Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 161—174

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 514.76

О классе линейных групп, родственных особой группе G_2^n

Н. М. Кузуб (knm1@mail.ru)
Иркутский государственный университет, Иркутск

Аннотация. Рассматривается матричная реализация простой некомпактной алгебры Ли типа g_2 в изотропном базисе, делается обобщение этой конструкции. Перечисляются все возможные алгебры Ли, принадлежащие этому классу.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, октава, особая группа G_2^n, алгебра Ли g_2^n.

Введение

В большинстве случаев G_2-структуры рассматриваются на семимерных римановых многообразиях [1]. Значительно реже эти структуры рассматриваются на псевдоримановых многообразиях.

Дифференциальная геометрия семимерных многообразий и различных подмногообразий (кривых, поверхностей, гиперповерхностей и так далее) в пространствах со структурной группой G_2^n (нормальная форма комплексной особой группы Ли G_2^c) очень богата по сравнению даже с обычной октавной геометрией. Это связано с тем, что стандартное семимерное представление этой группы имеет более сложную структуру пространства орбит из-за наличия изотропных векторов и изотропных подпространств. Тем более это относится к линейным многообразиям различных размерностей.

В семимерном пространстве эта геометрия наиболее подходящая для исследования, так как в случае маленьких структурных групп касательные пространства многообразий и подмногообразий чрезмерно неизотропны. В то же время в случае большой структурной группы, например $SL(7)$, имеется мало инвариантов. Но в семимерном пространстве исключительное значение имеют компактная форма и нормальная некомпактная форма группы Ли G_2.

1. Алгебра Кэли-Диксона

Алгебру Кэли-Диксона [2], элементами которой являются гиперкомплексные числа (числа Кэли), можно представить в виде прямой суммы: $R \cdot 1 \oplus V$, где V – ортогональное дополнение к единице. Тогда $V = R^7$ является антикоммутативной алгеброй без единицы. При этом, в V существует базис $\{e_1, \ldots, e_7\}$ со следующей таблицей умножения [3]:

$$
\begin{array}{lllll}
[e_1,e_2]=e_3, & [e_1,e_3]=-e_2, & [e_1,e_4]=-e_5, & [e_1,e_5]=e_4, & [e_1,e_6]=-e_7,\\
[e_1,e_7]=e_6, & [e_2,e_3]=e_1, & [e_2,e_4]=-e_6, & [e_2,e_5]=e_7, & [e_2,e_6]=e_4,\\
[e_2,e_7]=-e_5, & [e_3,e_4]=-e_7, & [e_3,e_5]=-e_6, & [e_3,e_6]=e_5, & [e_3,e_7]=e_4,\\
[e_4,e_5]=e_1, & [e_4,e_6]=e_2, & [e_4,e_7]=e_3, & [e_5,e_6]=e_3, & [e_5,e_7]=-e_2,\\
[e_6,e_7]=e_1. & & & &
\end{array}
$$

Умножение в этой алгебре индуцирует векторные и скалярные произведения в семимерном псевдооктавном векторном пространстве, то есть получаем псевдооктавную геометрию.

Группой ее автоморфизмов является группа Ли G_2^n размерности 14. Ей соответсвует алгебра Ли g_2^n.

Рассмотрим группу автоморфизмов алгебры Кэли-Диксона G_2^n. Соответствующая ей алгебра Ли состоит из эндоморфизмов $\mathcal{D}$, удовлетворяющих условию:

$$\mathcal{D}[e_i, e_j] = [\mathcal{D}e_i, e_j] + [e_i, \mathcal{D}e_j],\ i, j = \overline{1,7}.$$

Таким образом получаем алгебру Ли g_2^n со следующими соотношениями на элементы матрицы $\mathcal{D}$:

$$
\begin{array}{lll}
d_{ij} = -d_{ji}, & \text{если} \quad i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,3} & \text{и} \quad i = \overline{4,7},\ j = \overline{4,7},\\
d_{ij} = d_{ji}, & \text{если} \quad i = \overline{1,3},\ j = \overline{4,7} & \text{и} \quad i = \overline{4,7},\ j = \overline{1,3},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
d_{12} = d_{56} + d_{47}, & d_{16} = d_{25} - d_{34}, & d_{13} = d_{57} - d_{46}, & d_{17} = d_{35} + d_{24},\\
d_{14} = d_{36} - d_{27}, & d_{23} = d_{67} + d_{45}, & d_{15} = -d_{26} - d_{37}. &
\end{array}
$$

Следовательно, она определяется 28 двучленными и 7 трехчленными линейными соотношениями на элементы матрицы седьмого порядка.

Итак, V — семимерное векторное пространство с антикоммутативным умножением [x, y] таким, что группа автоморфизмов векторного произведения есть особая некомпактная группа Ли G_2^n (нормальная форма комплексной особой группы Ли G_2^c).

Иногда удобнее пользоваться другой матричной реализацией группы G_2^n, в которой, в частности, более естественно представлены подалгебра Картана и корневые векторы.

Введем новый базис в пространстве V. Для этого сделаем следующую замену:

$$
\begin{array}{l}
m_1 = e_1 + e_5,\ m_2 = e_2 + e_6,\ m_3 = e_3 + e_7,\ m_4 = e_4,\\
m_5 = e_1 - e_5,\ m_6 = e_2 - e_6,\ m_7 = e_3 - e_7.
\end{array}
$$

Полученный базис $\{m_i\}$ будем называть изотропным, в том смысле, что $m_i^2 \equiv 0$, при $i \neq 4$, то есть мы хотим иметь максимальное количество изотропных векторов в составе базиса. При этом, $m_4^2 = -1$, $\langle m_1,\ m_5\rangle = 2$, $\langle m_2,\ m_6\rangle = 2$, $\langle m_3,\ m_7\rangle = 2$, а остальные скалярные произведения равны нулю.

Векторное произведение [,] в новом базисе $\{m_1, \ldots, m_7\}$ задается следующей таблицей умножения:

$$\begin{array}{llll}
[m_1,m_2]=2m_7, & [m_1,m_3]=-2m_6, & [m_1,m_4]=-m_1, & [m_1,m_5]=-2m_4,\\
[m_1,m_6]=0, & [m_1,m_7]=0, & [m_2,m_3]=2m_5, & [m_2,m_4]=-m_2,\\
[m_2,m_5]=0, & [m_2,m_6]=-2m_4, & [m_2,m_7]=0, & [m_3,m_4]=-m_3,\\
[m_3,m_5]=0, & [m_3,m_6]=0, & [m_3,m_7]=-2m_4, & [m_4,m_5]=-m_5,\\
[m_4,m_6]=-m_6, & [m_4,m_7]=-m_7, & [m_5,m_6]=2m_3, & [m_5,m_7]=-2m_2,\\
[m_6,m_7]=2m_1. & & &
\end{array}$$

$$[m_1,m_1]=0, [m_2,m_2]=0, [m_3,m_3]=0, [m_4,m_4]=0,$$

$$[m_5,m_5]=0, [m_6,m_6]=0, [m_7,m_7]=0.$$

Следовательно, получаем другую матричную реализацию алгебры g_2^n, которую обозначим $\bar{g}_2$. Она состоит из матриц вида

$$\mathcal{D} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & 0 & d_{74} & -d_{64}\\
d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & -d_{74} & 0 & d_{54}\\
d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{64} & -d_{54} & 0\\
\hline
2d_{54} & 2d_{64} & 2d_{74} & 0 & 2d_{14} & 2d_{24} & 2d_{34}\\
\hline
0 & -d_{34} & d_{24} & d_{54} & -d_{11} & -d_{21} & -d_{31}\\
d_{34} & 0 & -d_{14} & d_{64} & -d_{12} & -d_{22} & -d_{32}\\
-d_{24} & d_{14} & 0 & d_{74} & -d_{13} & -d_{23} & -d_{33}
\end{array}\right),$$

где $d_{11} + d_{22} + d_{33} = 0$.

Опишем структуру матриц такого типа.

Во-первых, элементы d_{ij}, в случаях, когда $i = \overline{5,7}$, а $j = \overline{1,3}$ или когда $i = \overline{1,3}$, а $j = \overline{5,7}$, образуют произвольные кососимметричные матрицы K_1 и K_2.

Далее, пусть λ вектор с координатами $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ в евклидовом трехмерном пространстве V^3. Тогда

$$ad_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2\\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1\\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицы K_1 и K_2 можно представить в форме ad_λ и ad_μ в пространстве V^3, λ, $\mu \in V^3$. Их можно записать как $K_1 = ad_\lambda$ и $K_2 = -ad_\mu$, где $\lambda = (d_{14},\ d_{24},\ d_{34})$, $\mu = (d_{54},\ d_{64},\ d_{74})$.

В этих обозначениях матрицу $\mathcal{D}$ можно также записать в блочном виде:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_{\mu} \\ 2\mu^T & 0 & 2\lambda^T \\ ad_{\lambda} & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

причем $TrB = 0$, а λ, μ — произвольные трехмерные векторы, представленные столбцами.

Теперь опишем закон умножения в алгебре Ли $\bar{g}_2$ в явном виде.

Теорема 1. *Алгебра Ли $\bar{g}_2$ может быть представлена тройками $(B,\ \lambda,\ \mu)$ такими, что $\lambda,\ \mu \in V_3$, $B \in sl(3)$, причем закон умножения задается формулой:*

$$\begin{gathered}[(B_1,\ \lambda_1,\ \mu_1),\ (B_2,\ \lambda_2,\ \mu_2)] = \\ = ([B_1,\ B_2] + 3(\lambda_1 \otimes \mu_2^T) - 3(\lambda_2 \otimes \mu_1^T) - \langle \lambda_1,\ \mu_2 \rangle + \langle \lambda_2,\ \mu_1 \rangle, \\ 2[\mu_2,\ \mu_1] + B_1\lambda_2 - B_2\lambda_1,\ 2[\lambda_1,\ \lambda_2] - B_1^T\mu_2 + B_2^T\mu_1).\end{gathered}$$

Доказательство. Пространство V, разлагается в прямую сумму подпространств $V = U \oplus R \oplus U^*$, где U, U^* — трехмерные подпространства, R — одномерное. При этом подпространство U^* является сопряженным к U. Поэтому элемент пространства V представляет собой тройку компонент $(u,\ t,\ v)$, где $u \in U$, $t \in R$, $v \in U^*$.

Матрица $\mathcal{D}$ действует на элементы пространства V следующим образом:

$$\begin{cases} \mathcal{D}u = (& Bu, & 2\langle \mu,\ u \rangle, & [\lambda,\ u] &) \\ \mathcal{D}t = (& t\lambda, & 0, & t\mu &) \\ \mathcal{D}v = (& -[\mu,\ v], & 2\langle \lambda,\ v \rangle, & -B^T v &) \end{cases},$$

где $\langle , \rangle$, $[,]$ — обычные скалярное и векторное произведения в трехмерном евклидовом пространстве. Матрица $\mathcal{D}$ определяется тройкой $(B,\ \lambda,\ \mu)$.

В множестве троек $(B,\ \lambda,\ \mu)$ умножение индуцируется переносом матричного коммутирования. Коммутатор матриц $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ обозначим как $\mathcal{D}_3 = [\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2]$. Он имеет такую же структуру, что и матрицы $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$. Обозначим $B_i,\ \lambda_i,\ \mu_i$ — компоненты матриц $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,3}$.

В результате действия коммутатора $\mathcal{D}_3$ на элементы пространства V получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 2[\mu_2,\ \mu_1] + B_1\lambda_2 - B_2\lambda_1, \\ \mu_3 &= 2[\lambda_1,\ \lambda_2] + B_2^T\mu_1 - B_1^T\mu_2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle\lambda_3,\ v\rangle &= \langle\lambda_2,\ B_1^T v\rangle - \langle\lambda_1,\ B_2^T v\rangle + \langle\mu_2,\ [\mu_1, v]\rangle - \langle\mu_1,\ [\mu_2,\ v]\rangle,\\
\langle\mu_3,\ u\rangle &= \langle\mu_1,\ B_2 u\rangle - \langle\mu_2,\ B_1 u\rangle + \langle\lambda_1,\ [\lambda_2,\ u]\rangle - \langle\lambda_2,\ [\lambda_1,\ u]\rangle,\\
B_3 u &= [B_1,\ B_2]u + [\mu_2,\ [\lambda_1,\ u]] - [\mu_1,\ [\lambda_2,\ u]]+\\
&\quad +2\langle\mu_2,\ u\rangle\lambda_1 - 2\langle\mu_1,\ u\rangle\lambda_2,\\
B_3^T v &= [B_2^T,\ B_1^T]v + [\lambda_1,\ [\mu_2,\ v]] - [\lambda_2,\ [\mu_1,\ v]]+\\
&\quad +2\langle\lambda_1,\ v\rangle\mu_2 - 2\langle\lambda_2,\ v\rangle\mu_1,\\
[\lambda_3,\ u] &= [\lambda_1,\ B_2 u] - [\lambda_2,\ B_1 u] + B_2^T[\lambda_1,\ u] - B_1^T[\lambda_2,\ u]+\\
&\quad +2\langle\mu_2,\ u\rangle\mu_1 - 2\langle\mu_1,\ u\rangle\mu_2,\\
[\mu_3,\ v] &= [\mu_2,\ B_1^T v] - [\mu_1,\ B_2^T v] + B_1[\mu_2,\ v] - B_2[\mu_1,\ v]+\\
&\quad +2\langle\lambda_1,\ v\rangle\lambda_2 - 2\langle\lambda_2,\ v\rangle\lambda_1.
\end{aligned}
$$

Из этой системы выражаем $\lambda_3,\ \mu_3,\ B_3$. Так как в трехмерном пространстве выполняются классические соотношения

$$[[x,y],z] = \langle x,\ z\rangle y - \langle y,\ z\rangle x,\ (x\otimes y^T)z = x\langle y,\ z\rangle,$$

то получаем, что остальные равенства системы верны, если выполняется следующее условие: $B_i^T[x,\ u] + [x,\ B_i\ u] + [B_i\ x,\ u] = 0$, где $i = 1, 2$.

В свою очередь, последнее соотношение является верным при условии, что $TrB_i = 0$. □

2. Обобщенная алгебра

Теперь выясним, насколько далеко можно обобщить результат предыдущего параграфа на многомерный случай.

Рассмотрим (2n+1)-мерное векторное пространство V, которое разлагается в прямую сумму подпространств $V = U\oplus R\oplus U^*$, U, U^* — два n-мерных пространства с невырожденной симметричной билинейной формой $\langle,\rangle$, так что U^* можно считать пространством, сопряженным к U. Предполагается также, что в U, а потому и в U^*, задан антикоммутативный закон умножения $[,]$, для которого выполняется тождество Якоби. R – одномерное пространство. Элемент пространства V представляет собой тройку элементов $(u,\ t,\ v)$, где $u\in U,\ t\in R,\ v\in U^*$.

Предположим, что оператор $\mathcal{D}$ действует на элементы пространства V следующим образом:

$$
\left\{
\begin{array}{lllll}
\mathcal{D}u &= (& Bu, & Q\langle\mu,\ u\rangle, & [\lambda,\ u]\ )\\
\mathcal{D}t &= (& t\lambda, & t\,C\cdot TrB, & t\mu\ )\\
\mathcal{D}v &= (& -[\mu,\ v], & R\langle\lambda,\ v\rangle, & -B^T v\ )
\end{array}
\right.,
$$

где $Q,\ R,\ C$ — некоторые вещественные константы, B — эндоморфизм линейного пространства U, λ, μ — линейные функции на U.

Таким образом, оператор $\mathcal{D}$ можно записать в блочном виде:

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_{\mu} \\ \\ Q\,\mu^T & C\cdot TrB & R\,\lambda^T \\ \\ ad_{\lambda} & \mu & -B^T \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Множество таких матриц образует алгебру Ли тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{array}{lcl}
\lambda_3 & = & 2[\mu_2,\ \mu_1] + B_1\lambda_2 - B_2\lambda_1 + C\ \lambda_1\ TrB_2 - C\ \lambda_2\ TrB_1, \\
\mu_3 & = & 2[\lambda_1,\ \lambda_2] + B_2^T\mu_1 - B_1^T\mu_2 + C\ \mu_1\ TrB_2 - C\ \mu_2\ TrB_1, \\
R\ \langle\lambda_3,\ v\rangle & = & R\ \langle\lambda_2,\ B_1^Tv\rangle - R\ \langle\lambda_1,\ B_2^Tv\rangle + Q\ \langle\mu_2,\ [\mu_1, v]\rangle - \\
& & -Q\ \langle\mu_1,\ [\mu_2,\ v]\rangle + RC\ \langle\lambda_2,\ v\rangle TrB_1 - \\
& & -RC\ \langle\lambda_1,\ v\rangle TrB_2, \\
Q\ \langle\mu_3,\ u\rangle & = & Q\ \langle\mu_1,\ B_2u\rangle - Q\ \langle\mu_2,\ B_1u\rangle + R\ \langle\lambda_1,\ [\lambda_2,\ u]\rangle - \\
& & -R\ \langle\lambda_2,\ [\lambda_1,\ u]\rangle + QC\ \langle\mu_2,\ u\rangle TrB_1 - \\
& & -QC\ \langle\mu_1,\ u\rangle TrB_2, \\
B_3u & = & [B_1,\ B_2]u + [\mu_2,\ [\lambda_1,\ u]] - [\mu_1,\ [\lambda_2,\ u]] + \\
& & +Q\ \langle\mu_2,\ u\rangle\lambda_1 - Q\ \langle\mu_1,\ u\rangle\lambda_2, \\
B_3^Tv & = & [B_2^T,\ B_1^T]v + [\lambda_1,\ [\mu_2,\ v]] - [\lambda_2,\ [\mu_1,\ v]] + \\
& & +R\ \langle\lambda_1,\ v\rangle\mu_2 - R\ \langle\lambda_2,\ v\rangle\mu_1, \\
[\lambda_3,\ u] & = & [\lambda_1,\ B_2u] - [\lambda_2,\ B_1u] + B_2^T[\lambda_1,\ u] - B_1^T[\lambda_2,\ u] + \\
& & +Q\ \langle\mu_2,\ u\rangle\mu_1 - Q\ \langle\mu_1,\ u\rangle\mu_2, \\
[\mu_3,\ v] & = & [\mu_2,\ B_1^Tv] - [\mu_1,\ B_2^Tv] + B_1[\mu_2,\ v] - B_2[\mu_1,\ v] + \\
& & +R\ \langle\lambda_1,\ v\rangle\lambda_2 - R\ \langle\lambda_2,\ v\rangle\lambda_1, \\
C\ TrB_3 & = & (Q-R)\ \langle\lambda_2,\ \mu_1\rangle + (R-Q)\ \langle\lambda_1,\ \mu_2\rangle,
\end{array} \tag{2.2}$$

для любых $u \in U$, $v \in U^*$.

Лемма 1. *Если пространство U одномерное, то возможны следующие случаи алгебр Ли матриц вида (2.1),*

a) присоединенное представление алгебры $sl(2)$:

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix},$$

b) трехмерная разрешимая алгебра

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ 0 & Cb & 0 \\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix},$$

где C – константа.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда n=1.

Для данного случая умножение в алгебре Ли U нулевое: $[x,\, y] = 0$, а скалярное произведение $\langle x,\, y\rangle = \varepsilon xy$, где $\varepsilon = \pm 1,\; x,\, y \in U$.

Тогда из системы уравнений (2.2) получим следующие соотношения:

$$\begin{array}{lcl}
\lambda_3 & = & b_1\lambda_2 - b_2\lambda_1 + C\lambda_1 b_2 - C\lambda_2 b_1,\\
\mu_3 & = & b_2\mu_1 - b_1\mu_2 + C\mu_1 b_2 - C\mu_2 b_1,\\
\varepsilon\, R\, \lambda_3 & = & \varepsilon\, R\, \lambda_2 b_1 - \varepsilon\, R\, \lambda_1 b_2 + \varepsilon\, RC\, \lambda_2 b_1 - \varepsilon\, RC\, \lambda_1 b_2,\\
\varepsilon\, Q\, \mu_3 & = & \varepsilon\, Q\, \mu_1 b_2 - \varepsilon\, Q\, \mu_2 b_1 + \varepsilon\, QC\, \mu_2 b_1 - \varepsilon\, QC\, \mu_1 b_2,\\
b_3 & = & \varepsilon\, Q\, \mu_2\lambda_1 - \varepsilon\, Q\, \mu_1\lambda_2,\\
b_3 & = & \varepsilon\, R\, \lambda_1\mu_2 - \varepsilon\, R\, \lambda_2\mu_1,\\
C\, b_3 & = & \varepsilon\, (Q - R)\, \lambda_2\mu_1 + \varepsilon\, (R - Q)\, \lambda_1\mu_2.
\end{array} \tag{2.3}$$

A) Предположим, что параметры $R,\; Q$ ненулевые.

Из системы уравнений (2.3) находим $\lambda_3,\; \mu_3,\; b_3$. В результате получим, что $Q = R$ и $Cb_3 = 0$.

Предположим, что $C = 0$. Тогда получим уравнения:

$$\begin{array}{lcl}
\lambda_3 & = & b_1\lambda_2 - b_2\lambda_1,\\
\mu_3 & = & b_2\mu_1 - b_1\mu_2,\\
b_3 & = & \varepsilon\, Q\, (\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2),\\
Q & = & R,\\
C & = & 0.
\end{array}$$

Итак, если $C = 0,\, Q = R \neq 0$, то матрицы вида

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0\\ Q\mu & 0 & Q\lambda\\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix}$$

образуют алгебру Ли.

Заменой базиса можно привести коэффициент Q к единице. Следовательно, имеем алгебру Ли матриц:

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0\\ \mu & 0 & \lambda\\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix}$$

— присоединенное представление алгебры $sl(2)$.

Если предположим, что $C \neq 0$, то $b_3 = 0$.

Из системы уравнений (2.3) следует, что

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 0,$$

то есть, эти векторы линейно зависимы. Это противоречит нашему предположению, что эти векторы произвольны.

В) Рассмотрим случай, когда $Q = R = 0$. Тогда рассмотренная в пункте А) система уравнений (2.3) примет следующий вид:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_3 &=& b_1\lambda_2 - b_2\lambda_1 + C\lambda_1 b_2 - C\lambda_2 b_1, \\ \mu_3 &=& b_2\mu_1 - b_1\mu_2 + C\mu_1 b_2 - C\mu_2 b_1, \\ b_3 &=& 0, \\ Q &=& 0, \\ R &=& 0. \end{array}$$

Таким образом получили, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ 0 & Cb & 0 \\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix},$$

где $C = const$, образуют алгебру Ли. □

Лемма 2. *Если размерность пространства U не равна единице, а константа Q ненулевая, то U — полупростая алгебра Ли.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (2.2). Из данной системы однозначно определяются $\lambda_3,\ \mu_3$ и матрица B_3. В частности, учитывая равенства

$$(x \otimes y^T)z = x\langle y,\ z\rangle,\ 2[[x,\ y],\ z] = Q\ (\langle x,\ z\rangle y - \langle y,\ z\rangle x),$$

где $x, y, z \in U$, получаем, что

$$B_3 = [B_1,\ B_2] + \frac{Q}{2}\Bigg(3(\lambda_1 \otimes \mu_2^T) - 3(\lambda_2 \otimes \mu_1^T) - \langle\lambda_1,\ \mu_2\rangle + \langle\lambda_2,\ \mu_1\rangle\Bigg),$$

и легко проверяется последнее соотношение этой системы.

В итоге, из системы (2.2) выводим следующие соотношения:

$$\begin{gathered} [x,\ B^T y] + B[x,\ y] + [B^T x,\ y] = 0, \\ 2[[x,\ y],\ z] = Q\ (\langle x,\ z\rangle y - \langle y,\ z\rangle x), \\ 2\langle [x,\ y],\ z\rangle = \langle x,\ [y,\ z]\rangle - \langle y,\ [x,\ z]\rangle, \\ Q = R \neq 0, \\ C\ TrB = 0, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $x, y, z \in V^n,\ B \in \mathcal{B}$.

Рассмотрим "форму Киллинга": $\beta(x,\ y) = Tr(ad_x\ ad_y)$ на U. Так как $[[x,\ y],\ z] = [z,\ [y,\ x]] = ad_z\ ad_y\ x$, то воспользовавшись соотношением 2 системы уравнений (2.4), имеем

$$ad_z\ ad_y\ e_i = [[e_i,\ y],\ z] = \frac{Q}{2}\ (\langle e_i,\ z\rangle y - \langle y,\ z\rangle e_i).$$

Следовательно, если $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, то

$$Tr(ad_z\ ad_y) = \frac{Q}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,\ z\rangle y_i - n\langle y,\ z\rangle\right) = \frac{Q}{2}(1-n)\langle y,\ z\rangle.$$

Таким образом, получили форму Киллинга:

$$\beta(x,\ y) = \frac{Q}{2}(1-n)\langle x,\ y\rangle.$$

Данная форма пропорциональна скалярному произведению. Она невырождена при $Q \neq 0$ и $n \neq 1$. □

В дальнейшем будем предполагать, что n > 1.

Лемма 3. *Множество $\mathcal{B}$ является либо алгеброй Ли $gl(n)$, либо, если $n = 3$ или $Q = 0$, алгеброй Ли $sl(n)$.*

Доказательство. Согласно соотношению 5 системы (2.2),

$$B_3 u = [B_1,\ B_2]u + [\mu_2,\ [\lambda_1,\ u]] - [\mu_1,\ [\lambda_2,\ u]] + Q\ \langle\mu_2,\ u\rangle\lambda_1 - Q\ \langle\mu_1,\ u\rangle\lambda_2.$$

Рассмотрим компоненту, порожденную векторами λ_1 и μ_2. Учитывая соотношение 2 системы уравнений (2.4), получаем, что

$$Q\ \langle\mu_2,\ u\rangle\lambda_1 + [\mu_2,\ [\lambda_1,\ u]] = \frac{3}{2}Q\ \langle\mu_2,\ u\rangle\lambda_1 - \frac{1}{2}Q\ \langle\lambda_1,\ \mu_2\rangle u.$$

Введем оператор $\mathcal{G}(u) = \frac{3}{2}Q\ \langle\mu_2,\ u\rangle\lambda_1 - \frac{1}{2}Q\ \langle\lambda_1,\ \mu_2\rangle u$.

Рассмотрим действие данного оператора на базисных векторах пространства U, то есть

$$\mathcal{G}(e_i) = \frac{3}{2}Q\ \langle\mu_2^{\alpha} e_{\alpha},\ e_i\rangle\lambda_1^{\beta} e_{\beta} - \frac{1}{2}Q\ \langle\lambda_1^{\beta} e_{\beta},\ \mu_2^{\alpha} e_{\alpha}\rangle e_i,$$

где $\lambda_1 = \lambda_1^{\beta} e_{\beta},\ \mu_2 = \mu_2^{\alpha} e_{\alpha},\ u = e_i$, i пробегает значения от 1 до n; $\alpha,\ \beta = \overline{1,n}$. Предположим, что базис является ортогональным и $e_k^2 = \varepsilon^k$, где $\varepsilon^k = \pm 1,\ k = \overline{1,n}$. Вне диагонали этого оператора в столбце под номером i и в строке под номером β стоят элементы $\pm\frac{3}{2}Q\,\lambda_1^{\beta}\,\mu_2^{i}$, нули в остальных случаях. Следовательно, оператор $\mathcal{G}(u)$ принадлежит алгебре $gl(n)$.

След матрицы оператора имеет вид:

$$Tr\,\mathcal{G} = \frac{1}{2}Q(3-n)\sum_{\alpha=1}^{n}\varepsilon^{\alpha}\,\lambda_1^{\alpha}\,\mu_2^{\alpha}.$$

Таким образом, $Tr\,\mathcal{G}(u) = 0$, если $n = 3$ или $Q = 0$.

Теперь очевидно, что оператор $\mathcal{G}(u)$ пробегает либо алгебру $gl(n)$, либо $sl(n)$.

Аналогичный результат получается для компоненты оператора B_3, порожденной векторами λ_2 и μ_1. Следовательно, $Tr\, B_3 = 0$, если $n = 3$ или $Q = 0$.

Следовательно, либо $\mathcal{B} = gl(n)$, либо $\mathcal{B} = sl(n)$. □

Теорема 2. *Пусть множество матриц вида (2.1), в котором векторы λ, μ принадлежат пространству U, а матрица B принадлежит некоторому подмножеству $\mathcal{B}$ эндоморфизмов векторного пространства U, образуют некоторую алгебру Ли. Тогда*

1) при $n = 1$ возможны следующие случаи алгебр Ли матриц вида

a) присоединенное представление алгебры $sl(2)$:

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix},$$

b) трехмерная разрешимая алгебра

$$\begin{pmatrix} b & \lambda & 0 \\ 0 & Cb & 0 \\ 0 & \mu & -b \end{pmatrix},$$

где C — константа.

2) если алгебра Ли U некоммутативная, а $n = 3$, то имеем алгебру Ли матриц вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_\mu \\ \varepsilon\, \mu^T & 0 & \varepsilon\, \lambda^T \\ ad_\lambda & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 2,\ B \in sl(3)$. При этом умножение $[,]$ является векторным произведением евклидова или псевдоевклидова пространства, а умножение $\langle , \rangle$ – скалярным произведением в этих пространствах.

3) если алгебра U некоммутативная, то для любого $n > 1$ матрицы вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_\mu \\ 0 & 0 & 0 \\ ad_\lambda & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

образуют алгебру Ли, при условии, что в алгебре Ли U выполняются следующие условия:

$$[[x,\ y],\ z]=0,$$
$$[Bx,\ y]+[x,\ By]+B^T[x,\ y]=0,$$

где $x, y, z \in U$.

4) если алгебра U коммутативная, то для любого $n>1$ алгебру Ли образуют только матрицы вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & 0 \\ 0 & C\cdot TrB & 0 \\ 0 & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

где $B \in gl(n)$, $C = const$.

Доказательство. Первый пункт теоремы следует из леммы 1.

Перейдем к доказательству второго пункта с учетом леммы 2 и леммы 3. Рассмотрим векторное произведение на U :

$$[e_i,\ e_j]=c_{ij}^k e_k,\ i,j,k=\overline{1,n},$$

где $\{e_i\}$ — базис пространства U и $e_i^2=\pm 1$.

Первое соотношение системы (2.4) запишем в виде:

$$B[e_i,\ e_j]+[e_i,\ B^Te_j]+[B^Te_i,\ e_j]=0. \tag{2.5}$$

Оператор B связан с сопряженным оператором относительно скалярного произведения следующим тождеством:

$$\langle e_i,\ Be_j\rangle=\langle B^Te_i,\ e_j\rangle. \tag{2.6}$$

Элементы матрицы B обозначим через b_{ij}, а матрицы B^T через f_{ij}. Согласно соотношению (2.6), получим равенство $b_{ji}\varepsilon_j = f_{ij}\varepsilon_i$ или $f_{ij} = b_{ji}\varepsilon_i\varepsilon_j$. Следовательно, выражение (2.5) эквивалентно соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k b_{\gamma k}+\sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha j}^{\gamma} b_{i\alpha}\varepsilon_i\varepsilon_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n} c_{i\alpha}^{\gamma} b_{j\alpha}\varepsilon_\alpha\varepsilon_j=0, \tag{2.7}$$

при каждом $\gamma,\ i,j,\gamma=\overline{1,n}$.

Так как элементы матрицы B вне главной диагонали произвольны, то можно выбрать $b_{pq}=1$, остальные $b_{ij}=0$, $p\neq q,\ i,j=\overline{1,n}$. Тогда соотношение (2.7) запишется следующим образом:

$$c_{ij}^q\delta_{\gamma p}+c_{qj}^{\gamma}\delta_{ip}\varepsilon_i\varepsilon_q+c_{iq}^{\gamma}\delta_{jp}\varepsilon_j\varepsilon_q=0, \tag{2.8}$$

при каждом γ. Из этого соотношения следует, что $c_{ij}^k=0$ при $n\geq 4$.

Таким образом, всего возможны 3 случая:

1) $n = 2$, алгебра U некоммутативная,
2) $n = 3$, алгебра U некоммутативная,
3) $c_{ij}^k = 0$ для любого n.

1) Изучим случай, когда $n = 2$ и алгебра U некоммутативна.

Выясним выполняется ли соотношение (2.5) в этом случае.

Для этого рассмотрим двумерную алгебру с таблицей умножения $[e_1,\ e_2] = c_{12}^1 e_1 + c_{12}^2 e_2$. Матрица $B \in gl(2)$ или $sl(2)$. Выберем матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В соотношении (2.5) положим $i = j = 1$. Непосредственно проверяя данное соотношение, получаем $c_{12}^1 = 0$. Далее, положим $i = j = 2$. В случае, если $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $c_{12}^2 = 0$. Из этого следует противоречие с предположением о некоммутативности алгебры U.

2) Следующий случай, когда $n = 3$ и алгебра некоммутативная.

Предположим, что параметры Q, R не равны нулю.

Согласно лемме 3 в этом случае $TrB_3 = 0$. Из соотношения (2.8) следует, что $c_{ij}^k = 0$, если $i = k$ или $j = k$ или $i = j$. Матрицу B выберем следующим образом: $b_{11} = 1,\ b_{22} = -1$, остальные $b_{ij} = 0$. В этом случае соотношение (2.7) является тождеством и таблица умножения следующая:

$$\begin{aligned}
[e_1,\ e_2] &= c_{12}^3 e_3,\\
[e_1,\ e_3] &= c_{13}^2 e_2,\\
[e_2,\ e_3] &= c_{23}^1 e_1.
\end{aligned}$$

Среди этих алгебр только две будут неизоморфными.

В одном случае получаем базис **евклидова пространства** и

$$\begin{aligned}
[e_1,\ e_2] &= e_3,\\
[e_1,\ e_3] &= -e_2,\\
[e_2,\ e_3] &= e_1.
\end{aligned}$$

Следовательно, $Q = 2$ и соотношение 2 системы (2.4) для базисных векторов имеет вид:

$$\langle x,\ z\rangle y - \langle y,\ z\rangle x = [[x,\ y],\ z],\ x, y, z \in V^3.$$

Во втором случае получаем базис **псевдоевклидова пространства** и

$$\begin{aligned}
[e_1,\ e_2] &= -e_3,\\
[e_1,\ e_3] &= e_2,\\
[e_2,\ e_3] &= e_1.
\end{aligned}$$

Следовательно, $Q = -2$ и соотношение 2 системы (2.4) для базисных векторов имеет вид:

$$\langle y,\ z\rangle x - \langle x,\ z\rangle y = [[x,\ y],\ z],\ x, y, z \in V^3.$$

Таким образом, получили, что при $n = 3$ след $TrB_3 = 0$ и выполняются соотношения $C\,TrB_1 = 0,\ C\,TrB_2 = 0$. Из этого следует, что либо $TrB_1 = 0,\ TrB_2 = 0$, либо $C = 0$.

Если предположим, что $\mathcal{B} = gl(3)$ и выберем матрицы дифференцирования, согласно общему виду (2.1):

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 3C & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица, и

$$\mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} B_2 & \lambda_2 & -ad_{\mu_2} \\ Q\,\mu_2^T & C\,TrB_2 & R\,\lambda_2^T \\ ad_{\lambda_2} & \mu_2 & -B_2^T \end{pmatrix},$$

то получим, что система уравнений (2.2) несовместна. Следовательно, $TrB_1 = 0,\ TrB_2 = 0$. Таким образом доказали, что $\mathcal{B} = sl(3)$.

Итак, матрицы вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_{\mu} \\ \varepsilon\,\mu^T & 0 & \varepsilon\,\lambda^T \\ ad_{\lambda} & \mu & -B^T \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 2,\ B \in sl(3)$, образуют полупростую алгебру Ли.

3) Последний случай, когда алгебра коммутативная, то есть $[e_i,\ e_j] = 0,\ i, j = \overline{1, n}$. Из системы уравнений (2.2) получим, что $Q = R = 0$, C — произвольная константа и $\mathcal{B}$ — произвольная алгебра.

Итак, матрицы вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & 0 \\ 0 & C \cdot TrB & 0 \\ 0 & \mu & -B^T \end{pmatrix}$$

образуют алгебру Ли.

Осталось рассмотреть случай, когда параметры $Q = R = 0$, $n > 1$ и алгебра U некоммутативная.

Из системы уравнений (2.2) следует, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} B & \lambda & -ad_{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ ad_{\lambda} & \mu & -B^T \end{pmatrix}$$

образуют алгебру Ли, если выполняются условия

$$[[x,\ y],\ z] = 0,$$
$$[Bx,\ y] + [x,\ By] + B^T[x,\ y] = 0,$$
$$CTrB = 0,$$

где $x, y, z \in U,\ B \in \mathcal{B}$. □

Список литературы

1. *Fernandez M., Gray A.* Riemannian manifolds with structure group G_2 // Ann. di Math. Pura ed Appl. — 1982. — № 32. — P. 19–45.
2. *Желваков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца близкие к ассоциативным. — М: Наука, 1978. — 431 с.
3. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. — М: Наука, 1982. — 447 с.

N. M. Kouzoub

On the class of the linear groop related to a specific groop G_2^n

Abstract. The matrix model of simple noncompact Lie algebra of type g_2 in isotropic basis is considered, a generalization of this constraction is introduced. All Lie algebras of this class are listed.