



УДК 518.517

О блочных разностных схемах для дифференциально-алгебраических уравнений

М. В. Булатов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Л. С. Соловарова

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В работе предложены блочные разностные схемы для численного решения начальной задачи линейных дифференциально-алгебраических уравнений. Проведен детальный анализ таких схем первого и второго порядка точности на модельных примерах и показано их преимущество над известными неявными методами первого и второго порядков. Приведено описание общего вида блочных разностных схем.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, индекс, блочные разностные схемы.

1. Введение

Некоторые математические модели, описывающие ряд природных процессов, включают в себя взаимосвязанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка и конечномерные уравнения. Такие задачи можно записать в виде системы ОДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной, при этом их принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Для таких систем, как правило, задают начальные или краевые условия, которые в отличие от условий для ОДУ, должны быть согласованы с правой частью.

Построение эффективных методов численного решения ДАУ весьма сложная, с точки зрения вычислительной математики, задача, которая имеет ряд принципиальных отличий от методов решения ОДУ. В частности принципиально нельзя применять явные разностные схемы (в силу вырожденности матрицы перед производной), а ряд неявных схем могут быть неустойчивыми. В некоторых случаях хорошо себя зарекомендовали многошаговые методы, основанные на формуле диффе-

ренцирования назад (ФДН методы) [1, 2], неявные методы Рунге–Кутты (РК) [1, 2] и блочные методы [3, 4].

В данной работе для численного решения линейных ДАУ предложены блочные разностные схемы. При построении таких схем используется иная запись исходной задачи. Преимущества таких алгоритмов над ранее разработанными методами проиллюстрированы на известных тестовых примерах.

2. Постановка задачи и примеры

Рассмотрим задачу

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — $(n \times n)$ -матрицы, $f(t)$ — заданная, $x(t)$ — искомая n -мерные вектор-функции, x_0 — заданный n -мерный вектор.

Системы вида (1) принято называть ДАУ, если

$$\det A(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3)$$

Всюду в дальнейшем изложении будем предполагать, что для системы (1) выполнено условие (3), начальное условие (2) согласовано с правой частью (1), т.е. рассматриваемая задача имеет решение. Под решением такой задачи будем понимать любую достаточно гладкую вектор-функцию, обращающую (1) в тождество и удовлетворяющую начальному условию (2).

Характеристикой сложности рассматриваемого класса задач является понятие индекса, которое имеет несколько определений. Приведем одно из них (см., например, [3]).

Определение 1. Система (1) имеет решение типа Коши индекса r , если существуют гладкие $(n \times n)$ -матрицы $\Phi(t)$, $K_0(t, \tau)$, $K_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, причем $\text{rank} \Phi(t) = k = \text{const} \quad \forall t \in [0, 1]$ такие, что линейная комбинация

$$\psi(t, c) = \Phi(t)c + \int_0^t K_0(t, \tau)f(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^r K_j(t)f^{(j-1)}(t) \quad (4)$$

является решением системы (1) и на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ нет решений, отличных от (4). Здесь $c \in R^n$, $r \leq \max_{t \in [0, 1]} \text{rank} A(t)$.

Приведем примеры, которые иллюстрируют данное определение.

Задача

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

имеет единственное решение, которое не зависит от начальных данных: $u(t) = 0, v(t) = f(t)$, однако на отрезке $[\alpha, \beta] : \alpha > 0$ этот пример имеет решение $u(t) = c/t, v(t) = 0$, где c —любое число.

Система, похожая на предыдущую

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

имеет единственное решение, которое не зависит от начальных данных и отрезка интегрирования: $v(t) = f(t), u(t) = -tf'(t)$.

Если коэффициенты матриц $A(t)$ и $B(t)$ являются вещественно-аналитическими функциями, и система (1) имеет общее решение индекса r , то известно (см., например, [2]), что существуют невырожденные для любого $t \in [0, 1]$ матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ с вещественно-аналитическими коэффициентами такие, что

$$P(t)A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix},$$

$$P(t)A(t)\dot{Q}(t) + P(t)B(t)Q(t) = \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где E_k и E_{n-k} — единичные матрицы размером k и $n - k$ соответственно (k то же самое число, что и в определении 1), $J(t)$ — $(k \times k)$ -матрица, $N(t) = \text{diag}\{N_1, N_2, \dots, N_s\}$, N_j , $j = 1, 2, \dots, s$, — верхнетреугольные матрицы с нулевыми квадратными блоками на диагонали, максимальное число которых равно r — индексу (1).

Существуют и другие определения индекса (1), однако в случае вещественно-аналитических коэффициентов матриц $A(t)$ и $B(t)$ в монографии [5] показана их эквивалентность.

Если ДАУ имеет индекс 2 и выше, то принято называть их ДАУ высокого индекса. Для численного решения таких задач ряд стандартных неявных методов, эффективных для численного решения жестких ОДУ, является принципиально неприменим или порождает неустойчивый процесс. Для наглядности иллюстрацию проведем на неявной схеме Эйлера.

Пример 1 (см., напр., [2])

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 + \alpha \\ 1 & \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1], \quad (6)$$

где α — числовой параметр.

Опуская элементарные выкладки, легко показать, что данная система имеет единственное решение $u = g - \alpha tv$, $v = f - g'$ и ее индекс равен двум. Применим неявный метод Эйлера для данного примера

$$A_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + hB_{i+1}x_{i+1} = \psi_{i+1}, \quad (7)$$

где $x = (u, v)^T$, $A_{i+1} = A(t_{i+1})$, $B_{i+1} = B(t_{i+1})$, $\psi_{i+1} = h(f(t_{i+1}), g(t_{i+1}))^T$, $v_0 = f(0) - g'(t)|_{t=0}$, $u_0 = g(0)$, $t_{i+1} = (i+1)h$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 1/h$.

Опуская элементарные выкладки, получим, что

$$x_{i+1} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha t_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_i + (A_{i+1} + hB_{i+1})^{-1} \psi_{i+1},$$

т.е. при $\alpha < -1/2$ метод неустойчив, а при $\alpha = -1$ принципиально не применим из-за сингулярности матрицы $(A_{i+1} + hB_{i+1})$.

Пример 2 [6, 7]. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \quad (8)$$

где α и β — скалярные параметры. Обозначим $q(t) = \alpha + \beta t - 1$. Если $q(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$, то ДАУ (8) имеет решение типа Коши индекса 2 (см. формулу (4))

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{q(t)} \left[\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -t & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} \right]. \quad (9)$$

Обозначим $\det(A(t) + hB(t)) = h^2 s(t)$, где $s(t) = \alpha + \beta t$. Применяя для данного примера неявный метод Эйлера и опуская выкладки, получим

$$x_{i+1} = \frac{1}{s(t_{i+1})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t_{i+1} & 0 \end{pmatrix} x_i + \varphi_{i+1} \quad (10)$$

где φ_{i+1} некоторые вектор-функции, конкретный вид которых для нас, в данном случае, не важен.

Если α и β выбраны таким образом, что $|s(t)| < 1 \forall t \in [a, b]$, то получим неустойчивый процесс. С другой стороны, для любых фиксированных параметров α и β можно выбрать отрезок $[a, b]$ так, что $|s(t)| < 1 \forall t \in [a, b]$ и $q(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Таким образом, для данного примера можно по заданным параметрам α и β можно указать отрезок $[a, b]$ или по заданному отрезку $[a, b]$ указать параметры α и β таким образом, что неявный метод Эйлера будет неустойчивым.

К настоящему времени хорошо известно, что для численного решения ДАУ (1), (3) индекса 1 можно применять ряд неявных методов, разработанных для жестких ОДУ. Ниже приведены два примера жестких ДАУ индекса 1, которые иллюстрируют неэффективность неявного

метода Эйлера (аналог того, что для численного решения жестких ОДУ применять явный метод Эйлера).

Пример 3 [8].

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta(\alpha - 1) & -\beta\alpha t \\ \alpha - 1 & \alpha t - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

где $\alpha \neq 1$ и β — скалярные параметры. Данный пример имеет общее решение

$$u = \frac{1 - \alpha t}{\alpha - 1} v, \quad v = e^{(\alpha - \beta)t} v(0).$$

При $\alpha < \beta$ и $t \rightarrow \infty$ имеем $u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$.

Применяя для данного примера неявный метод Эйлера, получим

$$u_{i+1} = \frac{1 - \alpha t_{i+1}}{\alpha - 1} v_{i+1}, \quad v_{i+1} = \frac{1 + \alpha h}{1 + \beta h} v_i. \quad (12)$$

Таким образом, данный метод будет устойчив тогда и только тогда, когда выполнено весьма жесткое ограничение на шаг интегрирования $|1 + h\alpha| < |1 + h\beta|$.

Пример 4 [9].

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha(1 - \lambda t) \\ -1 & 1 + \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u(0) = v(0) = 1, \quad (13)$$

где α и λ — скалярные параметры. Точное решение данного примера $u = (1 + \alpha t)e^{\lambda t}$, $v = e^{\lambda t}$. При $\lambda < 0$ и $t \rightarrow \infty$ имеем $u \rightarrow 0$ и $v \rightarrow 0$.

По аналогии с предыдущим примером, неявный метод Эйлера для данного случая дает

$$\begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = R(z, \omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 + \alpha t_{i+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $R(z, \omega) = \frac{1 - \omega}{1 - z - \omega}$, $\omega = \alpha h$, $z = \lambda h$.

$R(z, \omega)$ называют функцией устойчивости [9] для ДАУ по аналогии с функцией устойчивости для модельного уравнения Далквиста $\dot{x} = \lambda x$. Видно, что для любого $z < 0$ можно подобрать такое ω , что $|R(z, \omega)| > 1$, т.е. метод будет неустойчивым. В работе [9] показано, что ряд неявных методов Рунге–Кутты (РК) для данного примера также неэффективен: для устойчивости требуется достаточно малый шаг интегрирования.

Вышеприведенные примеры показывают необходимость разработки эффективных разностных схем для ДАУ.

3. Схемы первого и второго порядков

Одним из подходов к построению эффективных алгоритмов для ДАУ является разработка блочных методов [3, 4], которые включают в себя как частные случаи линейные многошаговые методы (ММ) и некоторые методы РК. Принципиальным отличием таких схем от ММ и методов РК является различная аппроксимация матриц $A(t)$ и $B(t)$ в узлах сетки. Приведем две таких схемы

$$A_i(x_{i+1} - x_i) + hB_{i+1}x_{i+1} = hf_{i+1}, \quad (15)$$

$$A_{i+1/2}(x_{i+1} - x_i) + \frac{h}{2}(B_{i+1}x_{i+1} + B_ix_i) = \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i), \quad (16)$$

где $A_{i+1/2} = A(t_i + h/2)$, x_i — аппроксимация $x(t_i)$.

При реализации схем (15) и (16) на каждом шаге нам необходимо решать системы алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицами $A_i + hB_{i+1}$ и $A_{i+1/2} + (h/2)B_{i+1}$ соответственно. Несмотря на то, что матрица $A(t) + hB(t)$ может быть тождественно вырожденной, видно, что матрицы $A_i + hB_{i+1}$ и $A_{i+1/2} + (h/2)B_{i+1}$ могут быть невырожденными. Опуская выкладки, приведем анализ схемы (15) для примеров 1–4.

Для примера 1 схема (15) дает

$$u_{i+1} = g_{i+1} - \alpha t_{i+1}v_{i+1}, \quad v_{i+1} = f_{i+1} - \frac{(g_{i+1} - g_i)}{h}.$$

Для примера 2 получим

$$u_{i+1} = \frac{1}{\alpha + \beta t_{i+1} - 1} \left(f_{i+1} + \beta g_{i+1} - \frac{(g_{i+1} - g_i)}{h} \right), \quad v_{i+1} = g_i - tu_{i+1}.$$

Таким образом, схема (15) для данных примеров сходится к точному решению с первым порядком при любых (за исключением для примера 2 $\alpha + \beta t - 1 \neq 0$) значениях параметров.

Для жестких ДАУ индекса 1, примеры 3 и 4, соответственно, получим

$$u_{i+1} = \frac{1 - \alpha t_{i+1}}{\alpha - 1} v_{i+1}, \quad v_{i+1} = \frac{1}{1 - h(\alpha - \beta)} v_i,$$

$$u_{i+1} = (1 + \alpha t_{i+1}) v_{i+1}, \quad v_{i+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} v_i.$$

Сравнивая последние формулы с формулами (12) и (14), замечаем принципиальное отличие и очевидную предпочтительность метода (15) над неявным методом Эйлера.

Перед формулировкой условий сходимости таких схем к точному решению исходной задачи (1), (2) приведем без доказательства вспомогательные результаты.

Лемма 1. Если система (1) имеет индекс 2 и матрица P в формуле (5) является постоянной, то

$$\left\| \prod_{j=0}^i (A_j + hB_{j+1})^{-1} A_j \right\| \leq K < \infty, i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Лемма 2. Если система (1) имеет индекс 1, то

$$\left\| \prod_{j=0}^i (A_j + hB_{j+1})^{-1} A_j \right\| \leq K < \infty, i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Лемма 3. Если система (1) имеет индекс 1, то

$$\left\| \prod_{j=0}^i (A_{j+h/2} + h/2B_{j+1})^{-1} (A_{j+h/2} - h/2B_j) \right\| \leq K < \infty, i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Относительно сходимости схемы (15) справедлива

Теорема 1. Пусть задача (1)–(2) имеет индекс 2 и матрица $P(t) = P$ в формуле (5) постоянная. Тогда справедлива оценка

$$\|x_i - x(t_i)\| = O(h), i = 1, 2, \dots, N.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на лемме 1 и том, что локальная погрешность аппроксимации имеет второй порядок. \square

Относительно сходимости схемы (16) справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть задача (1)–(2) имеет индекс 1, элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функции $f(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми. Тогда справедлива оценка

$$\|x_i - x(t_i)\| = O(h), i = 1, 2, \dots, N.$$

Теорема 3. Пусть задача (1)–(2) имеет индекс 1 и элементы $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда справедлива оценка

$$\|x_i - x(t_i)\| = O(h^2), i = 1, 2, \dots, N.$$

Доказательство данных теорем основано на леммах 2 и 3 соответственно и на оценке локальной погрешности формул Эйлера и трапеций.

Пока не получены конструктивные результаты о сходимости схемы (16) для ДАУ индекса 2. Тем не менее результаты расчетов позволяют надеяться на работоспособность этой схемы и для ДАУ индекса 2.

В заключение этого раздела приведем результаты расчетов модельных примеров по схеме (16), оформленные в виде таблиц.

Для примера 4 при следующих значениях входных данных $\lambda = -20$; $\alpha = 30$, $v(0) = 1$ имеем

h	0.2	0.1	0.05	0.025
er_u	$1.27 \cdot 10^{-1}$	$4.26 \cdot 10^{-7}$	$1.83 \cdot 10^{-7}$	$6.63 \cdot 10^{-8}$
er_v	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-8}$	$6.2 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-9}$

Здесь h — шаг сетки, $er_u = |u(1) - u_N|$, $er_v = |v(1) - v_N|$.

Приведем пример индекса 2 с сингулярным пучком $\lambda A(t) + B(t)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & -te^{-t} \\ -e^t & -te^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$x(0) = (1, 1)^T$, который имеет точное решение $x(t) = (e^t, e^{-t})^T$. Результаты расчетов по схеме (16) представлены в таблице

h	0.2	0.1	0.05	0.025
er_u	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$

В этой таблице принято обозначение $er = \max\{|u(1) - u_N|, |v(1) - v_N|\}$.

4. Блочные методы

Если для численного решения примеров, приведенных во втором разделе применить разностную схему типа Эйлера вида

$$A_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + hB_i x_{i+1} = hf_{i+1}, \quad (17)$$

то опуская несложные выкладки легко убедиться, что данная схема, также как и стандартный неявный метод Эйлера, будет неустойчива для первого и второго примеров и неэффективной для примеров 3 и 4 (требуется малый шаг интегрирования) при тех же значениях параметров. Поясним почему так происходит.

Перепишем исходную систему (1) в виде:

$$(A(t)x(t))' + (B(t) - A'(t))x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (18)$$

и для задачи (18), (2) применим неявный метод Эйлера. Имеем

$$A_{i+1}x_{i+1} - A_i x_i + h(B_{i+1} - A'_{i+1})x_{i+1} =$$

$$(A_{i+1} - A'_{i+1})x_{i+1} - A_i x_i + hB_{i+1}x_{i+1} = hf_{i+1}.$$

Учитывая, что $A_{i+1} - A'_{i+1} \approx A_i$ из последней схемы получим метод (15).

Запись (18) позволяет строить методы типа блочных для исходной задачи (1), (2) высокого порядка точности, которые были исследованы и обоснованы для задачи (1), (2) в статьях [3, 4, 6]. Приведем описание частного случая таких схем для задачи (18), (2), а именно интерполяционный вариант.

На отрезке $[0, 1]$ зададим равномерную сетку $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. $h = 1/N$. Предположим, что достаточно точно вычислены стартовые значения $x(h), x(2h), \dots, x(mh)$, которые обозначим как x_1, x_2, \dots, x_m .

Используя точки $x_{i+s}, x_{i+s-1}, \dots, x_{i-m}$, $i = m, m+1, \dots, N-s$ построим интерполяционный полином степени $m+s$. Подставим данный полином в (18) и потребуем чтобы в точках сетки $t_{i+s}, t_{i+s-1}, \dots, t_{i+1}$ данное уравнение обращалось в тождество. В этом мы будем иметь s -стадийные, m -шаговые блочные схемы вида

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{m+s} k_j^1 A_{i+s-j} x_{i+s-j} + hC_{i+1} x_{i+1} = hf_{i+1} \\ \sum_{j=0}^{m+s} k_j^2 A_{i+s-j} x_{i+s-j} + hC_{i+2} x_{i+2} = hf_{i+2} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{m+s} k_j^s A_{i+s-j} x_{i+s-j} + hC_{i+s} x_{i+s} = hf_{i+s} \end{cases}, \quad (19)$$

где $C_q = B(t_q) - A'(t_q)$.

Как мы видим при реализации схем (19) необходимо вычислять $A'(t)$ в точках сетки. Предлагается приближенно вычислять значения $A'(t)$ в точках $t_{i+s}, t_{i+s-1}, \dots, t_{i+1}$ по тем же самым формулам, что и $x'(t)$. Таким образом мы получим разностные схемы вида

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{m+s} k_j^1 A_{i+s-j} x_{i+s-j} + (hB_{i+1} - \sum_{j=0}^{m+s} k_j^1 A_{i+s-j}) x_{i+1} = hf_{i+1} \\ \sum_{j=0}^{m+s} k_j^2 A_{i+s-j} x_{i+s-j} + (hB_{i+1} - \sum_{j=0}^{m+s} k_j^2 A_{i+s-j}) x_{i+2} = hf_{i+2} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{m+s} k_j^s A_{i+s-j} x_{i+s-j} + (hB_{i+1} - \sum_{j=0}^{m+s} k_j^s A_{i+s-j}) x_{i+s} = hf_{i+s} \end{cases}, \quad (20)$$

Если $m = s$, и матрица $A(t) = A$ постоянная, то получим методы типа РК, конкретный вид которых приведен в [4].

Приведем несколько схем для случая, когда $m > s$. Если $s = 1$, то получим методы, основанные на формуле дифференцирования назад

для задачи (18), (2) вида

$$\sum_{j=0}^m k_j A_{i+1-j} x_{i+1-j} + (hB_{i+1} - \sum_{j=0}^m k_j A_{i+1-j}) x_{i+1} = hf_{i+1}.$$

Если $s = 2, m = 3$, то получим

$$\begin{cases} (2A_{i+2}x_{i+2} + 3A_{i+1}x_{i+1} - 6A_i x_i + A_{i-1}x_{i-1}) + C_{i+1}x_{i+1} = 6hf_{i+1} \\ (11A_{i+2}x_{i+2} - 18A_{i+1}x_{i+1} + 9A_i x_i - 2A_{i-1}x_{i-1}) + C_{i+2}x_{i+2} = 6hf_{i+2}, \end{cases}$$

где $C_{i+1} = 6hB_{i+1} - 2A_{i+2} - 3A_{i+1} + 6A_i - A_{i-1}$, $C_{i+2} = 6hB_{i+2} - 11A_{i+2} + 18A_{i+1} - 9A_i + 2A_{i-1}$ и предполагая, что x_1 заранее задано, или вычислено в дополнение к начальному значению $x_0 = a$. Если $s = 2, m = 4$, то получим

$$\begin{cases} \Delta_1 A_{i+2} x_{i+2} + C_{i+1} x_{i+1} = 12hf_{i+1} \\ \Delta_2 A_{i+2} x_{i+2} + C_{i+2} x_{i+2} = 12hf_{i+2}, \end{cases}$$

где разностные операторы $\Delta_1 A_{i+2}$ и $\Delta_2 A_{i+2}$, действующие на матрицу или вектор функцию, определены по правилу

$$\Delta_1 A_{i+2} x_{i+2} = 3A_{i+2} x_{i+2} + 10A_{i+1} x_{i+1} - 18A_i x_i + 6A_{i-1} x_{i-1} - A_{i-2} x_{i-2},$$

$$\Delta_2 A_{i+2} x_{i+2} = 25A_{i+2} x_{i+2} - 48A_{i+1} x_{i+1} + 36A_i x_i - 16A_{i-1} x_{i-1} + 3A_{i-2} x_{i-2},$$

а $C_{i+1} = 12B_{i+1} - \Delta_1 A_{i+2}$, $C_{i+2} = 12B_{i+1} - \Delta_2 A_{i+2}$. В данной схеме предполагая, что x_1, x_2 заранее задано в дополнение к начальному значению $x_0 = a$.

Детальное обоснование блочных схем (20) предполагается провести в дальнейшем.

Список литературы

1. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер – М.: Мир, 1999. М.: Наука, 1964.
2. Brenan, K.E. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations / K.E. Brenan, S.B. Campbell, L.R. Petzold – North Holland, New York, 1989.
3. Булатов, М.В. Об условиях сходимости разностных схем для систем ОДУ, не разрешенных относительно производных / М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // Методы численного анализа и оптимизации. – Новосибирск: Наука, – 1987. – С. 175–187.
4. Bulatov, M.V. Numerical solution of differential-algebraic equations by block methods / M.V. Bulatov // Computational Science-ICCS 2003, Springer Verlag, Part 2 P. 516–522.
5. Чистяков, В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков – Новосибирск: Наука, 1996.

6. Булатов, М.В. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений /М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // Журн. вычисл.матем. и мат. физики. –2002. –Т. 42, № 4. – С. 459-470.
7. Данилов, В.А., Чистяков В.Ф. О препятствиях на пути построения эффективных численных методов решения алгебро-дифференциальных систем. Иркутск, 1990, Препринт No 5 ИрВЦ СО АН СССР.
8. März R. Differential-algebraic systems anew // Applied Numer. Math., 42, 2002, pp. 315-335.
9. Kunkel, P., Mehrmann V. Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations // Electr. Trans. Numer. Anal., 26, 2007, pp.385-420.

M. V. Bulatov, L. S. Solovarova

On block difference schemes for differential algebraic equations

Abstract. In this paper, block difference schemes for numerical solution of the initial value problems in linear differential algebraic equations are proposed. The detailed analysis of such schemes of the first and second order have been studied using modal examples. It has been shown that the schemes considered possess some advantages when compared with known implicit first and second order methods. A description for the general form of block difference schemes has been given.

Keywords: differential-algebraic equations, index, block difference schemes

Булатов Михаил Валерьянович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453018 (mvbul@icc.ru)

Соловарова Любовь Степановна, аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453018 (soleilu@mail.ru)

Bulatov Mikhail, Dr.Sc., Institute of System Dynamics and Control Theory, Irkutsk, Lermontov St., 134 Phone: (3952)453018 (mvbul@icc.ru)

Solovarova Lyubov, PhD Student, Institute of System Dynamics and Control Theory, Irkutsk, Lermontov St., 134 Phone: (3952)453018 (soleilu@mail.ru)



Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 13–17

Онлайн-доступ к журналу:
<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.983.51

Задача Коши для дифференциально-разностного уравнения с вырождением

Е. Ю. Гражданцева

Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для дифференциально-разностного оператора в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, фундаментальная оператор-функция, обобщенное решение, вырожденный оператор.

1. Введение

В классической математической физике и в приложениях возникают начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной. Такими задачами могут быть задачи теплопроводности, диффузии, упругости, электродинамики, теории потенциала, теории устойчивости движения, проблем газовой динамики и другие. Многие подобные начально-краевые задачи, возникающие в приложениях, допускают редукцию к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной. Такие уравнения принято называть сингулярными дифференциальными уравнениями (или, в иной терминологии, вырожденными дифференциальными уравнениями, уравнениями соболевского типа). Известно, что задачи для дифференциальных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной разрешимы в классе непрерывных функций не при всех начальных данных и правых частях. Аппарат теории обобщенных функций служит удобным средством для исследования задач подобного рода. Особенность заключается в том, что в обобщенной постановке начальные условия включаются в мгновенно действующие источники. Следовательно, естественным образом, возникает проблема