Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 117—132

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.926

О разрешимости существенно вырожденных нелинейных алгебро-дифференциальных систем *

А. А. Щеглова
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенная относительно производной искомой вектор-функции и тождественно вырожденная в области определения. В предположении, что начальные данные порождают корень кратности больше единицы для соответствующей системы конечных уравнений, предложен процесс преобразования исходной системы к нормальной форме, и доказана теорема о существовании решения задачи Коши.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальная система; дифференциально-алгебраические уравнения; существование решения; кратный корень.

1. Введение

Статья посвящена направлению в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которое интенсивно развивается в последние десятилетия — системам вида

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \;\; t \in T = [t_0, t_1) \tag{1.1}$$

$\Big((t, x, x') \in \mathcal{D} = \{(t, x, y) \in \mathbf{R}^{2n+1} : \; t \in T, \; \|x - \bar{x}\| < K_0, \; \|y - \bar{y}\| < K_1\}, \quad F : \; \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n\Big)$, не разрешенным относительно производной искомой вектор-функции $x : \; T \to \mathbf{R}^n$ и тождественно вырожденным в области определения:

$$\det \frac{\partial F(t, x, x')}{\partial x'} \equiv 0 \;\; \forall (t, x, x') \in \mathcal{D}. \tag{1.2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (Интеграционный проект № 85) и РФФИ (грант 10–01–00132).

Такие системы называют, в частности, алгебро-дифференциальными (АДС)[1]. Интерес к АДС стимулируется проблемами математического моделирования в прикладных областях: в теории электронных схем и электрических цепей, механике и химической кинетике, гидродинамике и теплотехнике.

За последние годы опубликованы сотни работ, посвященных изучению качественных свойств АДС и численным методам их решения (см. библиографию в книгах [3],[5]). Тем не менее некоторые важные теоретические вопросы остаются дискуссионными, что в полной мере относится к проблеме разрешимости нелинейных АДС высокого индекса.

Методологической основой для анализа послужило понятие левого регуляризирующего оператора (ЛРО). Под ЛРО для системы (1.1) следует понимать некоторый дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ такой, что для любой достаточно гладкой на T функции $x(t)$ выполняется тождество

$$\mathcal{L}[F(t,x(t),x'(t))] = x'(t) - \psi(t,x(t)), \ \ \mathcal{L}[0] = 0.$$

Для линейного случая теория ЛРО была развита в [3].

В статье получены достаточные условия существования решения системы (1.1) в предположении, что матрица Якоби функции $F(t,x,y)$

$$J(t,x,y) = \left(\frac{\partial F(t,x,y)}{\partial x} \ \ \frac{\partial F(t,x,y)}{\partial y} \right)$$

имеет неполный ранг на некотором многообразии

$$\mathcal{H} = \{(t,x,y) \in \mathbf{R}^{2n+1} : \ h(t,x,y) = 0\}, \tag{1.3}$$

то есть

$$\operatorname{rank} J(t,x,y) < n \ \forall (t,x,y) \in \mathcal{S}; \ \ \operatorname{rank} J(t,x,y) = n \ \forall (t,x,y) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{S}$ — проекция области $\mathcal{D}$ на многообразие $\mathcal{H}$.

Все известные автору работы в области АДС предполагают полноту ранга матрицы $J(t,x,y)$ в $\mathcal{D}$. Отказ от этого требования приводит к серьезным дополнительным трудностям в плане исследования и численного решения. В частности, если для заданных начальных данных решение АДС (1.1) лежит на многообразии $\mathcal{H}$, то для таких систем принципиально неприменимы имеющиеся на настоящий момент разностные методы решения. АДС с условием (1.4) будем называть *существенно вырожденными.*

---

[1] Термин "алгебраическое уравнение" понимается здесь в расширенном смысле: под алгебраическими подразумеваются любые конечные уранения, а не только уравнения, задаваемые полиномами.

Предлагается процесс преобразования системы (1.1) в АДС

$$\tilde{F}(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in T, \tag{1.5}$$

у которой матрица Якоби полного ранга в $\mathcal{D}$, но по-прежнему $\det \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x'} \equiv 0$. Показано, что эти системы эквивалентны в смысле решения $x_*(t)$, если для всех $t \in T$

$$(t, x_*(t), x_*'(t)) \in \mathcal{H}\,. \tag{1.6}$$

Для АДС (1.5) получены необходимые и достаточные условия возможности перехода к системе, разрешенной относительно производной,

$$x'(t) - \psi(t, x(t)) = 0, \quad t \in T, \tag{1.7}$$

некоторое решение которой обладает свойством (1.6). Полностью обосновывается процесс преобразования системы (1.1) с условиями (1.2), (1.4) в систему вида (1.7). При этом, если исходная АДС (1.1) имеет решение $x_*(t)$, удовлетворяющее включению (1.6), то оно будет также решением системы (1.7). В итоге, этот подход позволил доказать теорему о существовании решения задачи Коши для АДС (1.1).

2. Регуляризация по пространственной переменной

Поставим для АДС (1.1) задачу Коши

$$x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

$x_0 \in \mathbf{R}^n: \ \ \|x_0 - \bar{x}\| < K_0$.

Определение 1. *Под решением системы (1.1) на интервале T будем понимать n-мерную вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}^1(T): \ (t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D} \ \ \forall t \in T$, обращающую (1.1) в тождество при подстановке.*

Функцию $h(t, x, y)$, описывающую многообразие $\mathcal{H}$ (1.3), можно определить следующим образом

$$h(t, x, y) = \det J(t, x, y) J^\top(t, x, y)$$

($^\top$ – символ транспонирования). Заметим, что гладкость $F(t, x, y)$ будет обеспечивать соответствующую гладкость функции $h(t, x, y)$.

Определение 2. *Будем называть $\mathcal{H}$ многообразием вырождения функции $F(t, x,\, y)$.*

Обозначим $X(t) = \operatorname{colon}(x(t),\ x'(t))$. Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\Phi\,(t, X(t)) = F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in T.$$

Допустим, что начальные данные (2.1) таковы, что существует вектор $a_1 \in \mathbf{R}^n$:

$$\Phi(t_0, X_0) = 0, \tag{2.2}$$

где $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, $(t_0, X_0) \in \mathcal{S}$.

Определение 3. *Матрица $A^-(t, X)$ называется полуобратной по отношению к матрице $A(t, X)$ в области $\mathcal{D}$, если в каждой точке $(t, X) \in \mathcal{D}$ выполняется равенство*

$$A(t, X)A^-(t, X)A(t, X) = A(t, X). \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_0(t, X) = \Phi(t, X), \quad \Phi_j(t, X) = \Phi_{j-1}(t, X)+$$

$$+\frac{\partial \Phi_{j-1}(t, X)}{\partial X}\Big(E - G^-_{j-1}(t, X)G_{j-1}(t, X)\Big)\, c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{2.4}$$

где $c_j \in \mathbf{R}^{2n}$ – некоторые векторы;

$$G_j(t, X) = \frac{\partial \Phi_j(t, X)}{\partial X}\bigg|_{(t,X)\in\mathcal{H}} \left(\frac{\partial \Phi_j(t, X)}{\partial X}\bigg|_{(t,X)\in\mathcal{H}}\right)^- \frac{\partial \Phi_j(X)}{\partial X}.$$

Из определения 3 полуобратной матрицы следует

$$G_j(t, X)\bigg|_{(t,X)\in\mathcal{H}} = \frac{\partial \Phi_j(t, X)}{\partial X}\bigg|_{(t,X)\in\mathcal{H}}. \tag{2.5}$$

Замечание 1. Если некоторая матрица $A(t, X)$ определена в области $\mathcal{D}$, то для нахождения $A(t, X)\big|_{(t,X)\in\mathcal{H}}$ может оказаться необходимым из уравнения

$$h(t, x, y) = 0 \tag{2.6}$$

выразить часть компонент (x, y) через остальные и переменную t. В общем случае это является весьма сложной задачей, поскольку $h(t, x, y)$ может не удовлетворять теореме о неявной функции (точка (t_0, x_0, a_1) является особой точкой уравнения (2.6)). В частности, случай $x, y \in \mathbf{R}$ в предположении $h'_x(t_0, x_0, a_1) = h'_y(t_0, x_0, a_1) = 0$, $h''_{xx}(t_0, x_0, a_1)\times h''_{yy}(t_0, x_0, a_1) - {h''_{xy}}^2(t_0, x_0, a_1) \neq 0$ рассмотрен в [2, с. 71].

Определение 4. *Вектор* $X_0: \ (t_0, X_0) \in \mathcal{S}$ *назовем корнем кратности* $k > 1$ *системы уравнений*

$$\Phi(t_0, X) = 0, \tag{2.7}$$

если имеет место равенство (2.2) и существуют векторы $c_j \in \mathbf{R}^{2n}$ *такие, что*

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \Phi_{k-1}(t_0, X_0)}{\partial X} = n.$$

Векторы $c_j \in \mathbf{R}^{2n}$ в формулах (2.4) выбираются, исходя из условия понижения кратности корня X_0 уравнения $\Phi_j(t_0, X) = 0$ на каждом шаге j, что, вообще говоря, не эквивалентно выполнению для каждого $j = \overline{1, k-1}$ неравенства $\operatorname{rank} \Phi_j(t_0, X_0) > \operatorname{rank} \Phi_{j-1}(t_0, X_0)$. Обоснование способа выбора векторов c_j представляет собой самостоятельную нетривиальную задачу, которая в данной статье не рассматривается. Заметим, что эти векторы для любого $j = \overline{1, k-1}$ должны удовлетворять двум необходимым требованиям:

1) $\partial \Phi_{j-1}(t, X)/\partial X \left(E - G^-_{j-1}(t, X) G_{j-1}(t, X)\right) c_j \neq 0 \ \ \forall (t, X) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{H}$;

2) $\left(t_0, \left(E - G^-_{j-1}(t_0, X_0) G_{j-1}(t_0, X_0)\right) c_j\right) \notin \mathcal{H}$.

При практической реализации процесса эти условия оказываются достаточными для понижения кратности корня X_0.

Предположение $\Phi(t, X) \in \mathbf{C}^{k-1}(\mathcal{D})$ не гарантирует, что в формулах (2.4) все дифференцирования будут правомерны, поскольку в построении функций (2.4) участвуют полуобратные матрицы, которые могут иметь в точках перемены ранга исходной матрицы (даже достаточно гладкой) разрывы второго рода.

Здесь и далее запись $A(t, X) \in \mathbf{C}^s(\mathcal{D})$ означает, что элементы матричнозначной функции A имеют в области $\mathcal{D}$ непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов до порядка s включительно, если же $A(t, X) \in \mathbf{C}^{p,s}_{t,X}(\mathcal{D})$, то они обладают в $\mathcal{D}$ p непрерывными частными производными по переменной t и s непрерывными частными производными по переменной X.

Определение 5. *Будем говорить, что матрица* $A(t, X) \in \mathbf{C}^s(\mathcal{D})$ *имеет гладкий проектор в области* $\mathcal{D}$*, если в* $\mathcal{D}$ *для нее существует полуобратная* $A^-(t, X)$ *такая, что произведения*

$$A(t, X) A^-(t, X), \ \ A(t, X)^- A(t, X)$$

являются матрицами из $\mathbf{C}^s(\mathcal{D})$*, либо предельным переходом в отдельных точках их можно доопределить до матриц из* $\mathbf{C}^s(\mathcal{D})$.

Лемма 1. *Пусть* $A(t, X) \in \mathbf{C}^s(\mathcal{D})$. *Для того чтобы в области* $\mathcal{D}$ *существовала полуобратная матрица* $A^-(t, X) \in \mathbf{C}^s(\mathcal{D})$ *достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} A(t, X) = \mathrm{const} \ \ \forall (t, X) \in \mathcal{D}$.

Лемма 2. *Пусть:*
1) $(m \times n)$*-матрица* $A(t,X) \in \mathbf{C}^s(\mathcal{D})$*;*
2) $\operatorname{rank} A(t,X) = \mathrm{const}\ \ \forall (t,X) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_p$*, где* $\mathcal{D}_p = \{(t_1,X_1),(t_2,X_2),\dots,(t_p,X_p)\} \subset \mathcal{D}$ $(1 \le p < \infty)$ *– множество точек перемены ранга матрицы* $A(t,X)$*;*
3) существует квадратная, неособенная для всех $(t,X) \in \mathcal{D}$ *матрица* $R(t,X) \in \mathbf{C}^s(\mathcal{D})$ *порядка* m *такая, что*

$$R(t,X)A(t,X) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(t,X) \\ O \end{pmatrix}, \ \ (t,X) \in \mathcal{D},$$

где $\tilde{A}(t,X)$ *– матрица размеров* $k \times n$, $\ k = \max_{(t,X)\in D} \operatorname{rank} A(t,X)$.

Тогда матрица $A(t,X)$ *имеет в* $\mathcal{D}$ *гладкий проектор.*

Леммы являются обобщениями известных результатов из монографии [3, с. 39, 41] на случай нескольких переменных. Доказательства проводятся в аналогичной технике и поэтому здесь опущены.

В уравнении $\Phi_{k-1}(t,X) = 0$ положим $X(t) = \operatorname{colon}(x(t),\ x'(t))$ и запишем его в виде (1.5).

Лемма 3. *Пусть:*
1) n*-мерная вектор-функция* $x_*(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *удовлетворяет включению (1.6) для любого* $t \in T$*, и* $x_*(t_0) = x_0$*;*
2) вектор $\operatorname{colon}(x_*(t_0),\ x'_*(t_0))$ *является корнем кратности* $k > 1$ *уравнения (2.7);*
3) в (1.5) функция $\tilde{F}(t,x,y)$ *определена в области* $\mathcal{D}$*.*

Функция $x_*(t)$ *является на* T *решением задачи (1.1), (2.1) в том и только том случае, если она — решение задачи (1.5), (2.1).*

Утверждение леммы вытекает из равенства (2.5) и свойства (2.3) полуобратных матриц.

Процесс перехода от АДС (1.1) с условиями (1.2), (1.4) к системе (1.5), у которой матрица Якоби имеет полный ранг в точке $(t_0,x_0,a_1) \in \mathcal{S}$ для некоторого $a_1 \in \mathbf{R}^n :\ F(t_0,x_0,a_1) = 0$, назовем *регуляризацией по* x.

3. Регуляризация по временной переменной

Для (1.5) выпишем так называемую r*-продолженную систему*

$$\mathcal{F}_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} \tilde{F}(t,x,x') \\ \tilde{F}'(t,x,x') \\ \vdots \\ \tilde{F}^{(r)}(t,x,x') \end{pmatrix} = 0, \qquad (3.1)$$

где $\tilde{F}^{(i)}(t,x,x') = \left(\dfrac{d}{dt}\right)^i \tilde{F}\,(t,x(t),x'(t))$ для любой достаточно гладкой функции $x(t)$.

Определим квадратную порядка $n(r+1)$ матрицу

$$\Gamma_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)}) = \left(\ \partial\mathcal{F}_r/\partial x' \ \ \partial\mathcal{F}_r/\partial x'' \ \ldots \ \partial\mathcal{F}_r/\partial x^{(r+1)}\ \right)$$

и прямоугольную матрицу размеров $n(r+1)\times n(r+2)$

$$D_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)}) = (\ \partial\mathcal{F}_r/\partial x \ \ \Gamma_r\ )\,.$$

Определение 6. *Оператор $\mathcal{L}$, действующий на $n(r{+}1)$-мерную вектор-функцию $\mathcal{F}_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)}) \in \mathbf{C}(\mathcal{U})$ по правилу*

$$\mathcal{L}[\mathcal{F}_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)})] = L(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)},\tilde{F},\tilde{F}',\ldots,\tilde{F}^{(r)}), \quad (3.2)$$

называется левым регуляризирующим оператором для системы (1.5) в области $\mathcal{U} = \mathcal{D}\times\tilde{\mathcal{U}}$ $(\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbf{R}^{nr})$ изменения переменных $t,x,x',\ldots,x^{(r+1)}$, если:

1) для любого $x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T):\ \ (t,x(t),x'(t)) \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{L}[\mathcal{F}_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)})] = x'(t) - \psi(t,x(t)); \quad (3.3)$$

2) n–мерная вектор–функция L имеет в области $\mathcal{U}$ непрерывные частные производные по своим аргументам и обладает свойством

$$L(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)},0,\ldots,0) = 0 \quad (3.4)$$

$\forall (t,x,x',\ldots,x^{(r+1)}) \in \mathcal{U}$.

Наименьшее значение $r \geq 0$, при котором для (1.5) в $\mathcal{U}$ определен оператор $\mathcal{L}$, называется индексом неразрешенности относительно производной системы (1.5).

Преобразование (3.3) системы (3.1) будем называть регуляризацией АДС (1.5) по переменной t.

Условие (1.4) не позволяет построить ЛРО для системы (1.1) и определить ее индекс. Поэтому предварительно нужно осуществить переход от АДС (1.1) к системе (1.5), для которой ЛРО уже может существовать.

Предположим, что для АДС (1.5) в $\mathcal{U}$ определен ЛРО. Если система (1.5) обладает достаточно гладким решением $x_*(t)$, то, очевидно, оно будет обращать в тождество и продолженную систему (3.1), поэтому в силу (3.4) $x_*(t)$ будет также решением системы (1.7), являющейся результатом действия ЛРО. Если при этом функция $x_*(t)$ определена в области $\mathcal{S}$, то есть удовлетворяет включению (1.6), то согласно лемме 3 она является и решением АДС (1.1).

Допустим, что в (1.5) $\tilde{F}(t, x, x') \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$, и существует решение a_i, $i = \overline{1, r+1}$, системы

$$\mathcal{F}_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1}) = 0, \tag{3.5}$$

удовлетворяющее равенству

$$\operatorname{rank} D_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1}) = n(r+1). \tag{3.6}$$

В сделанных предположениях выполняются все условия теоремы о неявной функции [4, с. 66], в соответствии с которой из системы (3.1) в соответствующей области можно выразить $n(r+1)$ компонент вектора $\operatorname{colon}\Big(x,\ x',\ \dots,\ x^{(r+1)}\Big)$ (обозначим их буквой ξ) как функции переменной t и остальных его n компонент (будем обозначать их η). То есть

$$\xi = \xi(t, \eta), \tag{3.7}$$

$\forall (t, \eta) \in \mathcal{W} = \{(t, \eta) :\ \ t \in T_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon) \subseteq T,\ \|\eta - \eta_0\| < K_\eta\}$, $\operatorname{colon}\Big(\xi,\ \eta\Big) = P \operatorname{colon}\Big(x,\ x',\ \dots,\ x^{(r+1)}\Big)$; $\operatorname{colon}(\xi_0,\ \eta_0) = P \operatorname{colon}\Big(x_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{r+1}\Big)$; $\xi, \xi_0 \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$, $\eta, \eta_0 \in \mathbf{R}^n$, P – матрица перестановок.

Поскольку матрица $D_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)})$ имеет размеры $n(r+1) \times n(r+2)$, то в общем случае неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$, в соответствии с которым определяются функции (3.7), неединственен. Будем искать этот минор следующим образом. В матрице $\Gamma_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$ выберем $s = \operatorname{rank} \Gamma_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$ $(s \le n(r+1))$ линейно независимых столбцов, в состав которых должно войти максимально возможное число первых n столбцов этой матрицы. Дополним эти столбцы $n(r+1) - s$ линейно независимыми столбцами вычисленной в точке $a = (t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$ матрицы $\partial \mathcal{F}_r / \partial x$, которая представляет собой первые n столбцов матрицы $D_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$. Полученные $n(r+1)$ линейно независимых столбцов составят искомый минор. При этом $s \ge nr$.

Определение 7. *Описанный выше неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$ назовем разрешающим.*

Далее функции (3.7) будем считать соответствующими разрешающему минору.

Обозначим $\hat{\Gamma}_r(t, \eta)$ матрицу, получающуюся при подстановке функций (3.7) в $\Gamma_r(t,\ x, x', \dots, x^{(r+1)})$.

Лемма 4. *Пусть:*
1) матрица $\hat{\Gamma}_r(t, \eta)$ определена и имеет $k \ge 0$ непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов в области $\mathcal{W}$;

2) $\operatorname{rank}\hat{\Gamma}_r(t,\eta) = \mathrm{const}\ \ \forall(t,\eta) \in \mathcal{W}$*;*
3) система

$$\Big(Z_0(t,\eta)\ \ Z_1(t,\eta)\ \ \dots\ \ Z_r(t,\eta) \Big)\hat{\Gamma}_r(t,\eta) = \Big(E_n\ \ O_n\ \ \dots\ \ O_n \Big) \tag{3.8}$$

поточечно разрешима в области $\mathcal{W}$*,* $Z_j(t,\eta)$ *—* $(n \times n)$ *– матрицы.*

Тогда система (3.8) имеет в области $\mathcal{W}$ *решение* $Z_i(t,\eta) \in \mathbf{C}^k(\mathcal{W})$*.*

Доказательство. По лемме 1 хотя бы одна из полуобратных к $\hat{\Gamma}_r(t,\eta)$ матриц будет обладать в $\mathcal{W}$ той же гладкостью, что и $\hat{\Gamma}_r(t,\eta)$. Обозначим ее $\hat{\Gamma}_r^-(t,\eta)$. Несложно убедиться, что одно из решений системы (3.8) имеет вид [1, с. 14]

$$\Big(Z_0(t,\eta)\ \ Z_1(t,\eta)\ \ \dots\ \ Z_r(t,\eta) \Big) = \Big(E_n\ \ O_n\ \ \dots\ \ O_n \Big)\, \hat{\Gamma}_r^-(t,\eta),$$

откуда следует справедливость утверждения леммы. □

Для АДС (1.5) можно получить необходимое и достаточное условие существования ЛРО.

Теорема 1. *Пусть:*
1) в (1.1) $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{r+1,r+k}_{t,X}(\mathcal{D}),\ \ 1 \le r \le n,\ \ 1 < k < \infty$*;*
2) выполняется условие (1.4);
3) вектор $X_0 = \operatorname{colon}(x_0,\ a_1)$ *является корнем кратности* k *уравнения (2.7), где* x_0 *– вектор начальных данных (2.1),* $a_1 \in \mathbf{R}^n$*;*
4) в сответствующих окрестностях точки (t_0, X_0) *матрицы (16) имеют гладкие проекторы;*
5) существует решение $a = (t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{R}^{n(r+2)+1}$ *системы (3.5), удовлетворяющее условию (3.6);*
6) $\operatorname{rank}\hat{\Gamma}_r(t,\eta) = \kappa = \mathrm{const}\ \ \forall(t,\eta) \in \mathcal{W}$*.*

Для того чтобы в некоторой окрестности $\mathcal{U}_a$ *точки* a *для системы (1.5) был определен ЛРО* $\mathcal{L}$ *(3.2) с функцией* L*, обладающей непрерывными частными производными по каждому их своих аргументов, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая система (3.8) была поточечно разрешима в области* $\mathcal{W}$*.*

Доказательство теоремы опущено.

Установить разрешимость системы (3.8) можно, проверяя, например, выполнение условия Кронекера-Капелли или же требуя выполнения равенства $(\,E_n\ \ O\ \ \dots\ \ O\,)\,(E_n - \hat{\Gamma}_r^-(t,\eta)\hat{\Gamma}_r(t,\eta)) = O$ в каждой точке области $\mathcal{W}$.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 1 $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{2r+1,2r+k}_{t,X}\,(\mathcal{D})$, то в (3.3) $\psi(t,x) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{V}),\ \ \mathcal{V} = \{(t,x):\ t \in [t_0, t_0 + \hat{\varepsilon}) \subseteq T,\ \|x - x_0\| \le \hat{K}_0 \le K_0\}$.

Систему (1.7), получающуюся из (3.1) в результате действия ЛРО, можно построить следующим способом: для заданных начальных данных (2.1) найдем решение системы (3.5), удовлетворяющее условию (3.6); определим в матрице $D_r(t_0, x_0, a_1, \ldots, a_{r+1})$ разрешающий минор и выразим из системы (3.1) компоненты $\xi \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$ вектора colon $\Big(x,\ x',\ \ldots,\ x^{(r+1)}\Big)$, соответствующие этому минору, через t и компоненты $\eta \in \mathbf{R}^n$ в виде (3.7). Среди компонент функции (3.7) обязательно найдутся такие, которые имеют вид (1.7).

4. Существование решения

Основная идея доказательства теоремы существования состоит в том, чтобы показать, что решение системы (1.7) (полученной как результат действия на систему (3.1) ЛРО), удовлетворяющее начальному условию (2.1), при некоторых дополнительных допущениях, помимо условий теоремы 1, является решением задачи (1.5), (2.1) и лежит на многообразии вырождения $\mathcal{H}$.

Теорема 2. *Пусть:*
1) в (1.1) $F(t, x, x') \in \mathbf{C}^{2r+1,2r+k}_{t,X}(\mathcal{D})$*;*
2) выполнены условия 2)–4) и 6) теоремы 1;
3) существует решение $a_i \in \mathbf{R}^n$, $i = \overline{2, 2r+1}$, *алгебраической системы*

$$\mathcal{F}_{2r}(t_0, x_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2r+1}) = 0 \tag{4.1}$$

такое, что $\operatorname{rank} D_{2r}(t_0, x_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2r+1}) = n(2r+1)$*;*
4) система (3.8) поточечно разрешима в окрестности $\mathcal{W}$ *точки* (t_0, η_0)*;*
5) $F(t, x, x')\Big|_{\xi=\xi(t,\eta)} = 0 \ \ \forall (t, \eta) \in \mathcal{W}$ *(*$\xi = \xi(t, \eta)$ *– функция (3.7)).*

Тогда на некотором интервале $T_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon) \subseteq T$ *существует решение задачи (1.1), (2.1)* $x_*(t)$*, удовлетворяющее включению (1.6) для всех* $t \in T_\varepsilon$*.*

Доказательство. В условиях теоремы выполняются все предположения теоремы 1, согласно которой и замечанию 2 в некоторой окрестности $\mathcal{U}_a$ точки $a = (t_0, a_0, a_1, \ldots, a_{r+1})$ $(a_i,\ i = \overline{1, r+1}$ – векторы, входящие в решение $2r$-продолженной системы (4.1)) для (1.5) определен ЛРО (3.2), в котором функция L имеет $r+1$ непрерывную частную производную по каждому из своих аргументов. Этот оператор преобразует (1.5) к виду (1.7), причем в (1.7) $\psi(t, x) \in \mathbf{C}^{r+1}(\hat{\mathcal{V}})$, $\hat{\mathcal{V}} = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + \hat{\varepsilon}) \subset T,\ \|x - x_0\| < \hat{K}_0 \le K_0\}$.

Решение $x_*(t)$ задачи (1.7), (2.1) будет определено и единственно на $[t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon})$, $0 < \tilde{\varepsilon} \le \hat{\varepsilon}$, и кроме того, $x_*(t) \in \mathbf{C}^{r+2}([t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon}))$.

Из доказательства теоремы 1 следует, что $(t_0, x_0, x'_*(t_0)) \in \mathcal{D}$. Сузим интервал $[t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon})$ так, чтобы $(t, x_*(t), x'_*(t)) \in \mathcal{D} \quad \forall t \in \tilde{T} = [t_0, t_0 + \breve{\varepsilon}),\ \ 0 < \breve{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}$.

Подставим функцию $x_*(t)$ в уравнение (1.5)

$$\tilde{F}(t, x_*(t), x'_*(t)) = \delta(t),\ \ t \in \tilde{T}.$$

Заметим, что в условиях теоремы $\delta(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(\tilde{T})$, поэтому можно записать

$$\mathcal{F}_r(t, x_*(t), x'_*(t), \dots, x_*^{(r+1)}(t)) = \begin{pmatrix} \tilde{F}(t, x_*(t), x'_*(t)) \\ \tilde{F}'(t, x_*(t), x'_*(t)) \\ \dots \\ \tilde{F}^{(r)}(t, x_*(t), x'_*(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \delta'(t) \\ \dots \\ \delta^{(r)}(t) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\delta(t) = 0\ \ \forall t \in T_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon)$ при некотором $0 < \varepsilon \leq \breve{\varepsilon}$. Выполнение этого условия будет означать, что функция $x_*(t)$ является решением задачи (1.5), (2.1) на интервале T_ε.

Продифференцируем равенство (1.7) r раз

$$x' - \psi(t, x) = 0,\ \ x'' - \psi_1(t, x, x') = 0,\ \ \dots,$$
$$x^{(r+1)} - \psi_r(t, x, x', \dots, x^{(r)}) = 0. \tag{4.2}$$

Здесь $\psi_j(t, x, x', \dots, x^{(j)}) = \psi^{(j)}(t, x),\quad i = \overline{1, r}$, при любой достаточно гладкой функции $x(t)$. Функция $x_*(t)$ обращает систему (4.2) в тождество на $\tilde{T}$ и удовлетворяет условию (2.1).

В предположениях теоремы можем выразить из (3.1) компоненты $\xi \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$ вектора $\mathrm{colon}\Big(x, x', \dots, x^{(r+1)}\Big)$, соответствующие разрешающему минору матрицы $D_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$, как функции t и остальных его компонент $\eta \in \mathbf{R}^n$ в виде (3.7). При этом $\xi = \mathrm{colon}\,(x',\ y_1,\ Y_1)\,,\quad \eta = \mathrm{colon}\,(y_2,\ Y_2)\,$, где $\mathrm{colon}\,(y_1,\ y_2) = Q_0 x$, $\mathrm{colon}\,(Y_1,\ Y_2) = Q_1\,\mathrm{colon}\,\big(x'',\ \dots,\ x^{(r+1)}\big)$, Q_0 и Q_1 – матрицы перестановок. В терминах переменных x', y_1, y_2, Y_1, Y_2 функция (3.7) записывается в виде

$$x' = \psi(t, x) = g(t, y_2),\ \ y_1 = g_0(t, y_2),\ \ Y_1 = g_1(t, y_2, Y_2). \tag{4.3}$$

Обозначим $\xi_*(t) = \mathrm{colon}\,(x'_*(t),\ y_{*1}(t),\ Y_{*1}(t),\ )\,,\quad \eta_*(t) = \mathrm{colon}\Big(y_{*2}(t),$ $Y_{*2}(t)\Big)$, где

$$\begin{pmatrix} y_{*1}(t) \\ y_{*2}(t) \end{pmatrix} = Q_0 x_*(t),\quad \begin{pmatrix} Y_{*1}(t) \\ Y_{*2}(t) \end{pmatrix} = Q_1\,\mathrm{colon}\Big(x''_*(t),\ \dots,\ x_*^{(r+1)}(t)\Big)\,,$$

а $x_*(t)$ – решение задачи (1.7), (2.1).

Покажем, что вектор $\xi_*(t_0)$ удовлетворяет системе (3.1) при $t = t_0$.

Подставим функции (4.3) в последние nr уравнений $2r$-продолженной системы, а именно, в уравнения: $\tilde{F}^{(r+1)}(t,x,x')=0,\ \ \ldots,\ \ \tilde{F}^{(2r)}(t,x,x')=0$. В результате получим систему

$$\tilde{\mathcal{F}}(t,y_2,Y_2,Z_1,Z_2)=0, \tag{4.4}$$

в которой $\operatorname{colon}(Z_1,\ Z_2)=Q_2\operatorname{colon}\left(x^{(r+2)},\ \ldots,\ x^{(2r+1)}\right),\ \ Q_2$ – матрица перестановок.

В условиях теоремы для $2r$-продолженной системы

$$\mathcal{F}_{2r}\left(t,x,x',\ldots,x^{(2r+1)}\right)=0$$

выполняются все условия теоремы о неявной функции. Поэтому из системы (4.4) можно выразить nr компонент переменных y_2,Y_2,Z_1,Z_2, соответствующих разрешающему минору матрицы

$$\left(\ \partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial y_2\ \ \partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial Y_2\ \ \partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial Z_1\ \ \partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial Z_2\ \right),$$

как функции t и остальных n компонент этих переменных:

$$y_{2,1}=\phi_0(t,y_{2,2},Y_{2,2},Z_2),\ \ Y_{2,1}=\phi_1(t,y_{2,2},Y_{2,2},Z_2),$$
$$Z_1=\phi_2(t,y_{2,2},Y_{2,2},Z_2), \tag{4.5}$$

где $\operatorname{colon}(y_{2,1},\ y_{2,2})=Q_3y_2$, $\operatorname{colon}(Y_{2,1},\ Y_{2,2})=Q_4Y_2;\ \ Q_3,\ Q_4$ – матрицы перестановок.

Обозначим

$$\bar{x}'=g(t_0,\bar{y}_2),\ \ \bar{y}_1=g_0(t_0,\bar{y}_2),\ \ \bar{Y}_1=g_1(t_0,\bar{y}_2,\bar{Y}_2); \tag{4.6}$$

$$\bar{y}_{2,1}=\phi_0(t_0,\bar{y}_{2,2},Y_{*2,2}(t_0),Z_2),\ \ \bar{Y}_{2,1}=\phi_1(t_0,\bar{y}_{2,2},Y_{*2,2}(t_0),Z_2),$$
$$\bar{Z}_1=\phi_2(t_0,\bar{y}_{2,2},Y_{*2,2},Z_2). \tag{4.7}$$

Здесь $\operatorname{colon}\left(\bar{y}_1,\,\bar{y}_2\right)=Q_0x_0$, x_0 – вектор начальных данных, $\operatorname{colon}\left(\bar{y}_{2,1},\right.$ $\left.\bar{y}_{2,2}\right)=Q_3\bar{y}_2$, $\bar{Y}_2=\operatorname{colon}(\bar{Y}_{2,1},\ Y_{*2,2}(t_0))$, $Y_{*2,2}(t_0)$ находится из равенства $\operatorname{colon}(\bar{Y}_{*2,1}(t_0),\ Y_{*2,2}(t_0))=Q_4Y_{*2}(t_0)$, где $Y_{*2}(t)$ включает в себя компоненты производных решения $x_*(t)$ задачи (1.7), (2.1). Поскольку векторы $y_{2,1}$, $Y_{2,1}$ и Z_1 в (4.5) соответствуют разрешающему минору матрицы Якоби системы (4.4), то из уравнения $y_{2,1}=\phi_0(t,y_{2,2},Y_{2,2},Z_2)$ мы не можем выразить ни одной компоненты векторов $Y_{2,2}$ и Z_2. Следовательно, $\bar{y}_{2,1}$ в (4.7) не зависит от $Y_{*2,2}$ и $Z_2:\ \ \bar{y}_{2,1}=\phi_0(t_0,\bar{y}_{2,2})$.

С другой стороны, (4.2) представляет собой не что иное как систему

$$L\left(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)},\tilde{F},\tilde{F}',\ldots,\tilde{F}^{(r)}\right)=0,$$

$$L_1\left(t,x,x',\ldots,x^{(r+2)},\tilde{F},\tilde{F}',\ldots,\tilde{F}^{(r+1)}\right)=$$

$$= \frac{d}{dt} L\left(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)}, \tilde{F}, \tilde{F}', \ldots, \tilde{F}^{(r)}\right) = 0, \tag{4.8}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$L_r\left(t, x, x', \ldots, x^{(2r+1)}, \tilde{F}, \tilde{F}', \ldots, \tilde{F}^{(2r)}\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^r L_r\left(t, x, x', \ldots, x^{(r+1)}, \tilde{F}, \tilde{F}', \ldots, \tilde{F}^{(r)}\right) = 0,$$

где L – функция (3.2), задающая ЛРО.

Пользуясь определением частных производных, нетрудно убедиться, что свойство (3.4) функции L обеспечивает наличие аналогичных свойств у функций $L_1, \ldots, L_r$:

$$L_i\left(t, x, x', \ldots, x^{(r+1+i)}, 0, 0, \ldots, 0\right) = 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{4.9}$$

По построению векторы (4.6), (4.7) удовлетворяют системе (4.1). Поэтому в силу свойств (4.9) эти векторы будут удовлетворять при $t = t_0$ системе (4.8) или, что то же, системе (4.2).

Структура системы (4.2) такова, что все производные $x', \ldots, x^{(r+1)}$ можно выразить из (4.2) как функции переменных t и y_2. Другими словами, (4.2) эквивалентна системе

$$x' = g(t, y_2), \ \ Y_1 = h_1(t, y_2), \ \ Y_{2,1} = h_{2,1}(t, y_2), \ \ Y_{2,2} = h_{2,2}(t, y_2), \tag{4.10}$$

записанной в терминах независимых переменных $x', y_2, Y_1, Y_{2,1}, Y_{2,2}$.

Выше было показано, что векторы $\bar{x}', \bar{y}_1, \bar{Y}_1$ и $\bar{Y}_{2,1}$ удовлетворяют при $t = t_0$, $y_2 = \bar{y}_2$ и любом Z_2 первым трем уравнениям системы (4.10). Отсюда следует, что $\bar{Y}_{2,1}$ не зависит от Z_2 : $\bar{Y}_{2,1} = \tilde{\phi}_1(t_0, \bar{y}_{2,2}, Y_{*2,2}(t_0))$ и

$$x'_*(t_0) = \bar{x}', \ \ Y_{*1}(t_0) = \bar{Y}_1, \ \ Y_{*2,1}(t_0) = \bar{Y}_{2,1}.$$

Таким образом, вектор $\xi_*(t_0)$ удовлетворяет системе (3.1) при $t = t_0$. Последнее обстоятельство обеспечивает выполнение равенств

$$\delta(t_0) = \delta'(t_0) = \ldots = \delta^{(r)}(t_0) = 0. \tag{4.11}$$

Подставим решение задачи (1.7), (2.1) $x_*(t)$ в уравнение (3.3), в результате получим систему ОДУ r-ого порядка, не разрешенную относительно старшей поизводной неизвестной вектор-функции $\delta(t)$

$$L\left(t, x_*(t), x'_*(t), \ldots, x_*^{(r+1)}(t), \delta(t), \delta'(t), \ldots, \delta^{(r)}(t)\right) = 0, \ \ t \in \tilde{T}. \tag{4.12}$$

В силу свойства ЛРО (3.4) уравнение (4.12) имеет на некотором интервале $T_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon)$, $\ 0 < \varepsilon \le \check{\varepsilon}$, решение $\delta(t) = 0$, соответствующее начальным условиям (4.11). Покажем, что решение задачи (4.12), (4.11) на этом интервале единственно.

По определению ЛРО для любой функции $x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(\tilde{T}) : \ (t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D} \ \ \forall t \in \tilde{T}$ на $\tilde{T}$ имеет место тождество

$$L\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(r+1)}(t), \tilde{F}, \tilde{F}', \dots, \tilde{F}^{(r)}\right) = x'(t) - \psi(t, x(t)).$$

В частности, и для функции $x_*(t)$. Рассматривая обе части этого равенства как функции независимых переменных $t, x, x', \dots, x^{(r+1)}$, найдем частные производные по $x', \dots, x^{(r+1)}$

$$\left(\, \partial L/\partial x' \ \ \partial L/\partial x'' \ \ \dots \ \ \partial L/\partial x^{(r+1)} \,\right) + \left(\, \partial L/\partial \tilde{F} \ \ \partial L/\partial \tilde{F}' \ \ \dots \ \ \partial L/\partial \tilde{F}^{(r)} \right)$$

$$\times \Gamma_r\left(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}\right) = (\, E_n \ \ O \ \ \dots \ \ O)\,.$$

Подставим $x(t) = x_*(t)$ и $t = t_0$. Поскольку функция $x_*(t)$ удовлетворяет системе (3.1) при $t = t_0$, в силу свойства ЛРО (3.4) первое слагаемое в левой части обратится в ноль, поэтому получим

$$\left(\, \partial L(\gamma)/\partial \tilde{F} \ \ \partial L(\gamma)/\partial \tilde{F}' \ \ \dots \ \ \partial L(\gamma)/\partial \tilde{F}^{(r)} \,\right) \times$$

$$\times \Gamma_r\left(t_0, x_*(t_0), x_*'(t_0), \dots, x_*^{(r+1)}(t_0)\right) = (\, E_n \ \ O \ \ \dots \ \ O \,)\,,$$

где $\gamma = \left(t_0, x_*(t_0), x_*'(t_0), \dots, x_*^{(r+1)}(t_0), 0, \dots, 0\right)$. Отсюда следует, что $(n \times n(r+1))$-матрица, являющаяся множителем при Γ_r, должна иметь полный ранг, то есть

$$\operatorname{rank}\left(\, \partial L(\gamma)/\partial \tilde{F} \ \ \partial L(\gamma)/\partial \tilde{F}' \ \ \dots \ \ \partial L(\gamma)/\partial \tilde{F}^{(r)}\right) = n. \tag{4.13}$$

С учетом (4.11) из (4.12) вытекает равенство

$$L\left(t_0, x_*(t_0), x_*'(t_0), \dots, x_*^{(r+1)}(t_0), \delta(t_0), \delta'(t_0), \dots \delta^{(r)}(t_0)\right) = 0, \ \ t \in \tilde{T}.$$

Таким образом, для системы (4.12) выполняются все условия теоремы о неявной функции, в соответствии с которой в окрестности точки $(t_0, 0, \dots, 0)$ из системы (4.12) можно выразить n компонент вектора $\operatorname{colon}\left(\delta(t), \ \delta'(t), \ \dots, \ \delta^{(r)}(t)\right)$ через остальные его компоненты и переменную t

$$\operatorname{colon}\left(\delta_{(1)}(t), \ \delta'_{(2)}(t), \ \dots, \ \delta^{(r)}_{(r+1)}(t)\right) = \varphi\left(t, \tilde{\delta}_{(1)}(t), \tilde{\delta}'_{(2)}(t), \ \dots, \tilde{\delta}^{(r)}_{(r+1)}(t)\right),$$

где $t \in T_\varepsilon$, $\operatorname{colon}\left(\delta^{(i)}_{(j)}(t), \ \tilde{\delta}^{(i)}_{(j)}(t)\right) = R_j \delta^{(i)}(t), \ \ i = \overline{0, r}, \ \ j = \overline{1, r+1}, \ \ R_j$ – матрицы перестановок. Нетрудно показать, что в матрице, фигурирующей в равенстве (4.13), найдется неособенный минор порядка n

такой, что colon $\Big(\delta_{(1)}(t),\ \delta_{(2)}(t),\ \dots,\ \delta_{(r+1)}(t)\Big) = R\delta(t)$, R – матрица перестановок. С другой стороны, на интервале T_ε имеется другая неявная функция, удовлетворяющая уравнению (4.12) и условию (4.11),

$$\operatorname{colon}\Big(\delta_{(1)}(t),\ \delta'_{(2)}(t),\ \dots,\ \delta^{(r)}_{(r+1)}(t)\Big) = 0. \tag{4.14}$$

Поскольку неявная функция в окрестности точки $(t_0, 0, \dots, 0)$ определяется единственным образом, то $\varphi\Big(t, \tilde{\delta}_{(1)}(t), \tilde{\delta}'_{(2)}(t), \dots, \tilde{\delta}^{(r)}_{(r+1)}(t)\Big) \equiv 0$.

Очевидно, что задача (4.14), (4.11), а следовательно, по построению и задача (4.12), (4.11) имеет на T_ε единственное решение $\delta(t) = 0$.

Итак, мы показали, что в условиях теоремы решение $x_*(t)$ задачи (1.7), (2.1) является решением задачи (1.5), (2.1) на интервале T_ε. По доказанному выше решение задачи (1.5), (2.1) удовлетворяет для всех $t \in T_\varepsilon$ системе (4.3), которая представляет собой функцию $\xi = \xi(t, \eta)$ (3.7). Поскольку функция $F(t, x, x')$ в (1.1) не зависит от переменных $x'', \dots, x^{(r+1)}$, то функция $\bar{F}(t, \eta) = F(t, x, x')\Big|_{\xi = \xi(t,\eta)}$ из условия 5) теоремы вычисляется подстановкой в $F(t, x, x')$ лишь первых двух уравнений системы (4.3). Условие 5) теоремы гарантирует, что решение задачи (1.5), (2.1) будет решением задачи (1.1), (2.1) на интервале T_ε. □

Список литературы

1. Бояринцев, Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, 1988. – 158 с.
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа, т. II. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1981. – 584 с.
3. Чистяков, В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1996. – 279 с.
4. Шилов, Г.Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных), части 1-2 / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1972. – 624 с.
5. Brenan, K.E. Numerical Solution of Initial - Value Problems in Differential - Algebraic Equations (Classics in applied mathematics; 14) / K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold. — Philadelphia: SIAM, 1996. – 256 p.

A. A. Shcheglova

On solvability of essentially degenerate nonlinear algebraic differential system

Abstract. We consider nonlinear system of ordinary differential equations, which is not solved with respect to the derivative of the desired vector function and identically degenerate in the domain of definition. Under the assumption that the initial data generate a solution of the maltiplicity grater than one for the corresponding finite-dimensional system, the process of transformation of the given system into the system in the normal form is suggested, the theorem of existence of a solution to a Cauchy problem is proved.

Keywords: algebraic differential system; differential algebraic equations; existence of solution; multiple solution.

Щеглова Алла Аркадьевна, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952)453059 (shchegl@icc.ru)

Shcheglova Alla, Institute for System Dynamics & Control Theory SB RAS, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 head researcher, Phone: (3952) 453059 (shchegl@icc.ru)