Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 30—43

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.7

Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоуолтера-Сидорова и численные решения

А. В. Келлер
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. В статье дан обзор результатов, полученных автором в последние годы в области численных методов решения задач оптимального управления системами леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера-Сидорова. Базовым стал алгоритм численного решения задачи Шоуолтера-Сидорова. В статье приводятся численные решения прикладных задач.

Ключевые слова: системы леоньевского типа; численные решения; начальное условие Шоуолтера-Сидорова; оптимальное управление.

Численный алгоритм решения задачи Коши

$$x(0) = x_0 \tag{0.1}$$

для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Sx + g, \tag{0.2}$$

основанный на идеях теории полугрупп операторов предложен в [11], [12]. (Здесь S — квадратная матрица порядка n). Этот подход в [13], [14] был распространен на задачу (0.1) для вырожденной системы уравнений

$$L\dot{x} = Mx + f \tag{0.3}$$

с использованием идей теории вырожденных полугрупп операторов [16]. (Здесь L и M – квадратные матрицы, порядка n, причем $detL = 0$). Одним из важных случаев системы (0.3) является система межотраслевого баланса В.В. Леонтьева (см. в [10]), поэтому в [13] было предложено системы уравнений (0.3) называть «системами леонтьевского типа». В [13], [14] предложены алгоритмы, обеспечивающие высокое качество получаемого программного продукта, что выгодно отличает их от использовавшихся ранее методов Эйлера, Рунге-Кутта, итерационных и других методов (см. библиографию в [2], [3], [18]).

Для условий согласования и для построения фазового пространства (терминология соответствует [16]) необходимы проекторы, которые либо выражаются через контурные интегралы от матриц-функций, либо являются пределами матричных последовательностей. Ввиду неустойчивости любого проектора относительно малых возмущений такое вычисление матрицы проектора очень затруднительно. Поэтому, например в [4], при построении системы (0.3), моделирующей экономику коммунального хозяйства, пришлось ограничиться малыми городами, т.е. такими, где матрицы L и M имеют порядок не больше 10. Именно малость порядка матриц L и M сделало возможным вычисление проекторов «вручную».

Между тем в современной математической литературе существуют попытки теоретического осмысления так называемых «неклассических» задач для системы (0.3) ([6], [7]), основным достоинством некоторых является однозначная разрешимость при любых начальных данных $x_0 \in \Re^n$. Разработка численных алгоритмов решения таких задач с использованием начального условия Шоуолтера-Сидоррова

$$\left[(\alpha L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \tag{0.4}$$

позволит избавиться как от трудоемкого построения фазового пространства (и не менее трудоемкой редукции системы (0.3) к системе (0.2), заданной на нем), так и от трудоемкой проверки условий согласования.

Все это в полной мере относится к задачам оптимального управления системами леонтьевского типа

$$J(v) = \min_{u \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}} J(u) \tag{0.5}$$

с начальными условиями (0.4) для системы уравнений

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \tag{0.6}$$

где функционал качества $J = J(u)$ имеет вид

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| z^{(q)}(t) - z_0^{(q)} \right\|^2_{\mathfrak{R}} dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathfrak{R}} dt \tag{0.7}$$

Вектор-функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}$ такая, что выполняется условие (0.5), называется оптимальным управлением. В (0.7) $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$ и $\langle\cdot\rangle_{\mathfrak{R}}$ — евклидова норма и скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$ соответственно. Матрицы B и C — невырожденные квадратные порядка n, N_q — самосопряженные и положительно определенные матрицы порядка n, $q = 0, 1, ..., p+1$. Вектор-функция $Bu = Bu(t)$ задает управление, а вектор-функция $z(t) = Cx(t)$ – наблюдение, причем $z_0(t)$ — наблюдение, которое необходимо получить. В экономическом смысле $z_0(t)$ — плановые значения показателя, например, выпуска продукции. В [15] впервые рассмотрены задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа вида (0.3). В [17] рассмотрена задача оптимального управления (0.5) с обобщенным условием Шоуолтера-Сидорова $Px(0) = P(x_0)$ для уравнения (0.3). В [14] предложен алгоритм численного решения задачи оптимального управления системой леонтьевского типа с начальным условием Коши.

Следует подчеркнуть, что обсуждаемые задачи имеют не только экономические приложения но и технические, например, при моделировании динамически искаженных систем [19].

Основная цель данной статьи — обзор результатов численного решения различных задач для уравнений леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера-Сидорова. Статья кроме введения и Списка литературы содержит три части. В первой дается теоретическое обоснование алгоритма и основные этапы вычислений задачи (0.3), (0.4). Во второй части приводятся теоретическое обоснование алгоритма и основные этапы вычислений задачи (0.4)–(0.7). В третьей представлены примеры численного решения прикладных задач.

1. Задача Шоуолтера-Сидорова

Пусть L и M — квадратные матрицы порядка n, причем $detL = 0$. Следуя [5], гл. XII, п.2, пучок матриц $\mu L - M$ назовем регулярным, если существует число $\lambda \in \mathcal{C}$ такое, что $det(\lambda L - M) \neq 0$. Заметим, что условие регулярности пучка матриц эквивалентно условию L-регулярности матрицы M [13], [14]. Поэтому, как показано в [16], гл. 4, при условии регулярности пучка существуют единственным образом определяемые матрицы H, S, M_0, L_1, Q порядка n, такие, что L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ матрицы M разлагается в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{l=0}^{p} \mu^l H^l M_0 \,(I - Q) + \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{-l} S^{l-1} L_1 Q \qquad (1.1)$$

в окрестности бесконечно удаленной точки, причем H — нильпотентная матрица со степенью нильпотентности p, Q — идемпотентная матрица, MM_0, M_0M, L_1L и LL_1 – диагональные матрицы с нулями и единицами на главной диагонали. Поскольку $det(\lambda L - M) \neq 0$, то многочлен $det(\lambda L - M) = 0$ имеет не более n различных нулей, которые расположены в круге радиуса a, а значит, при $|\mu| > a$ разложение (1.1) имеет место. Точка ∞ называется устранимой особой точкой L-резольвенты матрицы M , если $p = 0$ в (1.1); и полюсом порядка $p \in N$ в противном случае. В дальнейшем, немного отходя от классического стандарта, будем называть устранимую особую точку полюсом порядка нуль. Итак, пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, и ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup N$; тогда можно выбрать число α и рассмотреть задачу Шоуолтера-Сидорова (0.4) для системы уравнений леонтьевского типа (0.3), где $R^L_\alpha(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ — правая L-резольвента матрицы M , в отличие от ее левой L -резольвенты $L^L_\alpha(M) = L(\alpha L - M)^{-1}$, а $f : [0,T] \longrightarrow \Re^n$ — некоторая вектор-функция.

Определение 1. *Решением системы (0.3) называется вектор-функция $x \in C^1((0;T);\Re^n) \cap C([0;T];\Re^n)$, удовлетворяющая уравнениям системы. Решение системы (0.3) называется решением задачи (0.3), (0.4), если оно вдобавок удовлетворяет уравнениям (0.4).*

Имеет место [5, гл.4]

Теорема 1. *Пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, $p \in \{0\} \cup N$ — порядок полюса L-резольвенты матрицы M , вектор-функция $f : [0,T] \longrightarrow \Re^n$ такова, что $\left(L^L_\alpha(M)\right)^p f \in C([0;T];\Re^n)$, а $I - \left(L^L_\alpha(M)\right)^p f \in C^{p+1}((0;T);\Re^n) \cap C^p([0;T];\Re^n)$. Тогда при любом $u_0 \in \Re^n$ существует единственное решение задачи (5), (6), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I-Q) f^{(q)}(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} Q f(s)\,ds.$$

Здесь $U^t = \dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu$, $R^t = \dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu$, $Q = \dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu$, контур $\gamma = \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$. Контурные интегралы не очень удобны в численных расчетах, поэтому в [13], [14] предложен другой подход, основанный на аппроксимациях типа Уиддера-Поста [[16], гл. 2]. Именно справедлива

Теорема 2. *Пусть пучок $\mu L - M$ регулярен,$p \in \{0\} \cup N$ — порядок полюса L-резольвенты матрицы M. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} L\right]^{k(p+1)} = U^t, \quad \lim_{k\to\infty}\left[k L^L_k(M)\right]^{p+1} = Q$$

,

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} L\right]^{k(p+1)-1}\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} = R^t,$$

Теперь пусть пучок $\mu L - M$ регулярен, $p \in \{0\} \cup N$ — порядок полюса L-резольвенты матрицы M в точке ∞ . Фиксируем $T \in \Re_+$, $t \in$

$(0,T)\,, k\in N$ и положим

$$U_k^t=\left[\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right]^{k(p+1)},\quad Q_k=\left[kL_k^L\left(M\right)\right]^{p+1},$$

$$R_k^t=\left[\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right]^{k(p+1)-1}\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1},$$

Выберем вектор $u_0\in\Re^n$, вектор-функцию $f\in C^{p+1}\left((0;T)\,;\Re^n\right)\cap C^p\left([0;T]\,;\Re^n\right)$ и построим вектор-функцию

$$u_k\left(t\right)=-\sum_{q=0}^{p}H^qM_0^{-1}\left(I-Q_k\right)f^{(q)}\left(t\right)+U_k^tu_0+\int_0^t R_k^{t-s}Q_kf\left(s\right)ds.$$

Теорема 3. *Пусть пучок $\mu L-M$ регулярен, $p\in\{0\}\cup N$ — порядок полюса L -резольвенты матрицы M в точке ∞. Тогда существует константа $C=C\left(L,M,T\right)\in\Re_+$ такая, что $\|u(t)-u_k(t)\|\le\frac{C}{k}$ при всех $t\in[0;T]$, $u_0\in\Re^n$ и $f\in C^{p+1}\left((0;T)\,;\Re^n\right)\cap C^p\left([0;T]\,;\Re^n\right)$.*

Доказательство. В основе используются оценки

$$\left\|\left[kL_k^L\left(M\right)\right]^{p+1}-Q\right\|\le\sum_{k=2}^{p+1}\frac{KC_{p+1}^k}{(p+1)\mu^{k-1}\beta^{p+1-k}}\left\|R_\beta^L(M)\right\|$$

$$\left\|U_k^tU^t\right\|\le\frac{(p+1)K^3t^2}{2\beta^{p-1}k}\left\|\left(\left(\beta L-M\right)^{-1}M\right)^2\right\|$$

взятые из [[16], гл. 2], где $\beta\in\Re_+$. □

Алгоритм 1. Построение алгоритма начнем с допущения, что $detM\neq 0$. Это допущение не ограничивает общности предыдущих рассуждений. Действительно, при условии регулярности пучка $\mu L-M$ можно сделать замену $u=e^{\lambda t}v$ в уравнении (0.3) и перейти к уравнению

$$L\dot v=(M-\lambda L)v+e^{-\lambda t}(y+Bu)\tag{1.2}$$

того же вида, что и (0.3), но $det(M-\lambda L)\neq 0$. Обратный переход от решений системы (1.2) к решениям системы (0.3) очевиден.

На первом этапе алгоритма нужно найти числа $\alpha\in R$ и $p\in\{0\}\cup N$. Можно разумеется, разложить L-резольвенту матрицы M в ряд (1.1) и тем самым сразу же найти эти числа. Однако, существует другой менее трудоемкий путь. Рассмотрим многочлен

$$det(\mu L-M)=a_n\mu^n+a_{n-1}\mu^{n-1}+...+a_1\mu+a_0.$$

Поскольку $a_n = detL$, то $a_n = 0$. Коэффициент a_l есть сумма слагаемых, каждое их которых есть произведение одного из миноров порядка l матрицы L на число, $l = 1, ..., n-1$ $a_0 = det(-M)$. Поэтому степень многочлена $det(\mu L - M)$ не выше $rankL$, т.е. ранга матрицы L. Итак,

$$det(\mu L - M) = a_q \mu^q + a_{q-1}\mu^{q-1} + ... + a_1\mu + a_0,$$

где $q = degdet(\mu L - M) \leq rankL$. Поэтому, если взять число $\alpha \in R$ таким, что

$$|\alpha| > max\left\{1, |a_q|^{-1}\left(\sum_{l=0}^{q}|\alpha_l|\right)\right\}$$

то $det(\alpha L - M) \neq 0$, и, значит, существует матрица $(\alpha L - M)^{-1}$. Далее, считая, что матрица M обратима, представим

$$det(\mu L - M) = detM det(\mu M^{-1}L - I).$$

Зная, что порядок полюса в точке ∞ резольвенты $(\mu I - M^{-1}L)^{-1}$ равен нулю, легко найти, что порядок полюса L-резольвенты матрицы M в точке ∞ равен $n-q$. Итак, числа α и $p = n-q$ найдены.

Тогда находя значение k, с которого можно начинать считать приближенные проекторы, получим, что при

$$k > \frac{1}{|\alpha|}\sum_{l=0}^{q}|\alpha_l| + 1.$$

мы не сможем оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Рассмотрим многочлен

$$det(\mu(p+1)L - tM) = a_q t^q \mu^q (p+1)^q + ... + a_1 t^{n-1}\mu + t^n a_0,$$

где $a_q \neq 0$, $q \leq rankL$. Тогда, учитывая $p = n-q$ при

$$\begin{aligned} k &> \frac{1}{|a_q|(n-q)^{n-q}}\sum_{l=0}^{q}|a_l|(n-q+1)^{n-l} + 1, \qquad |t| < 1 \\ k &> \frac{1}{|a_q||t|^q(n-q)^{n-q}}\sum_{l=0}^{q}|a_l|(n-q+1)^{n-l}|t|^l + 1, \ \ |t| > 1 \end{aligned}$$

мы не сможем не сможем оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Найдя значения, необходимые для приближенного вычисления проекторов, группы и др. операторов, вычисляется решение.

2. Задача оптимального управления системами леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера-Сидорова

В основу решения задачи (0.3)–(0.7) положены методы фазового пространства и разрешающих групп операторов, разработанные в [16]. В результате указанные выше проблемы удается разрешить: предложенный функционал (0.7) позволяет всегда выбрать неотрицательный план $z_0(t)$, а включение в него производных потребления $u(t)$ не допускает скачкообразного его изменения. Следует отметить, что задача (0.4)–(0.7) для более общего случая решена в [15]. В указанной статье сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности оптимального управления $v \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}$, минимизирующего функционал (0.7).

Воспользуемся результатом, изложенным в [15]. При любых y таких, что $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0 \in \mathfrak{W}_y$ ($\mathfrak{W}_y$ – фазовое пространство уравнения (0.6)) и $u \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathcal{U})$ существует единственное решение $x \in H^1(\mathcal{X})$ задачи Коши для уравнения (0.6), имеющего вид

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Bu)(t) + X^t x_0. \tag{2.1}$$

Зафиксируем в последнем уравнении $y = y(t)$ и x_0 и рассмотрим его как отображение

$$D : u \to x(u). \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Пусть матрица M L-регулярна, $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, и $x_0 \in \mathfrak{W}_y$ фиксированы. Тогда отображение $D : \overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathcal{U}) \to H^1(\mathcal{X})$, определенное в (2.2), непрерывно.*

Рассмотрим множество вектор-функций, зависящее от $n \times m + 1$ параметров

$$u(t) = \Phi(t, a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm}) \tag{2.3}$$

и такое, что при всех значениях параметров вектор-функции множества принадлежат $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}$. Пусть множество (2.3) всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}$. Ограничив множество допустимых управлений фектор-функциями множества (2.3), найдем среди них ту, которая минимизмрует функционал качества (0.7). Подставив в него (2.3) вместо u, выполнив необходимые преобразования, получим зависимость функционала от $n \times m$ переменных $J = J(a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm})$. После этого получаем значения параметров $\widehat{a_{11}}, \widehat{a_{12}}, ..., \widehat{a_{nm}}$, дающие минимум функции $J(a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm})$. Выбрав из множества (2.3) вектор-функцию, отвечающую именно этим значениям параметров, мы получим требуемое приближенное решение

$$\widehat{u(t)} = \Phi(t, \widehat{a_{11}}, \widehat{a_{12}}, ..., \widehat{a_{nm}}).$$

Введем в рассмотрение ряд множеств функций

$$u_m(t) = \Phi_m(t, a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm}),\ m = 1, 2, ...,$$

каждое из которых шире предыдущего в результате добавления дополнительных параметров. Через $\widehat{u}_m(t)$ обозначим m-ое приближение — вектор-функцию, дающую из всех фектор-функций m-го множества наименьшее значение функционала J.

Теорема 4. *Пусть Φ_m всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}$, тогда $J\left(\widehat{u}_m(t)\right) \to J(v)$ при $m \to \infty$.*

Доказательство приведено в [9]

Теорема 5. *Для любого $u_m \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{m}$ справедлива оценка*

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \left\| u_m^{(q)}(t) - v_t^{(q)} \right\|^2_{\mathfrak{U}} dt \le max \left\| \widehat{N}_q(t) \right\|^2 J(u_m),$$

где матрицы N_q из (0.7) и $\widehat{N}_q$ связаны равенством $N_q = \widehat{N}_q^T \widehat{N}_q$.

Доказательство приведено в [9]

В качестве управлений при построении итерационного процесса будем рассматривать многочлены вида

$$u_m(t) = \sum_{i=p+1}^{m} a_i t^i. \tag{2.4}$$

В качестве множества допустимых управлений будем расматривать шар

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^{\tau} \left\| u_m^{(q)}(t) \right\|^2 dt \le d, \tag{2.5}$$

где m — максимальная степень многочлена, d — неотрицательная постоянная величина, a_i — коэффициенты многочлена.

Теорема 6. *Множество многочленов вида (2.4) всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}$.*

Доказательство. Докажем утверждение при $p = 1$. В этом случае функции управления должны отвечать условиям $u(0) = 0,\ u'(0) = 0$. По теореме Вейерштрасса найдется многочлен $P_1(t)$ степени M такой, что $|u''(t) - P_1(t)| < \frac{\epsilon}{2T^2}$, при $t \in [0, T]$. Положим теперь $P(t) = \int_0^t \int_0^t P_1(\tau) d\tau$, тогда имеем

$$|u(t) - P(t)| = \left| \int_0^t \int_0^t \left(u''(\tau) - P_1(\tau)\right) d\tau \right| < \int_0^t \int_0^t \frac{\epsilon}{2T^2} < \epsilon.$$

Из выражения $P(t)$ ясно, что многочлен вида

$$u_m(t) = \sum_{i=2}^{m} a_i t^i.$$

Доказательство для всех $p > 1$ проводится аналогично. Таким образом при $m \to \infty$

$$\sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \|u_m^{(q)}(t) - u_t^{(q)}\|^2 dt \to 0.$$

$\square$

Алгоритм 2. Алгоритм решения задачи оптимального управления состоит из двух основных этапов.

Этап 1 практически совпадает с алгоритмом решения задачи Шоуолтера-Сидорова, представленном в п.1. Отличие заключается в том, что решение $x(t)$ на этом не вычисляется.

Этап 2 заключается в поиске многочлена, минимизирующего функционал. Перепишем функционал (0.7) в виде

$$\begin{aligned} J(u) \ = \ & \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \|C(-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)\tfrac{d^k}{dt^k}(f(t) + B\sum_{i=2}^{m} a_i t^i) + U^t x_0 + \\ & + \int_0^\tau R^{t-s} Q(f(s) + B\sum_{i=2}^{m} a_i s^i)ds)^{(q)} - z_0^{(q)}\|_{\mathfrak{N}}^2 dt + \\ & + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle N_q(\sum_{i=2}^{m} a_i t^i)^{(q)}(t), (\sum_{i=2}^{m} a_i t^i)^{(q)}(t)\rangle_{\mathfrak{N}} dt. \end{aligned}$$

Пользуясь свойством интеграла и производной, вынесем коэффициенты многочлена допустимого управления за знаки интеграла и производной. Перепишем функционал (0.7) в виде функций от переменных u_m — коэффициентов многочлена допустимого управления. Затем воспользуемся алгоритмом минимизации функции нескольких переменных. При его реализации будем учитывать условие принадлежности многочлена управления множеству допустимых управлений.

Обозначим u_{mj} — вектор коэффициентов многочлена, которым приближаем оптимальное управление. В качестве u_{m0} возьмем нулевой вектор, так как в этом случае всегда будет выполняться условие принадлежности управления множеству допустимых управлений (шару заданного радиуса). В дальнейшем для краткости это условие будем называть *условием принадлежности*. Рассмотрим пошагово алгоритм минимизации функции нескольких переменных.

Шаг 1. Вычисляется значение функционала в точке $J(u_{mj})$.

Шаг 2. Затем вычисляется значение $u_{mj+1} = u_{mj} + h$, h — вектор, i-ый коэффициент которого равен максимальной величине шага изменения переменных u.

Шаг 3. Вычисляется значение функционала $J(u_{mj+1})$. Если $J(u_{mj}) > J(u_{mj+1})$ и одновременно выполняется условие принадлежности, то повторяются шаги 1 и 2. Если одно из данных условий не выполняется, то вычисляется новое значение шага изменения переменной (в нашем случае — умножаем значение шага изменения на заданную константу $0 < k < 1$).

Шаг 4. Повторяем шаги 1–4, каждый раз умножая вектор h на k.

Шаг 5. Если заданное большое число раз (например, 1000) шаги 1–4 повторяются, то будем считать достаточным приближение к границе множества допустимых управлений или к минимуму функционала по i-ым коэффициентам вектора u. В таком случае, можно переходить к минимизации функционала, уменьшая коэффициенты вектора u. Для этого повторяем шаги с 1 по 4, предварительно умножив вектор h на -1.

Шаг 6. При достижении вновь границы множества допустимых управлений или минимума функционала по i-ым коэффициентам вектора u, можно перейти к изменению $i+1$ коэффициентов вектора управлений и повторить шаги с 1 по 6 снова.

Предложенный алгоритм отличается от метода градиентного спуска большей простотой вычислений. Вместе с тем необходимо отметить, что метод градиентного спуска позволяет сразу выявить направление изменения вектора u, дающее наибольшее сокращение значений функционала $J(u)$. Таким образом, вычисляя с помощью предложенного алгоритма коэффициенты u_m, при которых функционал (0.7) минимален, будем определять многочлен степени m, минимизирующий функционал на множестве многочленов степени m.

3. Примеры

Пример 1. Пример Леонтьева

Взяв в качестве матриц

$$L = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{20} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{20} \\ \frac{-7}{25} & \frac{10304189}{11996000} & \frac{-70836357}{119960000} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{13}{15} \end{pmatrix}$$

Если переобозначить $L = B$, $M = I - A$, то матрицы B и A почти совпадут с матрицами из классического примера [10]. «Почти» означает, что элементы m_{22} и m_{23} подобраны специально с целью упростить вычисления и отличаются от приведенных в примере чисел $\frac{22}{25}$ и $-\frac{3}{5}$ на величины $-\frac{252291}{11996000}$ и $\frac{1139643}{119960000}$ соответственно.

В. В. Леонтьев рассматривал взаимосвязи между тремя отраслями экономики — сельским хозяйством, промышленностью и домашними хозяйствами. Элемент матрицы a_{ij} матрицы A означает количество продукции i-ой отрасли необходимой для производства единицы продукции j-ой отрасли. Элемент матрицы b_{ij} матрицы B представляет удельные капиталовложения материалов отрасли i используемые отраслью j для прироста продукции.

Далее по формулам, приведенным в части 1 данной статьи построим точное и приближенное решение. Приведем точное решение и результаты счета по алгоритму без комментариев, взяв при этом в качестве $f = (2t; 2t; 2t)$. Для простоты приведем расчеты при $t = 0, 1/12, 1/6, ...2/3$

Таблица 1.

Точное решение задачи Шоуолтера-Сидорова для примера Леонтьева

t	x_1	x_2	x_3
0	1	1	0,7692307692
1/12	1,079594653	1,115125754	0,6545486955
1/6	1,211221782	1,260474368	0,5698255794
1/4	1,399261210	1,434354380	0,5156284632
1/3	1,649051640	1,634491393	0,4925503470
5/12	1,967129067	1,857877706	0,5012141312
1/2	2,361526596	2,100584518	0,5422779145
7/12	2,842149925	2,357527831	0,6164435987
2/3	3,421246553	2,622172543	0,724463383

Таблица 2.

Приближенное решение задачи Шоуолтера-Сидорова для примера Леонтьева

t	x_1	x_2	x_3
0	1	1	0,7692307692
1/12	1,0795957679	1,1151265428	0,6545494099
1/6	1,2112238218	1,260475827	0,5698269423
1/4	1,3992644345	1,4343566045	0,5156305665
1/3	1,6490560881	1,6344943024	0,4925530898
5/12	1,9671347889	1,8578811956	0,5012174099
1/2	2,36153371	2,1005887151	0,5422821007
7/12	2,8421584126	2,3575325354	0,6164483714
2/3	3,4212567008	2,622177848	0,7244687609

Пример 2. В качестве примера рассмотрим модель модернизированного устройства, приведенную в [1]. Модель сводится к системе леонтьевского типа

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\dot{z}=\begin{pmatrix}-44&0&0\\-117&-16&0\\0&1&-1\end{pmatrix}z+\begin{pmatrix}-0,594&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}u,$$

где $z = (x_1(t), x_2(t), y(t))$, $z_0 = (0,0,0)$. Здесь $x = x(t)$ — вектор-функция состояний измерительного устройства, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $u = u(t)$, $y = y(t)$ – вектор функции входа и выхода сигнала соответственно, причем $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_l)$, Используя начальное условие Шоуолтера-Сидорова получим точное и приближенное решение Поскольку наблюдения показывают, что вектор-функция выхода при начальных значениях t имеет скачок, то было положено $-0,594u(t) = A\sin^2\omega t$. По алгоритму, разработанному во втором разделе статьи, получено приближенное решение задачи (2.3). При расчете взяты значения параметров $A = 15$, $\omega = \pi$.

Таблица 3.

Точное и приближенное решение задачи динамического измерения

	Точное решение			Приближенное решение		
t	x_1	x_2	y	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0	0	0	0
1/12	-0,013772	0,029317	0,029317	-0,013771	0,029312	0,029312
1/6	-0,066270	0,237976	0,237976	-0,066267	0,237938	0,237938
1/4	-0,14660	0,67492	0,67492	-0,146596	0,674819	0,674819
1/3	-0,233320	1,253870	1,253870	-0,233314	1,253692	1,253692
5/12	-0,303195	1,827893	1,827893	-0,303189	1,827654	1,827654
1/2	-0,337503	2,245344	2,245344	-0,337497	2,245077	2,245508
7/12	-0,327050	2,394938	2,394938	-0,327046	2,394683	2,394683
2/3	-0,274637	2,236741	2,236741	-0,274635	2,236538	2,236538
3/4	-0,194309	1,813182	1,813182	-0,194309	1,813055	1,813055
5/6	-0,107589	1,237764	1,237764	-0,107590	1,237718	1,237718
11/12	-0,037714	0,664672	0,664672	-0,037715	0,664689	0,664689
1	-0,003406	0,247466	0,247466	-0,003407	0,247513	0,247513

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет численно решение прикладных задач с достаточной степенью точности.

Список литературы

1. Бизяев, М.Н. Динамические модели и алгоритмы восстановления динамически искаженных сигналов измерительных систем в скользящем режиме: дисс. ... канд. тех. наук / М. Н. Бизяев. – Челябинск: ЮУрГУ, 2004.
2. Бояринцев, Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 2000.
3. Бояринцев, Ю.Е. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев, И. В. Орлова. – Новосибирск: Наука, 2006.
4. Брычев, С.В. Исследование математической модели экономики коммунального хозяйства малых городов / С. В. Брычев. – Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Челябинский гос. ун-т, 2002.
5. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц, 4-ое издание / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
6. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера-Сидорова / С. А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
7. Замышляева, А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 3. – С. 45–54.
8. Келлер, А.В. Алгоритм численного решения задачи Шоуолтера-Сидорова для систем леонтьевского типа / А. В. Келлер // Методы оптимизации и их приложения: труды XIV Байкальской школы-семинара, Иркутск-Северобайкальск. – 2008. – С. 343–350.
9. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Шоуолтера-Сидорова / А. В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия Мат. моделирование и программирование. – 2008. – №27 (127). Выпуск 2. – С.50–56.
10. Леонтьев, В.В. Межотраслевая экономика / В. В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997.
11. Павлов, Б.В. Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений./ Б. В. Павлов, А. Я. Повзнер // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – Т.13, №4. – С. 1056–1059.
12. Павлов, Б.В. Численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами /Б. В. Павлов, О. Е. Радионова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34, №4. – С. 622–627.
13. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г. А. Свиридюк, С.В. Брычев // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 46–52.
14. Свиридюк, Г.А. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / Г. А. Свиридюк, И. В. Бурлачко //ЖВМиМФ. – 2003. – Т.43, № 11. – С. 1677–1683.
15. Свиридюк, Г. А. Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк, А. А. Ефремов // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 12. – С. 75–83.
16. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semi-groups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. -Utrecht-Boston-Koln-Tokyo: VSP, 2003.

17. Федоров, В.Е. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. –Т.9, № 2. – С. 92–102.
18. Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003.
19. Шестаков, А.Л. Динамические измерение как задача оптимального управления / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк, Е. В. Захарова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, № 4. – С. 732 – 733.

A. V. Keller The Leontief type systems: classes of problems with the Showalter-Sidorov intial condition and numerical solving

Abstract. This paper contains the review of the results obtained by the author during the last years in the sphere of a numerical methods of solving optimal control problem for the Leontief type system with the Showalter-Sidorov intial condition. The base of the research is a numerical algorithm for solving Showalter-Sidorov problem. The article includes numerical solutions for some concrete problems.

Keywords: the Leontief type system; a numerical solving; the Showalter-Sidorov intial condition; optimal control.

Келлер Алевтина Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцет, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. В. Ленина, 76 тел.: (351)9093529 (alevtinak@inbox.ru)

Alevtina Keller, professor, South-Ural State University, 76, V. Lenins St., Chelyabinsk, 454080 Phone: (351)9093529 (alevtinak@inbox.ru)