $M^\bullet$ и $N^\bullet$ — пропагаторы уравнения (1.1);
(ii) $N^0 = \dot{M}^0 = \mathbb{O}; \dot{N}^0 = M^0 = P$.

Лемма 2. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено условие (A). Тогда существует единственное семейство вырожденных M, N-функций уравнения (1.1), причем $N^t = U_1^t,\ M^t = U_0^t$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда при любых $u_k \in \mathfrak{U}^1, k = 0, 1$, существует единственное решение задачи (1.1), (1.2), представимое в виде: $u(t) = N^t u_1 + M^t u_0$.*

2. Абстрактная начально-конечная задача

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$. Рассмотрим полное уравнение соболевского типа второго порядка

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0 u, \tag{2.1}$$

Если пучок $\vec{B} = (B_1, B_0)$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие (A), то как следует из леммы 2 существует единственное семейство вырожденных M, N-функций уравнения (2.1), гарантирующих однозначную разрешимость задачи (2.1), (1.2). Пусть выполнено следующее условие:

$$\begin{array}{l} A\text{-спектр пучка } \vec{B}\ \sigma^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}) \bigcup \sigma_1^A(\vec{B}), \text{ причем} \\ \sigma_k^A(\vec{B}) \neq \emptyset,\ k = 0, 1; \text{ и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ \Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \sigma_0^A(\vec{B}),\ \overline{\Gamma}_0 \bigcap \sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset. \end{array} \tag{B}$$

Тогда существует следующий оператор:

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B}) A d\mu \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}).$$

Потребуем выполнение еще одного условия

$$\int\limits_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B}) d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Аналогично лемме 1 можно получить следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда P_0 – проектор, причем $P_0P = PP_0 = P_0$.*

Построим оператор $P_1 = P - P_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$. В силу лемм 1,3 оператор P_1 – проектор, причем $P_0P_1 = P_1P_0 = \mathbb{O}$. Возьмем произвольные векторы $u_0^0,\ u_1^0,\ u_0^T,\ u_1^T \in \mathfrak{U}$. Решение $u = u(t)$ уравнения (2.1) назовем *решением начально-конечной задачи* для уравнения (2.1), если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} P_0(\dot{u}(0) - u_1^0) = 0,\ P_0(u(0) - u_0^0) = 0; \\ P_1(\dot{u}(T) - u_1^T) = 0,\ P_1(u(T) - u_0^T) = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Заметим, что если $\sigma_1^A(\vec{B}) = \emptyset$, то $P_1 = \mathbb{O}$ и $P_0 = P$. Тогда задача (2.2) для уравнения (2.1) превращается в задачу (1.1), (1.2).

Введем в рассмотрение следующие семейства операторов:

$$N_0^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R_M^A(\vec{B})Ae^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R},$$

$$M_0^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} R_M^A(\vec{B})(\mu A - B_1)e^{\mu t}d\mu, t \in \mathbb{R}.$$

Оба семейства хоть и не являются семейством вырожденных M,N-функций в смысле определения 5 (так как не удовлетворяют условию (ii)), но тем не менее обладают рядом полезных свойств.

Лемма 4. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнены условия $(B),(A_0)$. Тогда*

(i) $M_0^\bullet$ и $N_0^\bullet$ – пропагаторы уравнения (2.1);

(ii)$N_0^0 = \dot{M}_0^0 = \mathbb{O}, \dot{N}_0^0 = M_0^0 = P_0$.

Далее, возьмем произвольное число $T \in \mathbb{R}$ и построим следующие семейства операторов $N_1^t = N^{t-T} - N_0^{t-T},\ M_1^t = M^{t-T} - M_0^{t-T}$.

Лемма 5. *Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда*

(i)$M_1^\bullet$ и$N_1^\bullet$ – пропагаторы уравнения (2.1);

(ii)$N_1^T = \dot{M}_1^T = \mathbb{O}, \dot{N}_1^T = M_1^T = P_1$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда для любых $T \in \mathbb{R}, u_k^0, u_k^T \in \mathfrak{U},\ k = 0,1$, существует единственное решение $u = u(t)$ задачи (2.1), (2.2), которое к тому же имеет следующий вид:*

$$u(t) = N_0^t u_1^0 + N_1^t u_1^T + M_0^t u_0^0 + M_1^t u_0^T. \tag{2.3}$$

Заметим, что если $T = 0$, то задача (2.2) превращается в задачу (1.2).

3. Редукция к абстрактной задаче

Проведем редукцию задачи (0.3),(0.4) для уравнений (0.2) к линейному уравнению соболевского типа второго порядка

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u \tag{3.1}$$

Через $L_2(G)$ обозначим множество

$$L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}.$$

Множество $L_2(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$< g, h >= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, ..., u_j, ...) : u_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено условие (0.4)$\}$. Множество $\mathfrak{U}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u^2_{jx}(x) + u^2_j(x)) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0, l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит $\mathfrak{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $L_2(G)$. Отождествим $L_2(G)$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{G}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $< \cdot, \cdot >$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{G}$ - банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{G}$ компактно.

Формулой

$$< Du, v >= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + a u_j(x) v_j(x)) dx,$$

где $a > 0, u, v \in \mathfrak{U}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathfrak{U}$. Поскольку

$$| < Du, v > | \leq C_1 \|u\|_{\mathfrak{U}} \|v\|_{\mathfrak{U}}$$

в силу неравенства Коши-Буняковского и

$$C_2 \|u\|^2_{\mathfrak{U}} \leq < Du, v > | \leq C_3 \|v\|^2_{\mathfrak{U}} \tag{3.2}$$

при всех $u, v \in \mathfrak{U}$ и некоторых $C_k > 0,\ k = 1, 2, 3$, то линейный оператор $D : \mathfrak{U} \to \mathfrak{G}$ непрерывен и инъективен. Кроме того, из первой оценки (3.2) вытекает сюръективность сопряженного оператора $D^* : \mathfrak{G}^* \to \mathfrak{U}^*$. В силу рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ и самосопряженности оператора D получаем, что оператор $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$ биективен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{U})$. Поскольку вложение $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{G}$ компактно, то оператор $D^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ является компактным. Значит, спектр оператора D вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Теперь фиксируем $\alpha, \beta > 0$ и $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$ и построим операторы

$$A = (\lambda - a)I + D,\ B_1 = \alpha((a - \lambda')I + D),\ B_0 = \beta((a - \lambda'')I + D).$$

Из сказанного следует

Теорема 4. *Операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{G})$, причем спектр $\sigma(A)$ оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.*

Итак, редукция задачи (0.2)-(0.4) к уравнению (3.1) закончена.

Из теоремы 4 вытекает, что оператор A – фредгольмов, причем $kerA = \{0\}$, если $0 \notin \sigma(A)$.

Лемма 6. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

(i) $0 \notin \sigma(A)$;

(ii) $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$;

(iii) $(0 \in \sigma(A)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.

Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ пучок $\vec{B} = (B_1, B_2)$ полиномиально A-ограничен.

Доказательство. (i) Пусть $0 \notin \sigma(A)$, тогда существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}; \mathfrak{U})$, причем операторы $A^{-1}B_1, A^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ по построению. Утверждение леммы очевидно.

Пусть $0 \in \sigma(A)$. Тогда любой вектор $\psi \in kerA \setminus \{0\}$ имеет вид

$$\psi = \sum_{k=1}^{l} a_k \psi_k,\ a_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{l} |a_k| > 0,$$

где $kerA = span\{\psi_0, ..., \psi_l\},\ l = dimkerA$.

(ii) Пусть $\lambda \neq \lambda'$. Тогда

$$B_1\psi = B_1(\sum_{k=1}^{l} a_k \psi_k) = \alpha(\lambda - \lambda') \sum_{k=1}^{l} a_k \psi_k \notin imA.$$

Значит, ни один собственный вектор оператора A не имеет относительно присоединенных векторов.

(iii) Если $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda'$, но $\lambda \neq \lambda''$, то

$$B_0\psi = B_0(\sum_{k=1}^{l} a_k\psi_k) = \beta(\lambda - \lambda'') \sum_{k=1}^{l} a_k\psi_k \notin imA.$$

Следовательно, и в этом случае ни один собственный вектор оператора A не имеет относительно присоединенных векторов высоты 1. Утверждение леммы имеет место в силу фредгольмовости оператора A [2]. $\square$

Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора D, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(G)$ функции.

Замечание 1. Очевидно, что $\sigma^A(\vec{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\}$, а $\mu_k^{1,2}$ — корни уравнения

$$(\lambda - (a + \lambda_k))\mu^2 + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))\mu + \beta(\lambda'' - (a + \lambda_k)) = 0.$$

Тогда в зависимости от ситуации:

(i) $\sigma^A(\vec{B}) =$

$$\left\{\mu_k^{1,2} = \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda' + a) \pm \sqrt{\alpha^2(\lambda' - a - \lambda_k)^2 - 4\beta(\lambda - a - \lambda_k)(\lambda'' - a - \lambda_k)}}{2(\lambda - a - \lambda_k)}\right\}.$$

(ii) $\sigma^A(\vec{B}) =$

$$\left\{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\right\} \bigcup \left\{\mu_l = \frac{\beta(\lambda_l - \lambda'' + a)}{\alpha(\lambda' - a - \lambda_l)} : \lambda = \lambda_l + a\right\}.$$

(iii) $\sigma^A(\vec{B}) = \left\{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\right\}$.

Замечание 2. Как нетрудно видеть, в случае $0 \in \sigma(A)$ и $\lambda = \lambda' = \lambda''$ пучок операторов $\overrightarrow{B}$ не будет полиномиально A-ограничен.

Замечание 3. В случаях (i) и (iii) имеет место выполнение условия

$$\int_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} d\mu = 0, \tag{A}$$

где $\gamma = \{|\mu| = r > a\}$, a — константа из определения полиномиальной A-ограниченности, и можно построить семейство M, N-функций уравнения (3.1)

$$M(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}(\mu A - B_1)e^{\mu t} d\mu =$$

$$= \sum{}' \left[\frac{\mu_k^1(\lambda - (a + \lambda_k)) + \alpha(\lambda' - (a + \lambda_k))}{(\lambda - (a + \lambda_k))(\mu_k^1 - \mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$+\frac{\mu_k^2(\lambda-(a+\lambda_k))+\alpha(\lambda'-(a+\lambda_k))}{(\lambda-(a+\lambda_k))(\mu_k^2-\mu_k^1)}e^{\mu_k^2 t}\Bigg] < \cdot,\varphi_k > \varphi_k;$$

$$N(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma(\mu^2A-\mu B_1-B_0)^{-1}Ae^{\mu t}d\mu=$$

$$=\sum{}'\,\frac{e^{\mu_k^1 t}-e^{\mu_k^2 t}}{(\mu_k^1-\mu_k^2)} < \cdot,\varphi_k > \varphi_k.$$

Здесь штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = a+\lambda_k$.

В случае (ii)

$$\int\limits_\gamma(\mu^2A-\mu B_1-B_0)^{-1}d\mu\neq 0,$$

поэтому он исключается из дальнейших рассмотрений.

Для постановки начально-конечной задачи необходимы проекторы P и P_0. Построим проектор

$$P=\begin{cases}\mathbb{I}, \text{ если выполнено (i)};\\ \mathbb{I}-\sum\limits_{\lambda_k=\lambda-a}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k, \text{ если выполнено (iii)}.\end{cases}$$

Для построения проектора P_0 выберем область $\Gamma_0\subset\mathbb{C}$, содержащую конечное множество точек A-спектра $\sigma_0^A(\vec{B})=\{\mu_k^{1,2}\}$ и такую, что $\partial\Gamma_0\bigcap\sigma_0^A(\vec{B})=\emptyset$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0=\gamma_0$ – контур. Построим проектор

$$P_0=\sum_{\lambda_k^i}\left\langle\cdot,\varphi_k^i\right\rangle\varphi_k^i.$$

Здесь $\{\lambda_k^i\}=\left\{\lambda_k\in\sigma(D):\mu_k^{1,2}\in\sigma_0^A(\vec{B}),\ \lambda_k\neq\lambda-a\right\}.$

Замечание 4. В случаях (i) и (iii) имеет место выполнение условия

$$\int\limits_{\gamma_0}(\mu^2A-\mu B_1-B_0)^{-1}d\mu=0 \qquad (A_0)$$

Теперь у нас все готово для постановки и изучения начально-конечной задачи для уравнения (3.1). Выберем произвольно векторы $u_k^0,\ u_k^T\in\mathfrak{U}, k=0,1$. Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{c}P_0(\dot u(0)-u_1^0)=0,\ P_0(u(0)-u_0^0)=0;\\ P_1(\dot u(T)-u_1^T)=0,\ P_1(u(T)-u_0^T)=0,\end{array} \qquad (3.3)$$

Здесь $P_1=P-P_0$.

По рецептам п.2 построим вырожденные M_0, N_0-функции. Для этого введем в рассмотрение множество индексов $\mathfrak{K}$ элементов множества $\{\lambda_k^i\}$. Тогда

$$M_0^t = \sum_{k\in\mathfrak{K}} \frac{e^{\mu_k^1 t} - e^{\mu_k^2 t}}{\mu_k^1 - \mu_k^2} \langle\cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k,$$

$$N_0^t = \sum_{k\in\mathfrak{K}} \left(\frac{\mu_k^1(\lambda-\lambda_k) + \alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)} e^{\mu_k^1 t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_k^2(\lambda-\lambda_k) + \alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)} e^{\mu_k^2 t} \right) \langle\cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Теперь в силу теоремы 3, леммы 6 и замечаний 3,4 имеет место

Теорема 5. *При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таком, что выполнено условие либо (i), либо(iii) леммы 6, и любых $T \in \mathbb{R}_+, u_k^0,\ u_k^T \in \mathfrak{U}, k = 0, 1,$ существует единственное решение задачи (3.3) для уравнения (0.2) с условиями (0.3),(0.4).*

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г. А. Свиридюку за постановку задачи и поддержку в работе.

Список литературы

1. Загребина, С. А. О задаче Шоуолтера-Сидорова / С. А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
2. Замышляева, А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А. А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, №4. – С. 45–54.
3. Келлер, А. В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А. В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345–346.
4. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н. А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185 – 1192.
5. Покорный, Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Свиридюк, Г.А. Уравнения соболевского типа на графах / Г.А. Свиридюк // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск, 2002. – С. 221 – 225.
7. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 11. – С. 47 – 52.
8. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977.
9. Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

A. A. Zamyshlyaeva, A.V. Yuzeeva

The initial-finish value problem for the Boussinesque-Löve equation defined on graph

Abstract. We investigate the initial-finish value problem for the Boussinesqe-Löve equation defined on graph by reducing it to the initial-finish value problem for the Sobolev type equation of the second order. We obtain theorems about the unique solvability of such problems.

Keywords: the Sobolev type equations, the phase space, the M,N-functions, the differential equations defined on graphs,the initial-finish value problem

Замышляева Алена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76, тел.: (351)2679339 (alzama@mail.ru)

Юзеева Алевтина Васильевна, Магнитогорский государственный университет

Zamyshlyaeva Alyona, professor, South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080 Phone: (351)2679339 (alzama@mail.ru)

Yuzeeva Alevtina, Magnitogorsk State University