Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 175—187

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.956

Вывод обобщенного решения волнового уравнения методом последовательных приближений *

Е. А. Лутковская (elut@math.isu.ru)
Иркутский государственный университет, г. Иркутск

Аннотация. Методом последовательных приближений строится обобщенное решение нелинейного волнового уравнения, сведенного к гиперболической системе полулинейных дифференциальных уравнений в инвариантах Римана.

Ключевые слова: волновое уравнение, гиперболическая система, метод последовательных приближений

Введение

В работе рассматривается нелинейное волновое уравнение с нелинейными граничными условиями первого, второго, и третьего родов. Решение такой начально-краевой задачи для волнового уравнения в силу разрывности правых частей уравнения и граничных условий может существовать [1] лишь в обобщенном смысле. Поэтому вводится понятие обобщенного решения и выясняются его свойства, необходимые для применения метода приращений к поставленной задаче оптимального управления. Для этого начально-краевая задача приводится к гиперболической системе полулинейных дифференциальных уравнений со смешанными условиями. Далее, эта система переписывается в инвариантах Римана, полученная дифференциальная задача сводится путем интегрирования вдоль характеристик к соответствующей интегральной системе типа Вольтерра и решение этой системы и определяется как обобщенное решение дифференциальной задачи. Существование решений интегральной системы устанавливается методом последовательных приближений.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-01-81016.

Целью данной работы и является показать некоторые особенности построения обобщенного решения волнового уравнения методом последовательных приближений. Дело в том, что известные автору доказательства сходимости метода последовательных приближений проводились для обобщенных решений, ограниченных всюду или почти всюду в прямоугольной области задания волнового уравнения. Здесь воспользоваться такой методикой не возможно ввиду менее жестких требований к параметрам задачи. Поэтому для обоснования сходимости метода последовательных приближений используется схема работы [2]. Особенности дифференциального уравнения второго порядка, а также отличия в конструкции смешанных условий приводят к необходимости корректировки техники применения метода последовательных приближений при построении обобщенного решения.

1. Постановка задачи

В прямоугольнике $\Pi = S \times T$ с границей $\partial\Pi$, $\Pi \cup \partial\bar{\Pi} = \bar{\Pi}$, $S = (s_0, s_1)$, $T = (t_0, t_1)$ плоскости переменных (s, t) рассмотрим волновое уравнение

$$x_{tt} - a^2(s)x_{ss} = f(x, x_t, x_s, s, t) \tag{1.1}$$

с начальными

$$x(s, t_0) = x^0(s),\ x_t(s, t_0) = x^1(s),\ s \in S \tag{1.2}$$

и граничными

$$x_t(s_0, t) = q^0(x(s_0, t), t),\ x_s(s_1, t) = q^1(x(s_1, t), t),\ t \in T \tag{1.3}$$

условиями.

Здесь $x = x(s, t)$ – искомое решение. Заданные функции $a = a(s)$, $f = f(x, x_t, x_s, s,\ t)$, $x^0 = x^0(s)$, $x^1 = x^1(s)$, $q^i = q^i(x, t)$, $i = 0, 1$, удовлетворяют следующим предположениям: $a > 0$ гладкая положительная на отрезке $\bar{S}$; f, q^0, q^1 удовлетворяет условию Липшица по переменным x, x_t, x_s при фиксированных s и t и суммируемы по Лебегу по независимым переменным со степенью $p \geq 1$ при фиксированных x, x_t, x_s, т.е. $f(x, x_t, x_s, \cdot, \cdot) \in L_p(\Pi)$, $q^i(x, \cdot) \in L_p(T)$, $x, x_t, x_s \in \mathbf{R}$; $x^0, x^{0\prime}, x^1 \in L_p(S)$.

Поясним выбор структуры граничных условий (1.3). На левой границе $s = s_0$ прямоугольника Π решение x подчинено обыкновенному дифференциальному уравнению, что фактически равносильно обычному условию первого рода. На правой границе $s = s_1$ прямоугольника Π второе из равенств (1.3) обслуживает одновременно любой из двух оставшихся типов граничных условий. Если q^1 не зависит от x, то (1.3) совпадает с условием второго рода, если же q^1 является линейной функцией x, то (1.3) равнозначно стандартному условию третьего рода. Разумеется, указанная фиксация типов граничных условий приведена лишь для определенности. На самом деле роли границ могут меняться, причем все полученные в статье результаты фактически от этого не зависят. Подчеркнем, что помимо отмеченной общности условие (1.3) обладает определенной симметрией и легко позволяет учесть граничные управления. Именно для этой цели сделано предположение о разрывности функций q^0, q^1 по t.

Отметим также, что дифференциальная форма записи условия первого рода на левой границе автоматически обеспечивает непрерывность стыковки решения в точке (s_0, t_0). Перечисленные особенности записи граничных условий в виде (1.3) выгодно отличаются от их постановок, используемых в работе [3].

Ввиду разрывности функции f по переменным $(s,t) \in \Pi$ и функций q^0, q^1 по переменной $t \in T$ решение задачи (1.1)-(1.3) может существовать лишь в обобщенном смысле. Построению такого решения методом последовательных приближений, а также выяснению особенностей такого построения и посвящена настоящая статья.

2. Обобщенное решение

Продолженная система. Заметим, что задача (1.1)-(1.3) эквивалентна продолженной [4] системе полулинейных гиперболических уравнений

$$\begin{cases} x_t - a^2(s) z_s = \int\limits_{t_0}^{t} f(x, x_\tau, x_s, u, s, \tau) d\tau + \bar{f}(s), \\ z_t - x_s = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} (x_t)_t - a^2(s)(x_s)_s = f(x, x_t, x_s, u, s, t), \\ (x_s)_t - (x_t)_s = 0, \ (s,t) \in \Pi, \end{cases} \tag{2.2}$$

где функция $z = z(s,t)$ определяется по формуле

$$z(s,t) = \int_{t_0}^{t} x_s(s,\tau) d\tau + z(s, t_0), \ (s,t) \in \Pi.$$

Начальные условия для решения $\mathbf{x} = (x, z, x_t, x_s)$ системы (2.1), (2.2) с учетом (1.1), (1.2) и введенных обозначений определим в виде

$$\begin{cases} x(s,t_0) = x^0(s), & x_t(s,t_0) = x^1(s), \\ z(s,t_0) = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{x^1(\xi)}{a^2(\xi)} d\xi + \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{x^1(\xi)}{a^2(\xi)} d\xi, & x_s(s,t_0) = x^{0\prime}(s), \ s \in S, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\prime$ — знак производной. Граничные условия для системы (2.1) запишем в форме интегрального эквивалента условий (1.3):

$$\begin{cases} x(s_0,t) = x^0(s_0) + \int\limits_{t_0}^{t} q_0(x(s_0,\tau), v_0(\tau),\tau)d\tau, \\ z(s_1,t) = \int\limits_{t_0}^{t} q_1(x(s_1,\tau), v_1(\tau),\tau)d\tau. \\ x_t(s_0,t) = q^0(x(s_0,t),t),\ x_s(s_1,t) = q^1(x(s_1,t),t),\ t\in T. \end{cases} \tag{2.4}$$

Инвариантная форма задачи (2.1)–(2.4). Выпишем матричную функцию $A(s)$, состоящую из коэффициентов при частных производных по пространственной переменной s в системах (2.1), (2.2). Будем иметь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A есть функции $\pm a$.

Пусть $\Lambda = \mathrm{d}iag\{-a,a\}$ — диагональная матрица. Построим матрицы

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix},\ \mathcal{P} = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

из левых и правых собственных векторов матрицы А. Очевидно, что $\mathcal{L}^\top\mathcal{P} = E$, где $^\top$ –знак транспонирования, а E – единичная матрица. Тогда инварианты Римана $r = (r^-, r^+)$ и решение $\mathrm{x} = (x,y)$ системы (2.1) связаны линейным невырожденным преобразованием

$$r = \mathcal{L}^\top\mathrm{x},\ \mathrm{x} = \mathcal{P}r. \tag{2.5}$$

Далее, в силу второго равенства системы(2.1) $x_s = z_t$. А потому решение $\mathrm{x}_t = (x_t, x_s)$ системы (2.2) связано со своими инвариантами Римана $r_t = (r_t^-, r_t^+)$ равенствами

$$r_t = \mathcal{L}^\top x_t,\ x_t = \mathcal{P}r_t. \tag{2.6}$$

Будем использовать еще следующие обозначения: $\mathbf{r} = (r, r_t)$.

Непосредственной проверкой можно убедится в том, что замена переменных (2.5),(2.6) приводит систему (2.1),(2.2) к инвариантной системе

$$\begin{cases} r_t^- - ar_s^- = g_0(s,t), \\ r_t^+ + ar_s^+ = g_0(s,t), \\ (r_t)_t^- - a(r_t)_s^- = g_1(s,t), \\ (r_t)_t^+ + a(r_t)_s^+ = g_1(s,t). \end{cases} \tag{2.7}$$

где

$$g_0(s,t) = \int\limits_{t_0}^{t} f[s,\tau]d\tau - a'\frac{r^- - r^+}{2},\ g_1(s,t) = f - a'\frac{r_t^- - r_t^+}{2}.$$

При этом начальным условиям (2.3) соответствуют условия

$$\begin{cases} r^-(s,t_0) = x^0(s) + a(s)\int\limits_{\bar{s}}^{s} x^1(\xi)/a^2(\xi)d\xi, \\ r^+(s,t_0) = x^0(s) - a(s)\int\limits_{\bar{s}}^{s} x^1(\xi)/a^2(\xi)d\xi, \\ r_t^-(s,t_0) = x^1(s) + a(s)x^{0\prime}(s), \\ r_t^+(s,t_0) = x^1(s) - a(s)x^{0\prime}(s), \end{cases} \tag{2.8}$$

а граничным условиям (2.4) – условия

$$\begin{cases} r^-(s_1,t) = r^+(s_1,t) + 2a(s_1)\int\limits_{t_0}^{t} q^1((r^+(s_1,\tau) + r^-(s_1,\tau))/2,\tau)d\tau, \\ r^+(s_0,t) = -r^-(s_0,t) + 2[x^0(s_0) + \int\limits_{t_0}^{t} q^0((r^+(s_0,\tau) + r^-(s_0,\tau))/2,\tau)d\tau], \\ r_t^-(s_1,t) = r_t^+(s_1,t) + 2a(s_1)q^1((r^+(s_1,t) + r^-(s_1,t))/2,t), \\ r_t^+(s_0,t) = -r_t^-(s_0,t) + 2q^0((r^+(s_0,t) + r^-(s_0,t))/2,t). \end{cases} \tag{2.9}$$

Характеристики и интегральный эквивалент инвариантной системы. Характеристиками систем (2.1),(2.2) и (2.7) называются, как известно, ([4], С.45, [5], С.78), интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = \pm a(s). \tag{2.10}$$

Будем обозначать через $s = s^-(\xi,\tau;t)$ $(s = s^+(\xi,\tau;t))$ решение характеристического уравнения (2.10) для отрицательного (положительного) собственного значения, проходящие через точку $(\xi,\tau) \in \bar{\Pi}$, т.е. $s^\pm(\xi,\tau;\tau) = \xi$. Гладкость функции a гарантирует существование, единственность и гладкость (в том числе и по начальным данным) таких характеристических функций.

Отличительной особенностью инвариантной системы является простая структура формирующих ее дифференциальных операторов. Каждый из них можно рассматривать как производную инварианта Римана по направлению, определяемому характеристикой, или как производную сложной функции с аргументами $(s^\pm(\xi,\tau;t),t)$ по переменной t. Это обстоятельство позволяет построить интегральный эквивалент дифференциальной задачи в инвариантах Римана. Пусть $(\check{s}^\pm,\check{t}^\pm) = (\check{s}^\pm(s,t),\check{t}^\pm(s,t)) \in \partial\Pi$ — начальная точка соответствующей характеристики, проходящей через точку (s,t). Тогда проинтегрировав уравнения системы (2.7) вдоль соответствующих характеристик, получим равносильную (2.7)-(2.9) интегральную систему уравнений типа Вольтерра

$$\begin{cases} r^{\pm}(s,t) = \check{r}^{\pm}(\check{s}^{\pm},\check{t}^{\pm}) + \int\limits_{\check{t}^{\pm}}^{t} g_0(\mathbf{r}, s^{\pm}(s,t,\tau),\tau)d\tau, \\ r_t^{\pm}(s,t) = \check{r}_t^{\pm}(\check{s}^{\pm},\check{t}^{\pm}) + \int\limits_{\check{t}^{\pm}}^{t} g_1(\mathbf{r}, s^{\pm}(s,t,\tau),\tau)d\tau, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $\check{r}^{\pm}(\check{s}^{\pm},\check{t}^{\pm}) = \check{r}^{\pm}(\check{s}^{\pm},t_0)$, $\check{r}_t^{\pm}(\check{s}^{\pm},\check{t}^{\pm}) = r_t^{\pm}(\check{s}^{\pm},t_0)$ в случае, если "начало" характеристики приходится на нижную границу прямоугольника П. Если же характеристика не доходит до нижней границы, то она "отражается" от правой или левой границы прямоугольника, и тогда

$$\begin{cases} \check{r}^{+}(\check{s}^{+},\check{t}^{+}) = r^{-}(\check{s}^{+},t_0) + \int\limits_{t_0}^{\check{t}^{+}} g_0(\mathbf{r}, s^{-}(s_0,\check{t}^{+},\tau),\tau)d\tau \\ \check{r}^{-}(\check{s}^{-},\check{t}^{-}) = r^{+}(\check{s}^{-},t_0) + \int\limits_{t_0}^{\check{t}^{-}} g_0(\mathbf{r}, s^{+}(s_1,\check{t}^{-},\tau),\tau)d\tau. \\ \check{r}_t^{+}(\check{s}^{+},\check{t}^{+}) = r_t^{-}(\check{s}^{+},t_0) + \int\limits_{t_0}^{\check{t}^{+}} g_1(\mathbf{r}, s^{-}(s_0,\check{t}^{+},\tau),\tau)d\tau \\ \check{r}_t^{-}(\check{s}^{-},\check{t}^{-}) = r_t^{+}(\check{s}^{-},t_0) + \int\limits_{t_0}^{\check{t}^{-}} g_0(\mathbf{r}, s^{+}(s_1,\check{t}^{-},\tau),\tau)d\tau. \end{cases}$$

Здесь мы предполагаем, что каждая характеристика "отражается" в прямоугольнике не более одного раза. В противном случае можно разбить область на полоски такой высоты, что внутри полоски характеристика имеет не более одного отражения, и продолжить решение с одной полоски на другую.

Обобщенное решение. В основу определения обобщенного решения положим идею, которая для этой цели часто используется как в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в гиперболических системах [4]. Суть ее заключается в том, что обобщенным решением системы дифференциальных уравнений объявляется решение эквивалентной ей системы интегральных уравнений. Понятно, что эквивалентность систем устанавливается на классических (гладких) решениях. Как было уже показано, интегральная система (2.11) эквивалентна дифференциальной начально-краевой задаче в инвариантах (2.7)-(2.9). Тогда гладкие решения интегральной задачи (2.11) связаны с гладкими решениями задачи (2.1)-(2.4) взаимно однозначным преобразованием (2.5), что позволяет ввести

Определение 1. Обобщенным решением гиперболической системы (2.1), (2.2) с начально-граничными условиями (2.3),(2.4) назовем векторфункцию $\mathbf{x}$, связанную с решением $\mathbf{r}$ интегральной системы (2.11) равенствами (2.5).

Определение 2. Обобщенным решением волнового уравнения (1.1) с начальными (1.2) и граничными (1.3) условиями назовем функцию x, которая является первой координатой в обобщенном решении $\mathbf{x}$ задачи (2.1)-(2.4).

Таким образом, как условия существования и единственности, так и свойства обобщенного решения x начально-краевой задачи (1.1)-(1.3) полностью определяются условиями существования и единственности и свойствами решения интегральной системы (2.11), которое, в свою очередь, естественно считать обобщенным решением дифференциальной задачи (2.7)-(2.9).

Далее покажем существование решения интегральной системы (2.11) методом последовательных приближений по схеме работы [2].

3. Метод последовательных приближений

Определим специальное функциональное пространство, которому, как будет показано далее, при соответствующем выборе функций $g_0(\mathbf{r}, u, s, t)$, $g_1(\mathbf{r}, u, s, t)$ принадлежат решения $r^{\pm}, r_t^{\pm}$ интегральной системы (2.11). Положим

$$\Lambda_p(\Pi) = \{\mathbf{r} \in L_p(\Pi) : \ r^{\pm}(s^{\pm}(s,t,\cdot),\cdot), \ r_t^{\pm}(s^{\pm}(s,t,\cdot),\cdot) \in AC(T), \ (s,t) \in \Pi\},$$

где под L_p понимается пространство вектор-функций, суммируемых со степенью p, $p \geq 1$, в области Π по Лебегу, а под $AC(T)$ – пространство абсолютно непрерывных на отрезке T функций.

Теорема 1. *Пусть функции $g_0(\mathbf{r}, s, t)$, $g_1(\mathbf{r}, s, t)$ в области $\mathbf{R}^4 \times \Pi$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $\mathbf{r}$ при фиксированных $(s,t) \in \Pi$ и $g_0(\mathbf{r}, \cdot, \cdot)$, $g_1(\mathbf{r}, \cdot, \cdot) \in L_p(\Pi)$ при фиксированных $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^4$, $r^{\pm}(\check{s}^{\pm}, \check{t}^{\pm}) \in L_p(\partial\Pi)$. Тогда существует решение $\mathbf{r} \in \Lambda_p(\Pi)$ системы интегральных уравнений (2.11).*

Доказательство. Доказательство. Построим последовательные приближения

$$\begin{cases} r^{\pm(k+1)}(s,t) = \check{r}^{\pm(k)}(\check{s}^{\pm}, \check{t}^{\pm}) + \int\limits_{\check{t}^{\pm}}^{t} g_0(\mathbf{r}^{(k)}, s^{\pm}(s,t,\tau), \tau) d\tau \\ r_t^{\pm(k+1)}(s,t) = \check{r}_t^{\pm(k)}(\check{s}^{\pm}, \check{t}^{\pm}) + \int\limits_{\check{t}^{\pm}}^{t} g_1(\mathbf{r}^{(k)}, s^{\pm}(s,t,\tau), \tau) d\tau, \ k = 0, 1..., \\ r^{\pm(0)}(s,t) \equiv 0, \ r_t^{\pm(0)}(s,t) \equiv 0, \ (s,t) \in \Pi. \end{cases} \tag{3.1}$$

Определим вектор-функцию $\mathbf{r}$ как сумму ряда

$$\mathbf{r}(s,t) = \mathbf{r}^{(1)}(s,t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{r}^{(k+1)}(s,t) - \mathbf{r}^{(k)}(s,t)), \ (s,t) \in \Pi. \tag{3.2}$$

Для сходимости этого ряда достаточно показать, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\delta}^{(k)}(s,t), \tag{3.3}$$

где $\bar{\delta}^{(k)}(s,t) = ||\mathbf{r}^{(k+1)}(s,t) - \mathbf{r}^{(k)}(s,t)||$, $k = 0, 1...$ Будем использовать еще следующие обозначения: $\delta^{(k)}(s,t) = (\delta^{+(k)}(s,t),\ \delta^{-(k)}(s,t))$, $\delta_t^{(k)}(s,t) = (\delta_t^{+(k)}(s,t), \delta_t^{-(k)}(s,t))$.

Оценим разности $\bar{\delta}^{(k+1)}(s,t)$ через $\bar{\delta}^{(k)}(s,t)$. Для этого вначале вычислим константу Липшица для функций g_0, g_1 по $\mathbf{r}$. Пусть L – константа Липшица для функций g_0, g_1 по переменным $\mathbf{x}$:

$$|\Delta f| \leq L||\Delta \mathbf{x}||.$$

Используя соотношения (2.5), можно записать,что

$$|\Delta f| \leq L||\mathcal{P}|| \cdot ||\Delta \mathbf{r}|| = K||\Delta \mathbf{r}||,$$

где $K = max(1/2, 1/2a)$ — константа Липшица для вектор-функции g по переменной $\mathbf{r}$. Тогда в силу равенств (3.1) устанавливаем оценки

$$\begin{aligned}
&\delta^{-(k+1)}(s,t) \leq K \left(\int_{t_0}^{\check{t}^-} [\delta^{(k)}(s^+(s_1,\check{t}^-;\tau),\tau) + \int_{t_0}^{\tau} \bar{\delta}^{(k)}(s^+(s_1,\check{t}^-;\tau),\alpha)d\alpha]d\tau \right.\\
&\left. + \int_{\check{t}^-}^{t} [\delta^{(k)}(s^-(s,t;\tau),\tau) + \int_{t_0}^{\tau} \bar{\delta}^{(k)}(s^-(s,t;\tau),\alpha)d\alpha]d\tau \right),\\
&\delta^{+(k+1)}(s,t) \leq K \left(\int_{t_0}^{\check{t}^+} [\delta^{(k)}(s^-(s_0,\check{t}^+;\tau),\tau) + \int_{t_0}^{\tau} \bar{\delta}^{(k)}(s^-(s_0,\check{t}^+;\tau),\alpha)d\alpha]d\tau \right.\\
&\left. + \int_{\check{t}^+}^{t} [\delta^{(k)}(s^+(s,t;\tau),\tau) + \int_{t_0}^{\tau} \bar{\delta}^{(k)}(s^+(s,t;\tau),\alpha)d\alpha]d\tau \right),\\
&\delta_t^{-(k+1)}(s,t) \leq K \left(\int_{t_0}^{\check{t}^-} \bar{\delta}^{(k)}(s^+(s,t,\tau),\tau)d\tau + \int_{\check{t}^-}^{t} \bar{\delta}^{(k)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau \right),\\
&\delta_t^{+(k+1)}(s,t) \leq K \left(\int_{t_0}^{\check{t}^+} \bar{\delta}^{(k)}(s^-(s,t,\tau),\tau)d\tau + \int_{\check{t}^+}^{t} \bar{\delta}^{(k)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau \right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4) формально позволяет оценить норму любой разности $\delta^{(k)}(s,t)$ через $\delta^{(0)}(s,t)$. При этом будет использоваться $k-$кратный интеграл, что само по себе не может привести к какому-либо конструктивному результату. Известные доказательства сходимости метода последовательных приближений типа (3.1) [6], [4] проводились для обобщенных решений, ограниченных всюду или почти всюду в области П. Понятно, что рассматриваемое здесь обобщенное решение ввиду менее жестких требований к входным параметрам задачи, вообще говоря, не ограничено в области П. Поэтому для обоснования сжимающего свойства отображения (3.1) нам придется воспользоваться схемой работы [2].

Рассмотрим интегралы

$$I_{++}=\int\limits_{\check t^+}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\bar\delta^{(0)}(s^+(s,t;\tau),\alpha)d\alpha\right)d\tau,$$

$$I_{(s,t)}=\int\limits_{\check t^-}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\bar\delta^{(0)}(s^-(s,t;\tau),\alpha)d\alpha\right)d\tau,$$

$$I_{+-}=\int\limits_{t_0}^{\check t^+}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\bar\delta^{(0)}(s^-(s_0,\check t^+;\tau),\alpha)d\alpha\right)d\tau,$$

$$I_{-+}=\int\limits_{t_0}^{\check t^-}\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\bar\delta^{(0)}(s^+(s_1,\check t^-;\tau),\alpha)d\alpha\right)d\tau$$

Они легко вычисляются по значениям функции $\bar\delta^{(0)}(\xi,\tau)$ в части области Π, расположенной между характеристиками $s^-(s,t;\cdot)$ и $s^+(s,t;\cdot)$. Через $G(s,t)$ обозначим область определения решения для точки $(s,t)\in\Pi:$

$$G(s,t)=\{(\xi,\tau)\in\Pi:\ s^-(s,t;\tau)<\xi<s^+(s,t;\tau),\ \tau\in[\check t_0;t]\}$$

если начало характеристик $s^\pm(s,t;\tau)$ приходится на нижнюю границу Π,

$$G(s,t)=\{(\xi,\tau)\in\Pi:\left\{\begin{array}{l}\text{если}\ \ \tau\in[t_0;\check t^+],\ \ \text{то}\ \ \xi\in[s_0;s]\\ \text{если}\ \ \tau\in[t_0;\check t^-],\ \ \text{то}\ \ \xi\in[s;s_1]\\ \text{если}\ \ \tau\in[\check t^+,t],\ \ \text{то}\ \ \xi\in[\check s^+,s]\\ \text{если}\ \ \tau\in[\check t^+,t],\ \ \text{то}\ \ \xi\in[\check s^-;s]\end{array}\right.\}$$

если характеристики $s^\pm(s,t;\tau)$ стартуют с боковых границ Π. Определим интеграл

$$I_{G(s,t)}=\iint\limits_{G(s,t)}\bar\delta^{(0)}(\xi,\alpha)d\xi d\alpha.$$

Нетрудно убедится, что

$$I_{ij}\le CI_{G(s,t)},\ i,j=\{+,-\},\ (s,t)\in\Pi.$$

Действительно, путем перемены пути интегрирования и замены переменных $\xi=s^+(s,t;\tau)$, для первого интеграла I_{++} получаем

$$\int\limits_{\check t^+}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau}\bar\delta^{(0)}(s^+(s,t;\tau),\alpha)d\alpha d\tau=\int\limits_{\check t^+}^{t}\int\limits_{\alpha}^{\check t^-}\bar\delta^{(0)}(s^+(s,t;\tau),\alpha)d\tau d\alpha=$$
$$=\int\limits_{\check t^+}^{t}\int\limits_{s^+(s,t;\alpha)}^{s_1}\frac{\bar\delta^{(0)}(\xi,\tau)}{a(\xi)}d\xi d\alpha\le C\iint\limits_{G(s,t)}\bar\delta^{(0)}(\xi,\alpha)d\xi d\alpha,$$

где $C = \max\limits_{s\in S}(a(s)^{-1})$. Аналогично доказывается и для остальных интегралов I_{--}, I_{+-}, I_{-+}.

Введем интегралы

$$
\begin{aligned}
I_1(s,t) &= \int\limits_{t_0}^{\check t^-} \delta^{(0)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau, I_2(s,t) = \int\limits_{\check t^-}^{t} \delta^{(0)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau,\\
I_3(s,t) &= \int\limits_{t_0}^{\check t^+} \delta^{(0)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau, I_4(s,t) = \int\limits_{\check t^+}^{t} \delta^{(0)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau,\\
\bar I_1(s,t) &= \int\limits_{t_0}^{\check t^-} \bar\delta^{(0)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau, \bar I_2(s,t) = \int\limits_{\check t^-}^{t} \bar\delta^{(0)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau,\\
\bar I_3(s,t) &= \int\limits_{t_0}^{\check t^+} \bar\delta^{(0)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau, \bar I_4(s,t) = \int\limits_{\check t^+}^{t} \bar\delta^{(0)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\delta^{(1)}(s,t) \le K[I_1(s_1,\check t^-) + I_2(s,t) + I_3(s_0,\check t^+) + I_4(s,t) + 4CI_{G(s,t)}],
$$
$$
\delta_t^{(1)}(s,t) \le K[\sum_{l=1}^{4} \bar I_l(s,t)],\ (s,t)\in \Pi.
$$

Далее,

$$
\delta^{(2)}(s,t) \le K[\int\limits_{t_0}^{\check t^-} \delta^{(1)}(s^+(s_1,\check t^-;\tau),\tau)d\tau + \int\limits_{\check t^-}^{t} \delta^{(1)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau +
$$
$$
+\int\limits_{t_0}^{\check t^+} \delta^{(1)}(s^-(s_0,\check t^+;\tau),\tau)d\tau + \int\limits_{\check t^+}^{t} \delta^{(1)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau + 4C\iint\limits_{G(s,t)} \bar\delta^{(1)}(\xi,\alpha)d\xi d\alpha],
$$
$$
\delta_t^{(2)}(s,t) \le K[\int\limits_{\check t^-}^{t} \bar\delta^{(1)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau + \int\limits_{\check t^+}^{t} \bar\delta^{(1)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau +
$$
$$
+\int\limits_{t_0}^{\check t^-} \bar\delta^{(1)}(s^+(s,t;\tau),\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{\check t^+} \bar\delta^{(1)}(s^-(s,t;\tau),\tau)d\tau],\ (s,t)\in\Pi.
$$

Подставив в это выражение оценку для $\bar\delta^{(1)}$, оценим сверху каждый интеграл вида $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\check t^\pm}^{\tau} \delta^{(0)}(s^\pm(s^\mp(s,t,\alpha),\alpha)d\alpha,\ \tau_1,\tau_2\in[t_0,t]$, величиной $\bar C I_{G(s,t)}$, где $\bar C = \frac{1}{2}C\max\{\max\limits_{s\in S}(s^-_\xi(s,t;\tau))^{-1},\ \max\limits_{s\in S}(s^+_\xi(s,t;\tau))^{-1}\}$. Заметим, что $\bar C$ отделима от нуля, т.к. $a(s)>0$ и $s^\pm_\xi(s,t;\tau) = e^{\pm\int_\tau^t a'(s)d\alpha} > 0$. Повторные интегралы вида $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\check t^\pm}^{\tau} \delta^{(0)}(s^\pm(s^\pm(s,t,\alpha),\alpha)d\alpha,\ \tau_1,\tau_2\in[t_0,t]$, либо $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\tau_3}^{\tau_4} \delta^{(0)}(s^\pm(s_*,t^*,\alpha),\alpha)d\alpha,\ s_* = s_1\vee s_0, t^* = \check t^+\vee\check t^-, \tau_j\in[t_0,t], j = 1,2,3,4$, можно оценить сверху через соответствующие интегралы $I_l(s,t)$, $l = 1,2,3,4:$

$$\begin{gathered}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\check{t}^{\pm}}^{\tau}\delta^{(0)}(s^{\pm}(s^{\pm}(s,t,\alpha),\alpha)d\alpha \le (t-t_0)I_l,\\ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\tau_3}^{\tau_4}\delta^{(0)}(s^{\pm}(s_*,t^*,\alpha),\alpha)d\alpha \le (t-t_0)I_l.\end{gathered}$$

Заметим также, что $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} I_{G(s,t)} \le (t-t_0)I_{G(s,t)},\ \forall\tau_1,\tau_2\in[t_0,t]$. Применяя подобную методику далее для $\bar{\delta}^{(k)},\ k=3,4,...$, получим

$$\begin{gathered}\delta_t^{(k)}(s,t) \le K^k[\tfrac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}\sum\limits_{l=1}^{4} I_l(s,t) + \tfrac{(t-t_0)^{k-2}}{(k-2)!}\tilde{C}I_{G(s,t)}],\\ \delta^{(k)}(s,t) \le K^k\tfrac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}[\sum\limits_{l=1}^{4}\bar{I}_l(s,t)+\tilde{C}I_{G(s,t)})].\end{gathered} \tag{3.5}$$

Следовательно, сумма ряда (3.3) удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\delta}^{(k)}(s,t),\le C_0[\sum_{l=1}^{4}I_l(s,t)+\sum_{l=1}^{4}\bar{I}_l(s,t)+I_{G(s,t)}],$$

где константа C_0 зависит только от величины константы Липшица K, длины интервала T и оценки сверху функций $a(s)^{-1}$, $(s_{\xi}^{\pm}(s,t;\tau))^{-1}$.

Таким образом, сходится ряд (3.2), а вместе с ним и абсолютно сходится ряд (3.3) почти всюду в П, и его сумма $\mathbf{r}(s,t)$ совпадает с пределом последовательности $\{\mathbf{r}^{(k)}(s,t)\},\ k=0,1,\ldots$, также почти всюду в П. Поэтому после предельного перехода равенства (3.1) превращаются в тождества, а значит функция $\mathbf{r}^{(1)}(s,t)=(r^{+}(s,t),r^{-}(s,t))$ есть решение интегральной системы (2.11).

Так как оценка (3.5) зависит лишь от $\bar{\delta}^{0}$, оценка норм $r(s,t)$ и $r_t(s,t)$ зависит только от начальных условий задачи:

$$\begin{gathered}||r(s,t)|| \le C_0[|x^0(\xi_0)|+|x^0(\xi_1)|+\int\limits_{s_0}^{s_1}(|x^0(\xi)|+|x^1(\xi)|)d\xi+\int\limits_{t_0}^{\check{t}^{+}}|q^0(0,\tau)|d\tau+\\ +\int\limits_{t_0}^{\check{t}^{-}}|q^1(0,\tau)|d\tau++\iint\limits_{G(s,t)}|f(0,0,0,\xi,\tau)|d\xi d\tau],\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$||r_t(s,t)|| \le C_0[|x^{0\prime}(\xi_0)| + |x^{0\prime}(\xi_1)| + |x^1(\xi_0)| + |x^1(\xi_1)| + \int\limits_{s_0}^{s_1}(|x^{0\prime}(\xi)| +$$
$$+|x^1(\xi)|)d\xi + +|q^0(0,\check{t}^+)| + |q^1(0,\check{t}^-)| + \int\limits_{t_0}^{\check{t}^+}|q^0(0,\tau)|d\tau + \int\limits_{t_0}^{\check{t}^-}|q^1(0,\tau)|d\tau +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{\check{t}^+}|f(0,0,0,s^-(s_0,\check{t}^+;\tau,\tau)|d\tau + \int\limits_{\check{t}^+}^{t}|f(0,0,0,s^+(s_0,\check{t}^+;\tau,\tau)|d\tau +$$
$$\int\limits_{t_0}^{\check{t}^-(s,t)}|f(0,0,0,s^+(s_0,\check{t}^-;\tau,\tau)|d\tau + \int\limits_{\check{t}^-(s,t)}^{t}|f(0,0,0,s^-(s_0,\check{t}^-;\tau,\tau)|d\tau +$$
$$+\iint\limits_{G(s,t)}|f(0,0,0,\xi,\tau)|d\xi d\tau], \tag{3.7}$$

где $\xi_0 = s^-(s_0,\check{t}^+;t_0)$, $\xi_1 = s^+(s_1,\check{t}^-;t_0)$.

В силу того, что правые части неравенств (3.6),(3.7) являются функциями пространства $L_p(\Pi)$, то решение интегральной системы (2.11) принадлежит пространству $\Lambda_p(\Pi)$. □

А так как решение x волнового уравнения (1.1) связано с инвариантами Римана (r^-, r^+) линейным преобразованием (2.5) и его частные производные (x_t, x_s) связаны с (r_t^-, r_t^+) линейным преобразованием (2.6), для $|x(s,t)|$ будет справедлива с точностью до константы оценка (3.6), а для $||(x_t(s,t), x_s(s,t))||$ – оценка (3.7). Таким образом установили существование и единственность решения x волнового уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) и граничными условиями (1.3).

Список литературы

1. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983.
2. *Терлецкий В.А.* Обобщенное решение гиперболических систем одномерных полулинейных дифференциальных уравнений // Серия: Оптимизация и управление . Вып. 11. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2004. — 48 с.
3. *Терлецкий В.А.* Метод приращений в задаче оптимального управления нелинейным волновым уравнением // Проблемы управления и приложения (Техника, производство, экономика). :Тр. Междунар. конф. — Минск, 2005. — Т. 2: Управление и оптимизация. — С. 150–158.
4. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.А.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 687 с.
5. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики . — М.: Наука, 1979. —392 с.
6. *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч.2. Оптимальное управление — Новосибирск: Наука, 1990. — 151 с.

E. A. Lutkovskaya

Construction of generalized solution for the wave equation using method of successive approximations

Abstract. In the paper method of successive approximations is used to construct a generalized solution of non-linear wave equation reduced to a hyperbolic system of semilinear differential equations in Riemann invariants. Key-words: method of successive approximations, wave equation, hyperbolic system